

FÍSICA 1

4^a Edición



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (<i>Opcional</i>)	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
CAPÍTULO 1	1	<hr/> <hr/>	
MEDICIONES		CAPÍTULO 4	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL	
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	Y TRIDIMENSIONAL	59
1-3 Patrón de Tiempo	3	<hr/> <hr/>	
1-4 Patrón de Longitud	5	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-5 Patrón de Masa	7	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-7 Análisis Dimensional	10	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
Preguntas y Problemas	11	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (<i>Opcional</i>)	69
<hr/> <hr/>		4-6 Movimiento Relativo	71
CAPÍTULO 2	17	Preguntas y Problemas	74
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	CAPÍTULO 5	
2-2 Descripciones del Movimiento	17	FUERZA Y LAS LEYES	
2-3 Velocidad Promedio	20	DE NEWTON	87
2-4 Velocidad Instantánea	21	<hr/> <hr/>	
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-1 Mecánica Clásica	87
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-3 Fuerza	90
2-8 Galileo y la Caída Libre (<i>Opcional</i>)	29	5-4 Masa	90
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (<i>Opcional</i>)	30	5-5 Segunda Ley de Newton	92
Preguntas y Problemas	31	5-6 Tercera Ley de Newton	94
<hr/> <hr/>		5-7 Unidades de Fuerza	96
CAPÍTULO 3	41	5-8 Peso y Masa	97
VECTORES		5-9 Medición de Fuerzas	99
3-1 Vectores y Escalares	41	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42	5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
3-3 Componentes de Vectores	43	Preguntas y Problemas	106

CAPÍTULO 6
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137

CAPÍTULO 7
TRABAJO Y ENERGÍA 149

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163

CAPÍTULO 8
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>)	189
Preguntas y Problemas	190

CAPÍTULO 9
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>)	220
Preguntas y Problemas	224

CAPÍTULO 10
COLISIONES 233

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

CAPÍTULO 11
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

CAPÍTULO 12
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

CAPÍTULO 13
ÍMPETU ANGULAR **305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

CAPÍTULO 14
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS **331**

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

CAPÍTULO 15
OSCILACIONES **353**

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	371 373

CAPÍTULO 16
GRAVITACIÓN **383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria G	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	404 408

CAPÍTULO 17
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS **419**

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	431 433

CAPÍTULO 18
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS **441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6	Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (<i>Opcional</i>)	453
	Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19
MOVIMIENTO ONDULATORIO **465**

19-1	Ondas Mecánicas	465
19-2	Tipos de Ondas	466
19-3	Ondas Viajeras	467
19-4	Velocidad de Onda	471
19-5	La Ecuación de la Onda (<i>Opcional</i>)	471
19-6	Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7	El Principio de Superposición	476
19-8	Interferencia de Ondas	478
19-9	Ondas Estacionarias	482
19-10	Resonancia	485
	Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20
ONDAS SONORAS **495**

20-1	La Velocidad del Sonido	495
20-2	Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3	Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4	Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5	Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6	Pulsaciones	506
20-7	El Efecto Doppler	508
	Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD **519**

21-1	Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2	Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3	Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4	La Transformación de Lorentz	526
21-5	Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6	La Transformación de las Velocidades	529
21-7	Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8	Ímpetu Relativista	535
21-9	Energía Relativista	537
21-10	La Lógica la Relatividad Especial	540
	Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22
TEMPERATURA **547**

22-1	Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2	Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3	Medición de la Temperatura	549
22-4	La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5	Dilatación Térmica	554
	Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL **565**

23-1	Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2	El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3	Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4	Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5	Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6	La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7	Fuerzas Intermoleculares (<i>Opcional</i>)	578
23-8	La Ecuación de Estado de van der Waals (<i>Opcional</i>)	579
	Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24
MECÁNICA ESTADÍSTICA **587**

24-1	Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2	Recorrido libre medio	589
24-3	La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4	La Distribución de las Energías	597
24-5	Movimiento Browniano	599
24-6	Distribuciones Estadísticas Cuánticas (<i>Opcional</i>)	600
	Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA **607**

25-1	El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2	Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3	Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4	Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26
ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY
DE LA TERMODINÁMICA **635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 12

DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

En el capítulo 11 hemos considerado la cinemática de la rotación y señalábamos que no contenía nuevas características básicas distintivas, estando relacionados los parámetros ϕ , ω , y α de la rotación con los correspondientes parámetros x , v , y a de la traslación para las partículas que forman el sistema en rotación. En este capítulo, siguiendo el patrón de nuestro estudio del movimiento de traslación, consideramos las causas de la rotación, un tema que se conoce como dinámica de la rotación. Los sistemas en rotación están formados de partículas, y ya hemos aprendido cómo aplicar las leyes de la mecánica clásica al movimiento de las partículas. Por esta razón la dinámica de la rotación, como la cinemática, no debería contener características distintivas que sean fundamentalmente nuevas. Sin embargo, al igual que en capítulo 11, es muy útil volver a escribir los conceptos del movimiento de traslación en una forma nueva, especialmente elegida por su conveniencia para describir a los sistemas en rotación.

12-1 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UNA VISIÓN GENERAL

En el capítulo 5 planteábamos el problema fundamental de la dinámica: cuando se aplican fuerzas externas a un cuerpo de masa m , ¿cuál es el movimiento resultante? Explicábamos entonces cómo puede hallarse la solución a este problema usando la segunda ley de Newton, que enunciábamos como sigue:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración.}$$

En el presente capítulo buscamos una relación dinámica que nos permita analizar el problema similar en la dinámica de la rotación: cuando una fuerza se aplica en cierto punto a un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje determinado, ¿cuál es el movimiento resultante? El lugar donde se aplica la fuerza debe tener importancia, ya que de la experiencia sabemos que una fuerza dada aplicada a un cuerpo en un lugar puede producir una rotación diferente a la producida si la fuerza se aplica en otro lugar. La cantidad en la dinámica de la rotación que toma en cuenta tanto la magnitud de la fuerza como el lugar de aplicación de la fuerza y su

dirección se llama *torca*; nuestro concepto de torca puede ser comparado por analogía con el de torsión o torcedura, de la misma manera que consideramos a la fuerza como un empujón o jalón.

También sabemos por la experiencia que el esfuerzo necesario para poner a un cuerpo en rotación depende de cómo esté distribuida la masa del cuerpo; es más fácil para una fuerza dada hacer girar a un cuerpo cuya masa esté cercana al eje de rotación que a otro cuya masa esté alejada de este eje. La cantidad inercial que tiene en cuenta la distribución de la masa de un cuerpo se llama *inercia de la rotación*.* Al contrario de la masa, la inercia de la rotación no es una propiedad intrínseca de un cuerpo, sino que ésta depende del eje de rotación alrededor del cual el cuerpo gira.

Dadas las analogías entre las cantidades de la traslación (fuerza y masa) y las cantidades de la rotación (torca e inercia de la rotación), nos conduce a suponer un análogo para la rotación de la segunda ley de Newton en la forma

$$\text{torca} = \text{inercia de la rotación} \times \text{aceleración angular.}$$

* Conocida también como el *momento de inercia*.

Este es, de hecho, el resultado correcto, como lo demostraremos en la sección 12-5.

Al igual que la fuerza y la aceleración, la torca y la aceleración angular son cantidades vectoriales. Sin embargo, *en este capítulo consideraremos únicamente casos en los que el eje de rotación pueda ser considerado como fijo en cuanto a dirección*. Esta restricción es similar al hecho de considerar solamente el movimiento unidimensional en el caso de la dinámica de la traslación. Si bien la torca es una cantidad vectorial, como lo demostraremos en la sección 12-4, podemos usar la forma escalar de las ecuaciones dinámicas en las que todas las cantidades vectoriales se refieren a las componentes a lo largo del eje de rotación. (En el capítulo 13 discutiremos situaciones en las que *debemos* de considerar la naturaleza vectorial de las cantidades de la rotación.)

Existen dos enfoques que pueden adoptarse para derivar las ecuaciones de la dinámica de la rotación. En el primero, se considera a la fuerza que actúa sobre cada partícula del cuerpo, y las torcas que actúan sobre cada partícula se suman para hallar la torca total que actúa sobre el cuerpo. Para llevar a cabo este método debemos conocer cómo se transmiten las fuerzas externas desde sus puntos de aplicación a la ubicación de cada partícula.*

El segundo enfoque, que es el que aquí adoptamos, se basa en la conservación de la energía, en particular el teorema trabajo-energía que hemos estudiado en el capítulo 8,

$$W = \Delta K.$$

Para este cálculo en particular, W representa el trabajo neto efectuado sobre el objeto por las fuerzas externas que cambian el movimiento de rotación, y ΔK representa el cambio de la energía cinética de la rotación, la cual suponemos, en este caso, que es la única forma de energía que el cuerpo puede tener.

Comenzaremos, en las dos secciones siguientes, con una exposición de lo que es la energía cinética de rotación y la inercia de la rotación. La exposición, después, de la torca nos llevará a las ecuaciones de la dinámica de la rotación.

12-2 ENERGÍA CINÉTICA DE LA ROTACIÓN E INERCIA DE LA ROTACIÓN

La figura 1 muestra un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje vertical fijo. Consideraremos al cuerpo como un

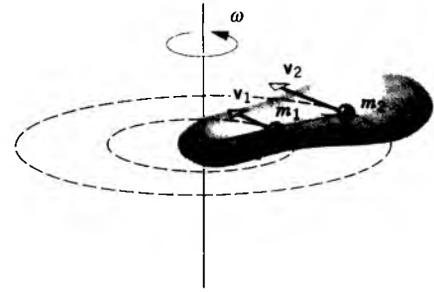


Figura 1 Un cuerpo rígido gira en torno a un eje fijo. Cada partícula del cuerpo tiene la misma velocidad angular ω , pero la velocidad tangencial v varía con la distancia r de la partícula al eje de rotación. Aquí m_1 y m_2 tienen la misma velocidad angular ω , pero $v_2 > v_1$ porque $r_2 > r_1$.

conjunto de partículas, y analizaremos la rotación de una partícula sola como lo hicimos en el capítulo 11. Una partícula de masa m a una distancia r del eje de rotación se mueve en un círculo de radio r a una velocidad angular ω con respecto a este eje y tiene una velocidad lineal tangencial $v = \omega r$. La energía cinética de la partícula es, por lo tanto, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

La energía cinética total K del cuerpo que gira es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas de que se compone el cuerpo, que puede expresarse así:

$$K = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \dots = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2. \quad (1)$$

Aquí hemos supuesto que el cuerpo es rígido, de modo que todas las partículas tienen la misma velocidad angular ω ; de aquí que el factor común ω^2 pueda ser eliminado de cada término en la suma de la ecuación 1. La cantidad $\sum m_i r_i^2$ es la suma de los productos de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia perpendicular al eje de rotación. Se le llama *inercia de rotación* del cuerpo con respecto al eje de rotación particular, y se representa por el símbolo I .

$$I = \sum m_i r_i^2. \quad (2)$$

Nótese que la *inercia de rotación de un cuerpo depende del eje en torno al cual esté girando* así como de la manera en que esté distribuida su masa. La inercia de rotación tiene las dimensiones ML^2 y se expresa usualmente en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Al combinar las ecuaciones 1 y 2 podemos escribir la energía cinética del cuerpo rígido en rotación como

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (3)$$

Esta es análoga a la expresión para la energía cinética de traslación de un cuerpo, $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Ya hemos visto que la velocidad angular ω es análoga a la velocidad lineal v .

* Para una exposición crítica de este método, véase "Rotational Motion and the Law of the Lever", por Hans C. Ohanian, *American Journal of Physics*, febrero de 1991, pág. 182.

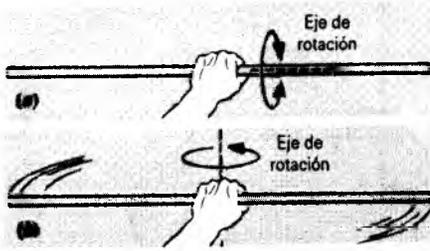


Figura 2 Para hacer girar un barrote largo en torno al eje que está a lo largo de su longitud, como en (a), se requiere menos esfuerzo que para hacerlo girar alrededor de un eje perpendicular a su longitud, como en (b). En (a), las partículas del barrote están más cerca del eje de rotación que en (b), y por lo tanto el barrote tiene una inercia de rotación más pequeña en (a).

Ahora veremos que la inercia de rotación I es análoga a la masa M (que podemos considerar como la inercia de traslación).

En la ecuación 3, como en todas las ecuaciones que mezclen cantidades angulares con cantidades no angulares, la variable angular (ω en este caso) debe expresarse en radián.

La energía cinética de rotación dada por la ecuación 3 no es una nueva clase de energía; es, simplemente, la suma de las energías cinéticas de traslación ordinarias de todas las partículas del cuerpo. Aun cuando todo el cuerpo pudiera no estar en un movimiento de traslación, cada una de sus partículas tiene una velocidad tangencial, y por lo tanto, cada partícula tiene una energía cinética. La dirección instantánea de la velocidad de cada partícula cambia cuando el cuerpo gira, pero la energía cinética depende de v^2 y es un escalar, de modo que no tiene una dirección asociada con ella. Por lo tanto, es bastante propio sumar las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo que gira. La energía cinética de rotación $\frac{1}{2}I\omega^2$ es simplemente una manera conveniente de expresar la energía cinética total de todas las partículas del cuerpo rígido.

La figura 2 muestra una demostración simple que usted puede llevar a cabo para convencerse de que girar un cuerpo que tenga una inercia de rotación grande exige un mayor esfuerzo (aplicado en un punto determinado) que dar la misma rotación a un cuerpo de inercia de rotación pequeña. Para hacer girar al barrote en torno a un eje a lo largo de su longitud (Fig. 2a) se requiere poco esfuerzo, relativamente; con relación al eje largo, todas las partículas del barrote tienen valores de r pequeños, y la inercia de rotación es pequeña. Cuando tratamos de hacer el giro alrededor de un eje perpendicular al eje largo (Fig. 2b), esto no sucede así. La masa no ha cambiado, por supuesto, pero una mayor cantidad de masa se halla situada lejos de este eje; de la ecuación 2, la cual indica que la masa contribuye a I como el cuadrado de su distancia al eje, esta masa distante aporta una contribución mucho mayor a I que la masa que está cerca

del eje. Es fácil comprobar que girar el barrote en torno a este eje requiere un esfuerzo mayor.

Problema muestra 1 Tres partículas de masas m_1 (2.3 kg), m_2 (3.2 kg), y m_3 (1.5 kg) están en los vértices de un triángulo rectángulo de relación 3-4-5, como se muestra en la figura 3. (a) Halle la inercia de rotación en torno a los ejes perpendiculares al plano xy y que pasan a través de cada una de las tres partículas. (b) Halle la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular al plano xy y que pasa por el centro de masa.

Solución (a) Consideremos primero el eje que pasa por m_1 . Para las masas puntuales, m_1 está sobre el eje, de modo que $r_1 = 0$ y m_1 no contribuye a la inercia de rotación. Las distancias desde este eje a m_2 y m_3 son $r_2 = 3.0$ m y $r_3 = 4.0$ m. La inercia de rotación en torno al eje que pasa por m_1 es, entonces,

$$I_1 = \sum m_i r_i^2 = (2.3 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(4.0 \text{ m})^2 = 52.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

De manera similar, para el eje que pasa por m_2 , tenemos

$$I_2 = \sum m_i r_i^2 = (2.3 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(5.0 \text{ m})^2 = 58.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Para el eje que pasa por m_3 ,

$$I_3 = \sum m_i r_i^2 = (2.3 \text{ kg})(4.0 \text{ m})^2 + (3.2 \text{ kg})(5.0 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 = 116.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

¿Alrededor de qué eje requieren las rotaciones el mayor esfuerzo? ¿El menor?

(b) Primero, debemos localizar el centro de masa:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (3.2 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (1.5 \text{ kg})(4.0 \text{ m})}{2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg}} = 0.86 \text{ m},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(2.3 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (3.2 \text{ kg})(3.0 \text{ m}) + (1.5 \text{ kg})(0 \text{ m})}{2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg}} = 1.37 \text{ m}.$$

Las distancias elevadas al cuadrado desde el centro de masa a cada una de las partículas son

$$r_1^2 = x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2 = (0.86 \text{ m})^2 + (1.37 \text{ m})^2 = 2.62 \text{ m}^2,$$

$$r_2^2 = x_{\text{cm}}^2 + (y_2 - y_{\text{cm}})^2 = (0.86 \text{ m})^2 + (3.0 \text{ m} - 1.37 \text{ m})^2 = 3.40 \text{ m}^2,$$

$$r_3^2 = (x_3 - x_{\text{cm}})^2 + y_{\text{cm}}^2 = (4.0 \text{ m} - 0.86 \text{ m})^2 + (1.37 \text{ m})^2 = 11.74 \text{ m}^2.$$

La inercia de rotación se deduce entonces directamente:

$$I_{\text{cm}} = \sum m_i r_i^2 = (2.3 \text{ kg})(2.62 \text{ m}^2) + (3.2 \text{ kg})(3.40 \text{ m}^2) + (1.5 \text{ kg})(11.74 \text{ m}^2) = 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

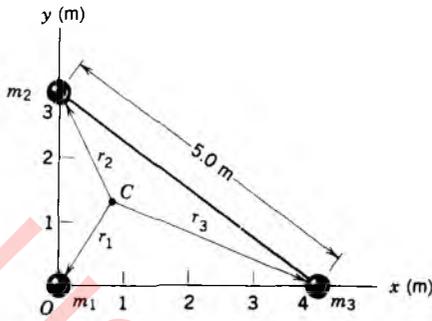


Figura 3 Problema muestra 1. El punto C marca el centro de masa del sistema que consta de las tres partículas.

Nótese que la inercia de rotación en torno al centro de masa es la más pequeña de las que hemos calculado. Este es un resultado general, el cual probaremos más adelante. Es más fácil hacer girar a un cuerpo alrededor de un eje que pase por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo.

El resultado del problema muestra anterior nos conduce a un resultado general importante, el *teorema de los ejes paralelos*:

La inercia de rotación de cualquier cuerpo en torno a un eje arbitrario es igual a la inercia de rotación alrededor de un eje paralelo que pase por el centro de masa más la masa total por la distancia entre los dos ejes elevada al cuadrado.

Matemáticamente, el teorema con ejes paralelos tiene la forma siguiente:

$$I = I_{cm} + Mh^2, \quad (4)$$

donde I es la inercia de rotación alrededor del eje arbitrario, I_{cm} es la inercia de rotación alrededor del eje paralelo que pasa por el centro de masa, M es la masa total del objeto, y h es la distancia perpendicular entre los ejes. Nótese que los dos ejes deben ser paralelos.

Antes de probar el teorema de los ejes paralelos, demos-tremos cómo podríamos haberlo usado para obtener los resultados del problema muestra previo. Comenzaremos con la inercia de rotación en torno al centro de masa, que hemos hallado en la parte (b): $I_{cm} = 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La distancia h entre el eje que pasa por el centro de masa y el eje que pasa por m_1 es, precisamente, r_1 , la cual calculamos en la parte (b). Así,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm} + Mh^2 \\ &= 34.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + (2.3 \text{ kg} + 3.2 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg})(2.62 \text{ m})^2 \\ &= 52.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

en concordancia con el resultado de la parte (a). Será conveniente que compruebe que I_2 e I_3 se verifican de la misma manera.

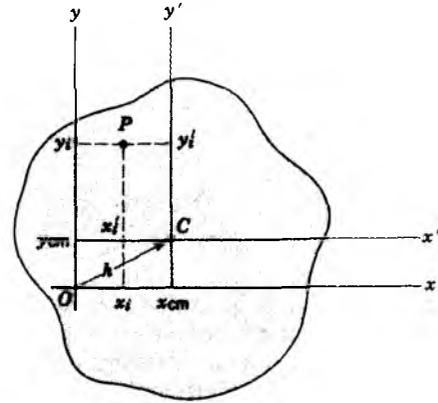


Figura 4 Una placa delgada en el plano xy va a girar en torno al eje z , que es perpendicular a la página en el origen O . El punto C marca el centro de masa de la placa. Una partícula P está situada en las coordenadas x_i, y_i respecto al origen O y en las coordenadas x'_i, y'_i respecto al centro de masa C .

El teorema los ejes paralelos tiene un corolario importante: puesto que el término Mh^2 es siempre positivo, I_{cm} es siempre la inercia de rotación más pequeña de cualquier grupo de ejes paralelos. (Puede no ser la inercia de rotación más pequeña absoluta del objeto; un eje que apunte en una dirección diferente puede dar un valor más pequeño.) Así, para rotaciones en un plano dado y con una velocidad angular dada, la elección de un eje que pase por el centro de masa cuesta la menor cantidad de energía (porque $K = \frac{1}{2}I\omega^2$).

Demostración del teorema de los ejes paralelos

La figura 4 muestra una placa delgada en el plano xy , que puede considerarse como un conjunto de partículas. Deseamos calcular la inercia de rotación de este objeto alrededor del eje z , que pasa por el origen O en la figura 4, en ángulo recto con el plano de esa figura. Representamos a cada partícula de la placa por su masa m_i , sus coordenadas x_i y y_i con respecto al origen O , y sus coordenadas x'_i y y'_i con respecto al centro de masa C . La inercia de rotación alrededor de un eje que pase por O es

$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Con relación a O , el centro de masa tiene las coordenadas x_{cm} y y_{cm} , y de la geometría de la figura 4 podemos ver que las relaciones entre las coordenadas x_i, y_i y x'_i, y'_i son $x_i = x'_i + x_{cm}$ y $y_i = y'_i + y_{cm}$. Sustituyendo estas transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i [(x'_i + x_{cm})^2 + (y'_i + y_{cm})^2] \\ &= \sum m_i (x_i'^2 + 2x'_i x_{cm} + x_{cm}^2 + y_i'^2 + 2y'_i y_{cm} + y_{cm}^2). \end{aligned}$$

Reagrupando los términos, podemos escribir esto así:

$$I = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_{cm} \sum m_i x'_i + 2y_{cm} \sum m_i y'_i + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \sum m_i.$$

La primera suma de arriba es, precisamente, $I_{cm} = \sum m_i r_i'^2$. Los dos términos siguientes se parecen a las fórmulas usadas para calcular las coordenadas de un centro de masa (Ec. 11 del

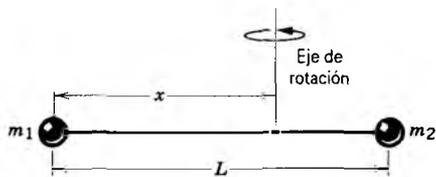


Figura 5 Problema muestra 2. Las dos partículas (el objeto) van a girar en torno a un eje perpendicular a la varilla que las une y a una distancia x de m_1 .

capítulo 9), pero (como lo muestra la Fig. 4) están calculados dentro del sistema del centro de masa. Por ejemplo, $\sum m_i x_i'^2 = Mx_{cm}'^2 = 0$ porque $x_{cm}' = 0$ y similarmente $\sum m_i y_i'^2 = My_{cm}'^2 = 0$: en el sistema de coordenadas del centro de masa, el centro de masa está, por definición, en el origen, por lo que estos términos se anulan. En el último término, h representa la distancia entre el origen O y el centro de masa C , de modo que $h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$; también, $\sum m_i = M$, la masa total. Entonces,

$$I = I_{cm} + Mh^2,$$

lo cual demuestra el teorema de los ejes paralelos. ■

Problema muestra 2 El objeto mostrado en la figura 5 consta de dos partículas, de masas m_1 y m_2 , unidas por una varilla rígida de longitud L . (a) Despreciando la masa de la varilla, halle la inercia de rotación I de este sistema para las rotaciones de este objeto alrededor de un eje perpendicular a la varilla y a una distancia x de m_1 . (b) Demuestre que I es mínima cuando $x = x_{cm}$.

Solución (a) Según la ecuación 2, obtenemos

$$I = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2.$$

(b) Hallamos el valor mínimo de I haciendo que dI/dx sea igual a 0;

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1 x + 2m_2 (L - x)(-1) = 0.$$

Resolviendo, hallamos el valor de x para el cual tenemos este mínimo:

$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Esta es idéntica a la expresión para el centro de masa del objeto, y por lo tanto, la inercia de rotación alcanza su valor mínimo en $x = x_{cm}$. Esto es consistente con el teorema de los ejes paralelos, el cual exige que I_{cm} sea la inercia de rotación más pequeña entre ejes paralelos.

Los puntos para los cuales la primera derivada de una función es igual a cero pueden no ser todos mínimos de la función. ¿Puede usted demostrar, mediante la segunda derivada, que hemos hallado realmente un mínimo de I ?

12-3 INERCIA DE ROTACIÓN DE LOS CUERPOS SÓLIDOS

Si consideramos a un cuerpo como hecho de un número de partículas discretas, podemos calcular su inercia de

rotación en torno a cualquier eje a partir de la ecuación 2, en la cual la suma se toma sobre todas las partículas. Sin embargo, si lo vemos como una distribución continua de materia, podemos imaginarlo dividido en un gran número de pequeños elementos de masa δm_i . Cada δm_i está ubicado a determinada distancia r_i perpendicular al eje de rotación. Considerando a cada δm_i aproximadamente como una masa puntual, podemos calcular la inercia de rotación de acuerdo con la ecuación 2:

Pronto consideraremos a ésta como el límite de δm_i infinitesimalmente pequeño, de modo que la suma se convierta en una integral. Por ahora, ilustremos la transición al cálculo integral usando la ecuación 5 para aproximar la inercia de rotación de una barra uniforme sólida que gira en torno a un eje perpendicular a la barra en su punto medio. La figura 6a ilustra la situación. La barra tiene una longitud L y una masa M . Imaginemos que la barra está dividida en 10 trozos, cada uno de longitud $L/10$ y de masa $M/10$. Los trozos están numerados de $i = 1$ a $i = 10$, de modo que el i ésimo está a una distancia r_i del eje; para este cálculo, hacemos que r_i esté medido desde el eje al centro del trozo. Entonces, los trozos de cada extremo tienen $r_1 = r_{10} = 0.45L$; los trozos próximos a los extremos tienen $r_2 = r_9 = 0.35L$, y los trozos más cercanos al eje tienen $r_5 = r_6 = 0.05L$. Ahora llevamos a cabo la suma para los 10 trozos de acuerdo con la ecuación 5:

$$\begin{aligned} I &= r_1^2 \delta m_1 + r_2^2 \delta m_2 + \cdots + r_{10}^2 \delta m_{10} \\ &= (0.1M)(0.45L)^2 + (0.1M)(0.35L)^2 + (0.1M)(0.25L)^2 \\ &\quad + (0.1M)(0.15L)^2 + (0.1M)(0.05L)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

donde en la segunda ecuación los cinco términos listados corresponden a la mitad de la barra, y \cdots significa que tenemos cinco términos idénticos de la otra mitad. Evaluando los factores numéricos, obtenemos el resultado

$$I = 0.825ML^2 = \frac{1}{12.12}ML^2 \quad (10 \text{ trozos}).$$

Nuestro motivo para escribir el resultado de esta manera no tardará en ser evidente.

Supongamos ahora que dividimos la barra en 20 trozos, cada uno de ellos con una longitud de $L/20$ y masa $M/20$ (Fig. 6b). Repitiendo el cálculo anterior, obtenemos el resultado

$$I = 0.831ML^2 = \frac{1}{12.03}ML^2 \quad (20 \text{ trozos}).$$

A medida que aumentemos el número de trozos, ¿tiene el resultado a un valor límite que podamos ver como la inercia de rotación? En el problema 12, se le pidió a usted derivar el resultado para cualquier número N arbitrario de trozos:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \left(\frac{N^2 - 1}{N^2} \right) \quad (N \text{ trozos}). \quad (6)$$

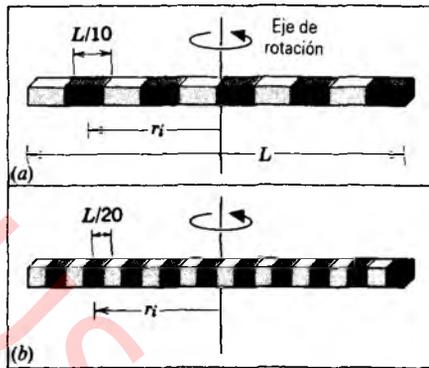


Figura 6 (a) La inercia de rotación de una barra sólida de longitud L , que gira en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud, puede calcularse aproximadamente dividiendo la barra en 10 trozos iguales, cada uno de longitud $L/10$. Cada trozo es tratado como una masa puntual a una distancia r_i del eje. (b) Se obtiene una aproximación más precisa a la inercia de rotación de la barra dividiéndola en 20 trozos.

Claramente, esto tiende al límite de $ML^2/12$ cuando $N \rightarrow \infty$, y podemos señalarlo como el valor de la inercia de rotación de la barra. Nótese que los coeficientes numéricos para $N = 10$ ($\frac{1}{12.12}$) y $N = 20$ ($\frac{1}{12.03}$) demuestran la tendencia al límite ($\frac{1}{12}$) si $N \rightarrow \infty$.

El método algebraico anterior opera fácilmente en unos cuantos casos, y ayuda a formarnos una imagen de cómo el cálculo integral divide a un objeto sólido en trozos infinitesimales y suma a todos los trozos. En los cálculos que intervienen para la mayoría de los sólidos, el método algebraico es engorroso, siendo mucho más fácil usar las técnicas de cálculo directamente. Consideremos al límite de la ecuación 5 cuando el número de trozos es demasiado grande o, equivalentemente, cuando sus masas δm se vuelven muy pequeñas:

$$I = \lim_{\delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \delta m_i,$$

y, de la manera usual, la suma resulta ser una integral en el límite:

$$I = \int r^2 dm. \quad (7)$$

La integración se lleva a cabo sobre todo el volumen del objeto, pero a menudo ciertas simplificaciones geométricas pueden reducir la integral a términos más manejables.

Como ejemplo, regresemos a la barra que giraba en torno a un eje que pasa por su centro. La figura 7 muestra el problema trazado para el enfoque integral. Elegimos a un elemento *arbitrario* de masa dm situado a una distancia x del eje. (Usamos a x como la variable de la integración.) La masa de este elemento es igual a su densidad ρ (masa por unidad de volumen) o por el ele-

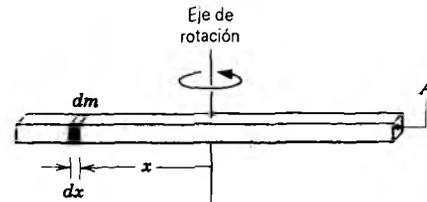


Figura 7 La inercia de rotación de una barra sólida se calcula integrando a lo largo de su longitud. Un elemento de masa dm está ubicado a una distancia x perpendicular al eje de rotación.

mento de volumen dV . El elemento de volumen es igual al área multiplicada por su espesor dx :

$$dV = A dx$$

$$dm = \rho dV = \rho A dx.$$

Suponemos que la barra tiene una sección transversal uniforme de área A y una densidad ρ uniforme, siendo ésta igual a la masa total M dividida entre el volumen total AL : $\rho = M/V = M/AL$. Evaluando la ecuación 7, obtenemos

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 \frac{M}{AL} A dx = \frac{M}{L} \int x^2 dx.$$

Con $x = 0$ en el punto medio de la barra, los límites de la integración van desde $x = -L/2$ hasta $x = +L/2$. La inercia de rotación es, entonces,

$$I = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{+L/2} \\ I = \frac{1}{12} ML^2. \quad (8)$$

Este resultado es idéntico al deducido del método algebraico, ecuación 6, en el límite $N \rightarrow \infty$.

Si deseamos girar a la barra en torno a un eje que pase por un extremo perpendicular a su longitud, podemos usar el teorema de los ejes paralelos (Ec. 4). Ya hemos hallado a I_{cm} , y la distancia h entre los ejes paralelos es precisamente la mitad de la longitud, de modo que

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2.$$

A menudo podemos calcular la inercia de rotación de un cuerpo sólido descomponiéndolo en elementos de inercia de rotación conocida. Por ejemplo, supongamos que tenemos una placa rectangular sólida y uniforme de longitud a y de anchura b , como se muestra en la figura 8. Deseamos calcular la inercia de rotación en torno a un eje perpendicular a la placa y que pase por su centro.

La placa puede ser dividida en una serie de fajas, cada una de las cuales va a ser considerada como una barra. Consideremos la faja de masa dm , longitud a , y anchura dx mostrada en la figura 8. La masa dm de la faja se relaciona con la masa

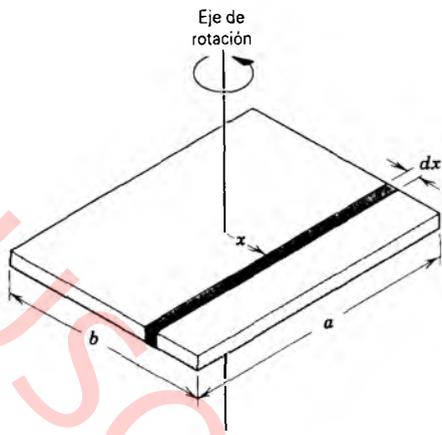


Figura 8 Una placa rectangular sólida de lados a y b se hace girar en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Para calcular la inercia de rotación, consideramos que la placa está dividida en fajas. La faja sombreada puede ser considerada como una barra, cuya inercia de rotación en torno al eje central puede hallarse usando el teorema de los ejes paralelos.

total M como el área de la superficie de la faja ($a dx$) se relaciona con el área ab de toda la superficie:

$$\frac{dm}{M} = \frac{a dx}{ab} = \frac{dx}{b}$$

$$dm = \frac{M}{b} dx.$$

La inercia de rotación dI de la faja en torno al eje se relaciona, según el teorema de los ejes paralelos, con la inercia de rotación de la faja (vista como una barra) en torno a su centro de masa, dado por la ecuación 8 como $dI_{cm} = \frac{1}{12} dm a^2$;

$$dI = dI_{cm} + dm h^2$$

$$= \frac{1}{12} dm a^2 + dm x^2.$$

Sustituyendo a dm nos da

$$dI = \frac{Ma^2}{12b} dx + \frac{M}{b} x^2 dx,$$

e I se deduce de la integral

$$I = \int dI = \frac{Ma^2}{12b} \int dx + \frac{M}{b} \int x^2 dx.$$

Los límites de la integración sobre x van desde $-b/2$ hasta $+b/2$. Llevando a cabo las integraciones, obtenemos

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2). \quad (9)$$

Nótese que este resultado es independiente del espesor de la placa: obtendríamos el mismo resultado para un montón de placas de masa total M o, de manera equivalente,

para un bloque rectangular sólido de las mismas dimensiones superficiales. Nótese también que nuestro resultado depende de la diagonal de la placa más bien que de a y b por separado. ¿Puede usted explicar esto?

Operando de este modo, podemos evaluar la inercia de rotación de casi cualquier objeto sólido regular. La figura 9 muestra algunos objetos comunes y sus inercias de rotación. Aunque es relativamente sencillo usar integrales bidimensionales o tridimensionales para calcular estas inercias de rotación, a menudo es posible, como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponer a un sólido complejo en sólidos más sencillos de inercias de rotación conocidas. El problema 14 al final del capítulo describe un cálculo al respecto para una esfera sólida.

12-4 TORCA QUE ACTÚA SOBRE UNA PARTÍCULA

La experiencia con una puerta pesada nos enseña que una fuerza dada puede producir varias aceleraciones angulares dependiendo de dónde se aplique la fuerza a la puerta y de cómo aquella esté dirigida (véase la Fig. 10). Una fuerza (tal como F_1) aplicada al borde y dirigida a lo largo de la puerta no puede producir una aceleración angular, como tampoco lo puede hacer una fuerza (tal como F_2) aplicada a lo largo del gozne de la puerta; pero una fuerza (tal como F_3) aplicada en ángulo recto con la puerta en su borde exterior produce la mayor aceleración angular.

El análogo de la rotación de la fuerza se llama *torca*. Lo definiremos ahora para el caso especial de una partícula aislada observada desde un marco de referencia inercial. Más adelante extenderemos el concepto de torca a sistemas de partículas (incluyendo a cuerpos rígidos) y demostraremos que la torca está íntimamente asociada a la aceleración angular.

Sea F una fuerza que actúa sobre una partícula aislada en un punto P cuya posición en torno al origen O del marco de referencia inercial está dado por el vector r (Fig. 11). Puesto que dos vectores determinan un plano, hemos elegido el plano xy para que contenga a los vectores r y F . La torca τ que actúa sobre la partícula *con respecto al origen O* se define en términos del producto vectorial (producto cruz) de r y F así:

$$\tau = r \times F. \quad (10)$$

La torca es una cantidad vectorial. Su magnitud está dada por

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (11)$$

donde θ es el ángulo entre r y F ; su dirección es normal al plano formado por r y F (esto es, paralela al eje z

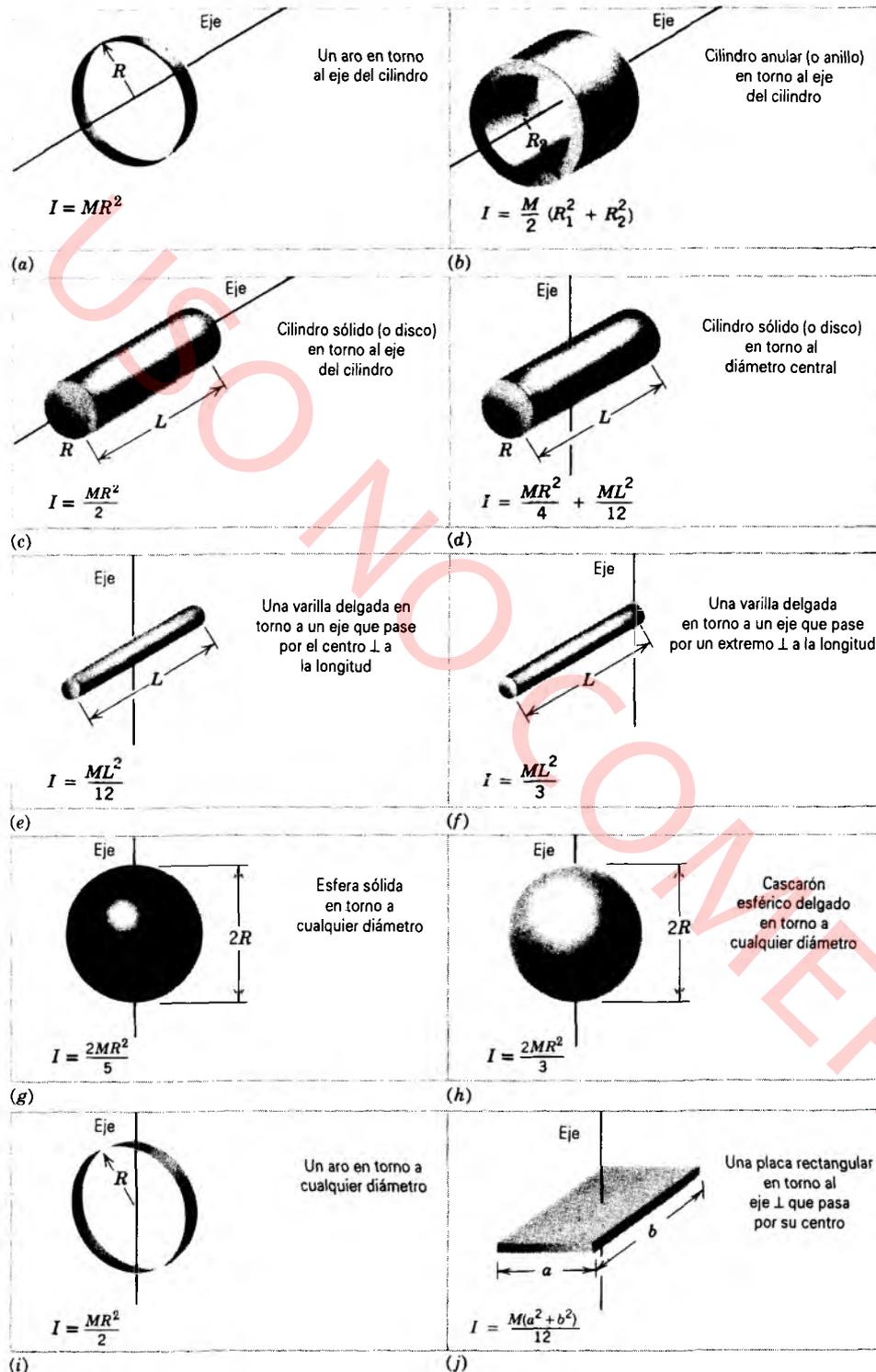


Figura 9 La inercia de rotación de varios sólidos en torno a ejes elegidos.

cuando \mathbf{r} y \mathbf{F} están en el plano xy), dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial de dos vectores: si usted hace girar a \mathbf{r} sobre \mathbf{F} (cuando están trazados cola con cola) a través del ángulo más pequeño entre ellos con los dedos de su mano derecha doblados, entonces la dirección del pulgar extendido da la dirección de $\boldsymbol{\tau}$. (Sin

duda querrá usted revisar la definición del producto vectorial (producto cruz) en la sección 3-5.)

Hemos trazado el vector torca en la figura 11 de modo que pase a través del origen, pero no es necesario hacerlo. Si \mathbf{r} y \mathbf{F} están en el plano xy , como hemos supuesto, entonces la ecuación 10 requiere solamente que el produc-

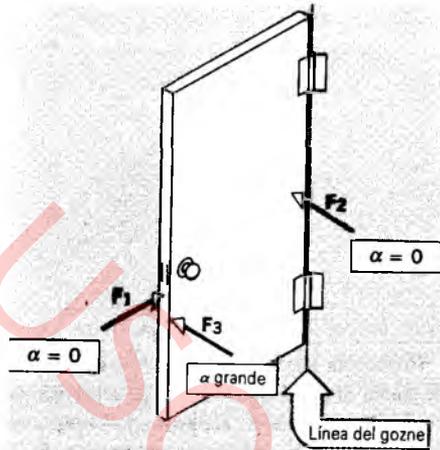


Figura 10 Al aplicar una fuerza F dada a una puerta se produce una aceleración angular α que varía con el punto en el que F se aplique y con su dirección respecto a la línea del gozne. La fuerza F_1 está aplicada a lo largo de una línea que pasaría por la línea del gozne, y no produce ninguna aceleración angular (la puerta no se mueve). La fuerza F_2 se halla aplicada a la línea del gozne; tampoco produce ninguna aceleración angular. La fuerza F_3 se halla aplicada a un punto alejado de la línea del gozne y en una dirección perpendicular a la línea que une al punto de aplicación de F_3 con la línea del gozne; esta fuerza produce la mayor aceleración angular posible.

to cruz τ sea *paralelo* al eje z , no necesariamente *a lo largo* del eje z . Podríamos situar al vector τ en cualquier punto en la coordenada del espacio de la figura 11 sin cambiar la validez de la ecuación 10, siempre y cuando τ permanezca paralelo al eje z .

La torca tiene las dimensiones de fuerza multiplicada por distancia; en términos de nuestras dimensiones fundamentales M , L , y T , tiene las dimensiones ML^2T^{-2} . Éstas son las mismas que las dimensiones del trabajo. Sin embargo, la torca y el trabajo son cantidades físicas muy diferentes. Por ejemplo, la torca es un vector, y el trabajo es un escalar. La unidad para la torca puede ser el newton-metro ($N \cdot m$) o la libra-pie ($lb \cdot ft$), entre otras posibilidades. (Aunque $1 N \cdot m = 1 J$, no expresamos la torca en unidades de J .)

Nótese de la ecuación 10 que la torca producida por una fuerza depende no solamente de la magnitud y de la dirección de ésta fuerza sino también del punto de aplicación de la fuerza respecto al origen, esto es, del vector r . En particular, cuando la partícula P de la figura 11 está en el origen, r es cero y la torca τ con respecto al origen es cero. La torca con respecto a un punto O' a medio camino entre O y P es un vector (que puede ser trazado en O') paralelo al vector τ mostrado en la figura 11 pero a la mitad de su longitud.

Podemos también escribir la magnitud de τ (Ec. 11) ya sea como

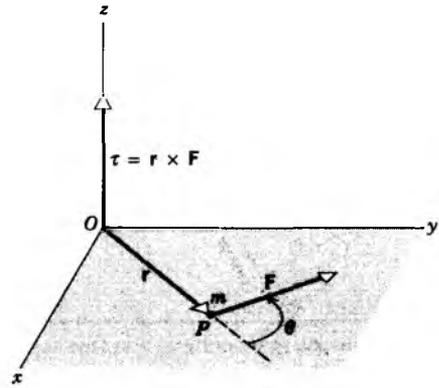


Figura 11 Una fuerza F actúa sobre una partícula de masa m situada en la posición r en el plano xy . Esta fuerza ejerce una torca $\tau = r \times F$ sobre la partícula con respecto al origen O . El vector torca apunta en la dirección de z creciente; podría estar trazado en cualquier lugar que escojamos, siempre y cuando sea paralelo al eje z .

$$\tau = (r \text{ sen } \theta)F = Fr_{\perp}, \quad (12a)$$

o como

$$\tau = r(F \text{ sen } \theta) = rF_{\perp}, \quad (12b)$$

donde, como lo muestra la figura 12, $r_{\perp} (= r \text{ sen } \theta)$ es la componente de r en ángulo recto con la línea a lo largo de la cual actúa F (llamada la *línea de acción* de F), y $F_{\perp} (= F \text{ sen } \theta)$ es la componente de F en ángulo recto con r . La torca se llama a menudo *momento de la fuerza*, y r_{\perp} en la ecuación 12a se denomina el *brazo del momento*. La ecuación 12b muestra que sólo la componente de F perpendicular a r contribuye a la torca. En particular, cuando θ es igual a 0° o a 180° , no existe una componente perpendicular ($F_{\perp} = F \text{ sen } \theta = 0$); la línea de acción de la fuerza pasa a través del origen, y el brazo del momento r_{\perp} con respecto al origen es también cero. En este caso, tanto la ecuación 12a como la ecuación 12b muestra que la torca τ es cero.

Problema muestra 3 Un péndulo consta de un cuerpo de masa $m = 0.17 \text{ kg}$ en el extremo de una varilla rígida de longitud $L = 1.25 \text{ m}$ y masa despreciable (Fig. 13). (a) ¿Cuál es la magnitud de la torca debida a la gravedad en torno al punto de pivoteo O en el instante en que el péndulo se desplaza como se muestra a través de un ángulo de $\theta = 10^\circ$ de la vertical? (b) ¿Cuál es la dirección de la torca en torno a O en ese instante? ¿Depende su dirección de que el péndulo se desplace hacia la izquierda o hacia la derecha de la vertical?

Solución (a) Podemos usar la ecuación 11 directamente para hallar la magnitud de la torca, siendo $r = L$ y $F = mg$:

$$\begin{aligned} \tau &= Lmg \text{ sen } \theta = (1.25 \text{ m})(0.17 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 10^\circ) \\ &= 0.36 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

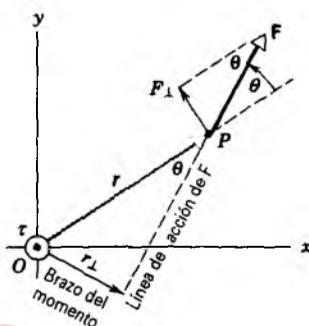


Figura 12 El plano xy , que contiene a la fuerza \mathbf{F} y al vector de posición \mathbf{r} de la figura 11. La magnitud de τ está dada por $F r_{\perp}$ (Ec. 12a) o por $r F_{\perp}$ (Ec. 12b). La dirección de τ (hacia afuera de la página) se indica en la figura por el signo \odot (que sugiere la punta de una flecha).

(b) Con el desplazamiento como se muestra en la figura 13, la torca alrededor del punto de pivoteo está en el plano del papel. Conviene estar convencido aquí de que, si el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca tiene la dirección opuesta. Como lo veremos en la próxima sección, el efecto de una torca es producir una aceleración angular paralela. En el primer caso, la aceleración angular hacia el papel tiende a mover al péndulo hacia su posición de equilibrio. Cuando el péndulo se desplaza hacia el lado opuesto de la vertical, la torca hacia afuera del papel tiende otra vez a restituir al péndulo en su posición de equilibrio. Compruebe estas conclusiones usando la regla de la mano derecha para relacionar el sentido de la rotación en la dirección del vector de la aceleración angular (supuesto como paralelo a la torca).

12-5 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

En el movimiento de traslación, las técnicas que implican trabajo y energía nos ofrecen una forma diferente y a veces más ilustrativa de enfocar los problemas. En esta sección consideraremos el uso del trabajo y la energía en el movimiento de rotación.

Supongamos que un cuerpo rígido arbitrario pivotea alrededor del eje z . Se aplica al cuerpo una fuerza externa \mathbf{F} que actúe en una dirección arbitraria en algún punto P del plano xy . La figura 14 muestra a la fuerza \mathbf{F} y al punto P , omitiéndose el resto del cuerpo para mayor claridad. Consideraremos el trabajo dW efectuado por esta fuerza cuando el cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

El punto P , que está a una distancia r del eje de rotación, se mueve a lo largo de la distancia $ds \approx r d\phi$ cuando el cuerpo gira en el ángulo $d\phi$. El trabajo dW puede, entonces, expresarse así:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (13)$$

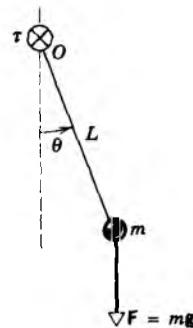


Figura 13 Problema muestra 3. Un péndulo, que consta de un cuerpo de masa m en el extremo de una varilla rígida carente de masa de longitud L . La gravedad ejerce una torca sobre la página en O , indicado aquí por el símbolo \otimes (que sugiere la cola de una flecha).

donde $d\mathbf{s}$ es un vector de magnitud ds en la dirección del movimiento de P .

La componente z de \mathbf{F} no contribuye al producto punto en la ecuación 13, porque $d\mathbf{s}$ no tiene una componente z . (Recuérdese de la ecuación 15 del capítulo 3 que el producto punto de \mathbf{F} y $d\mathbf{s}$ puede ser escrito $F_x dx + F_y dy + F_z dz$. En nuestro caso, $dz = 0$, de modo que el producto punto no depende de la componente F_z). En los casos en que la dirección del eje de rotación sea fijo, necesitamos considerar solamente las componentes de la fuerza que están en el plano perpendicular al eje.

La figura 15 muestra el movimiento del punto P durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt . Sobre el cuerpo actúa una fuerza externa, que ahora se supone está enteramente en el plano xy , en el punto P . El trabajo dW efectuado por esta fuerza durante esta rotación infinitesimal es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \theta ds = (F \cos \theta)(r d\phi).$$

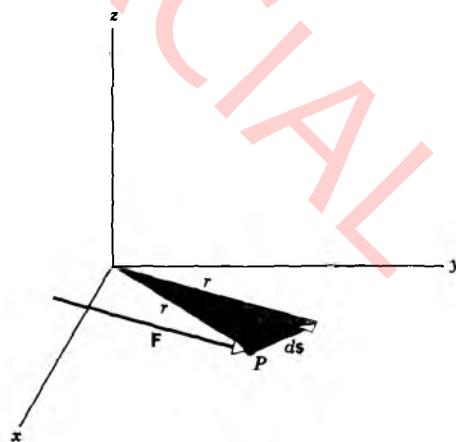


Figura 14 Una fuerza externa \mathbf{F} actúa en el punto P de un cuerpo rígido (no mostrado) obligado a girar en torno al eje z . El cuerpo gira en un ángulo $d\phi$.

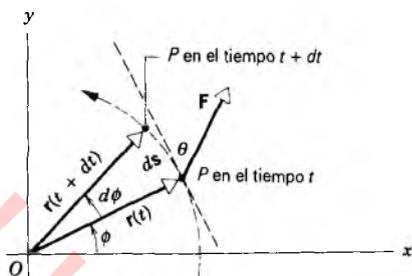


Figura 15 En un tiempo dt , el punto P de un cuerpo rígido se mueve una distancia ds a lo largo del arco de un círculo de radio r . El cuerpo rígido (que no aparece en la figura) y el vector r que localiza al punto P en el cuerpo giran cada uno en un ángulo $d\phi$ durante este intervalo.

El término $F \cos \theta$ es la componente de \mathbf{F} en la dirección de ds ; es, por lo tanto, perpendicular a r y puede ser representada como F_{\perp} . De acuerdo con la ecuación 12b, $F_{\perp} r$ es la magnitud de la torca instantánea ejercida por \mathbf{F} sobre el cuerpo rígido alrededor del eje perpendicular a la página que pasa por O , de modo que la ecuación anterior se convierte en

$$dW = F_{\perp} r d\phi = \tau d\phi. \quad (14)$$

Esta expresión para el trabajo efectuado en la rotación (en torno a un eje fijo) es equivalente a la expresión $dW = F dx$ para el trabajo efectuado en la traslación (a lo largo de una línea recta).

Supongamos ahora que varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, se aplican a diferentes puntos del cuerpo en el plano normal a su eje de rotación (el plano xy de la Fig. 15). El trabajo neto efectuado por estas fuerzas sobre el cuerpo en una rotación $d\phi$ es

$$\begin{aligned} dW_{\text{neto}} &= (F_1 \cos \theta_1) r_1 d\phi + (F_2 \cos \theta_2) r_2 d\phi + \dots \\ &= (\tau_1 + \tau_2 + \dots) d\phi, \end{aligned}$$

donde $(F_i \cos \theta_i) r_i$ da la componente de la torca τ_i con respecto a O . Nótese que, como debe suceder para un cuerpo rígido en rotación pura, suponemos que $d\phi$ es el desplazamiento angular de cualquier punto del cuerpo durante el intervalo de tiempo dt , sin importar dónde esté situado el punto en el cuerpo. Podemos escribir esto así:

$$dW_{\text{neto}} = \left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) d\phi = \left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) \omega dt, \quad (15)$$

donde en el último resultado hemos usado $d\phi = \omega dt$ de la ecuación 3 del capítulo 11. Aquí $\sum \tau_{\text{ext}}$ representa la torca externa total que actúa sobre el cuerpo, la cual se calcula considerando a cada torca externa como positiva en caso de que, al actuar aisladamente, tienda a girar al cuerpo en sentido contrario a las manecillas del reloj (aumentando

ϕ , por lo tanto) y como negativa si tiende a girar al cuerpo en el sentido de las manecillas.

Durante el intervalo de tiempo dt , la energía cinética del cuerpo cambia en una cantidad dK como resultado de la acción de las fuerzas externas. Suponemos que la energía cinética de rotación es la única forma de energía que el cuerpo puede contener. Usando la ecuación 3, $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, hallamos que

$$dK = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega d\omega = I \omega \alpha dt, \quad (16)$$

usando $d\omega = \alpha dt$ de la ecuación 5 del capítulo 11.

Durante el intervalo dt , el teorema trabajo energía da

$$dW = dK, \quad (17)$$

y sustituyendo en las ecuaciones 15 y 16 nos da

$$\left(\sum \tau_{\text{ext}} \right) \omega dt = I \omega \alpha dt,$$

o, cancelando los factores comunes de ωdt ,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I \alpha. \quad (18)$$

La ecuación 18 es el análogo de la rotación de la segunda ley de Newton en la forma escalar de $\sum F_{\text{ext}} = ma$, correspondiente al movimiento en una dimensión. En el caso de la rotación, es preciso advertir, una vez más, que nos ocupamos solamente de la rotación alrededor de un eje fijo. Es más, obsérvese que una torca positiva tiende a producir una aceleración angular positiva; esto es, la misma regla de la mano derecha usada para obtener el signo de α puede utilizarse para determinar el signo de τ . Como hicimos en el caso de la dinámica de la traslación, abandonamos el subíndice "ext" de τ para mayor conveniencia.

Para obtener la razón a la cual se efectúa el trabajo en el movimiento de rotación (alrededor de un eje fijo), dividimos la ecuación 14 entre el intervalo de tiempo infinitesimal dt durante el cual se desplaza el cuerpo por $d\phi$ y obtenemos

$$P = \tau \omega, \quad (19)$$

que da la potencia mecánica instantánea P . La ecuación 19 es el análogo de rotación de $P = Fv$ para el movimiento de traslación.

La analogía entre el movimiento de traslación en una dirección fija y el movimiento de rotación en torno a un eje fijo queda puesto de relieve en la tabla 1, la cual compara las ecuaciones correspondientes en los dos casos. La rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo no es la clase de movimiento de rotación más general; a menudo el eje no está fijo en un marco de referencia inercial. En el capítulo 13 consideraremos este caso más general, junto con el ímpetu angular que aparece listado en la última línea de la tabla 1 de ese mismo capítulo.

TABLA 1 COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA LINEAL Y DE ROTACIÓN

Movimiento lineal		Rotación en torno a un eje fijo	
Desplazamiento	x	Desplazamiento angular	ϕ
Velocidad	$v = dx/dt$	Velocidad angular	$\omega = d\phi/dt$
Aceleración	$a = dv/dt$	Aceleración angular	$\alpha = d\omega/dt$
Masa (inercia de traslación)	M	Inercia de rotación	I
Fuerza	$F = Ma$	Torca	$\tau = I\alpha$
Trabajo	$W = \int F dx$	Trabajo	$W = \int \tau d\phi$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2}Mv^2$	Energía cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potencia	$P = Fv$	Potencia	$P = \tau\omega$
Ímpetu lineal	$p = Mv$	Ímpetu angular†	$L = I\omega$

† El ímpetu angular se discute en el capítulo 13.

Dada la relación dinámica entre la torca y la aceleración angular, podemos ahora reconsiderar el efecto de una torca arbitraria sobre un cuerpo rígido obligado a girar en torno al eje z . Permitamos una vez más que la fuerza tenga una dirección arbitraria, como se muestra en la figura 16. La torca debida a esa fuerza, dada por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, está en una dirección perpendicular al plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{F} . Podemos resolver a τ en sus componentes x , y , y z , como se muestra en la figura 16. Cada componente de la torca tiende a producir una rotación en torno a su eje correspondiente. Sin embargo, hemos supuesto que el cuerpo está fijo de modo tal que sólo sea posible la rotación en torno al eje z . Las componentes x y y de la torca no producen un movimiento. En este caso, las chumaceras sirven para

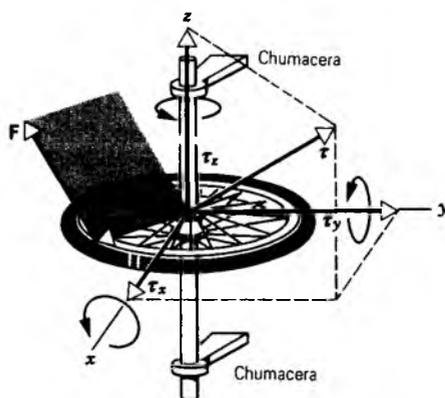


Figura 16 Un cuerpo rígido, en este caso una rueda, está libre para girar en torno al eje z . Una fuerza arbitraria \mathbf{F} , que actúa en un punto de la llanta, puede producir componentes de la torca a lo largo de los tres ejes de coordenadas. Solamente la componente z puede hacer girar a la rueda. Las componentes x y y de la torca tenderían a desviar al eje de rotación alejándolo del eje z . A esta tendencia deben oponerse torcas iguales y opuestas (no mostradas) ejercidas por las chumaceras, que mantienen al eje en una dirección fija.

obligar al sistema a girar en torno al eje z únicamente, y por lo tanto deben procurarse torcas que cancelen a las componentes x y y de la torca de la fuerza aplicada. Esto indica lo que se entiende por un cuerpo que está obligado a moverse en torno a un eje fijo: únicamente las componentes de la torca paralelas a ese eje son eficaces para hacer girar al cuerpo y se supone que las componentes de la torca perpendiculares al eje están balanceadas por otras partes del sistema. Las chumaceras *deben* ejercer torcas con componentes x y y que mantengan fija la dirección del eje de rotación; las chumaceras *pueden* también proporcionar una torca en la dirección z , como en el caso de chumaceras no ideales que ejerzan fuerzas de fricción sobre el eje de la rueda.

Problema muestra 4 En un parque de diversiones el papá de un niño empuja un tiovivo, ejerciendo una fuerza \mathbf{F} de 115 N de magnitud en un punto P de la periferia situado a una distancia de $r = 1.75$ m del eje de rotación (Fig. 17). La fuerza se ejerce en una dirección que forma un ángulo de 32° debajo de la horizontal, y la componente horizontal de la fuerza está en una dirección de 15° hacia adentro de la tangente en P . Halle la magnitud de la componente de la torca que acelera al tiovivo.

Solución Solamente la componente horizontal de \mathbf{F} produce una torca vertical. Hallemos a F_h , la componente de \mathbf{F} a lo largo de la línea horizontal, perpendicular a \mathbf{r} . La componente horizontal de \mathbf{F} es

$$F_h = F \cos 32^\circ = 97.5 \text{ N.}$$

La componente de F_h perpendicular a \mathbf{r} es

$$F_\perp = F_h \cos 15^\circ = 94.2 \text{ N.}$$

La torca (vertical) a lo largo del eje de rotación es, entonces,

$$\tau = rF_\perp = (1.75 \text{ m})(94.2 \text{ N}) = 165 \text{ N}\cdot\text{m.}$$

La componente de F_h paralela a \mathbf{r} ($= F_h \sin 15^\circ$) no produce torca alguna en torno al eje de rotación, y la componente vertical de \mathbf{F} ($= F \sin 32^\circ$) produce una torca perpendicular al eje que

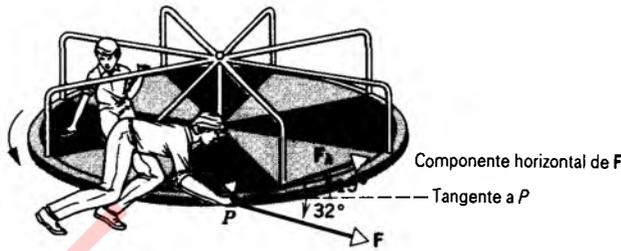


Figura 17 Problema muestra 4. El padre de un niño empuja al tiovivo en un parque de atracciones. El papá está inclinado hacia abajo, de modo que la fuerza tiene una componente hacia abajo. Además, como él está fuera del borde, la fuerza se dirige ligeramente hacia adentro. La componente horizontal de la fuerza, F_h , está en el plano de la plataforma giratoria y forma un ángulo de 15° con la tangente en P , el punto en que se aplica la fuerza.

tendería a ladear la plataforma giratoria afuera del plano horizontal (porque el padre está empujando *hacia abajo* sobre la plataforma) si a esa torca no se le opusiera una torca igual y contraria desde las chumaceras.

El padre debe ejercer una torca que exceda a cualquier torca por fricción proveniente de las chumaceras. Cuando el padre deja de empujar, esta torca por fricción, que ahora actúa sola, hace más lento el giro del tiovivo hasta que consigue frenarlo y llevarlo al reposo.

Problema muestra 5 La figura 18a muestra un disco uniforme de masa $M = 2.5 \text{ kg}$ y radio $R = 20 \text{ cm}$ montado en un eje horizontal fijo (sin fricción). Un bloque de masa $m = 1.2 \text{ kg}$ cuelga de un cordón que pasa alrededor del borde del disco. Halle la aceleración del bloque al caer, la tensión en el cordón, y la aceleración angular del disco.

Solución La figura 18b muestra un diagrama de cuerpo libre para el bloque. El bloque acelera hacia abajo de modo que su peso mg debe exceder la tensión T del cordón. Tomamos como positiva a la dirección hacia abajo y, de la segunda ley de Newton, tenemos

$$\sum F = mg - T = ma.$$

La figura 18c muestra un diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. La única torca τ que actúa sobre el disco, tomada con respecto a su eje de rotación, es TR , y la inercia de rotación del disco es $\frac{1}{2}MR^2$. (Sobre el disco actúan también otras dos fuerzas, su peso y la fuerza hacia arriba que el soporte ejerce sobre el disco. Sin embargo, ambas fuerzas actúan en el eje del disco, de modo que no ejercen torca alguna sobre él.) Aplicando la segunda ley de Newton en la forma angular (Ec. 18), y haciendo que tanto τ como α sean positivas para una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, obtenemos

$$\sum \tau = TR = \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{a}{R} \right).$$

Esto se reduce a

$$T = \frac{1}{2}Ma.$$

Podemos así reemplazar a α por a/R porque el cordón no se desliza, y entonces la aceleración lineal del bloque es igual a la

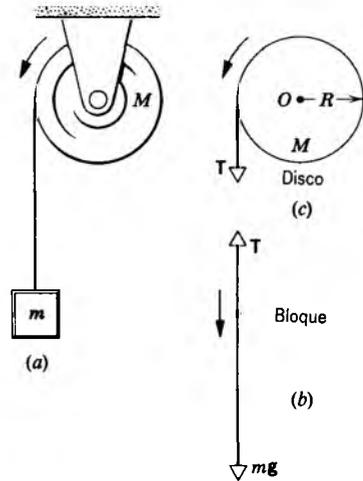


Figura 18 Problema muestra 5. (a) El bloque al caer hace que el disco gire. (b) Diagrama del cuerpo libre para el bloque. (c) Diagrama parcial del cuerpo libre para el disco. Las flechas muestran las direcciones tomadas como positivas.

aceleración lineal del borde del disco. Combinando las dos ecuaciones dinámicas, una para el bloque y la otra para el disco, eliminamos a T para obtener

$$a = g \frac{2m}{M + 2m} = (9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1.2 \text{ kg})}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = 4.8 \text{ m/s}^2,$$

y al eliminar a a de las mismas ecuaciones, obtenemos que

$$T = mg \frac{M}{M + 2m} = (1.2 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{2.5 \text{ kg}}{2.5 \text{ kg} + (2)(1.2 \text{ kg})} = 6.0 \text{ N}.$$

Como lo esperábamos, la aceleración del bloque al caer es menor que g , y la tensión en el cordón ($= 6.0 \text{ N}$) es menor que el peso del bloque colgante ($= mg = 11.8 \text{ N}$). Vemos también que la aceleración del bloque y la tensión dependen de la masa del disco pero no de su radio. A modo de comprobación, observemos que las fórmulas arriba derivadas predicen que $a = g$ y que $T = 0$ para el caso de un disco sin masa ($M = 0$). Esto es lo que esperamos; el bloque simplemente cae como un cuerpo libre, arrastrando al cordón tras de él.

La aceleración angular del disco se deduce de

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{4.8 \text{ m/s}^2}{0.20 \text{ m}} = 24 \text{ rad/s}^2 = 3.8 \text{ rev/s}^2.$$

Problema muestra 6 Reconsidere el problema muestra 5 desde el punto de vista del trabajo y la energía.

Solución Supongamos que el sistema de la figura 18 ha salido del reposo. Lo examinamos más tarde cuando el bloque ha caído una distancia L ; en ese punto el bloque se mueve a una velocidad v , y el disco está girando a una velocidad angular ω . Si el cordón no se desliza sobre el disco, entonces $v = \omega R$; además, cuando el bloque cae una distancia L , el disco debe girar un ángulo ϕ de modo que $L = R\phi$.

Consideramos tres sistemas diferentes:

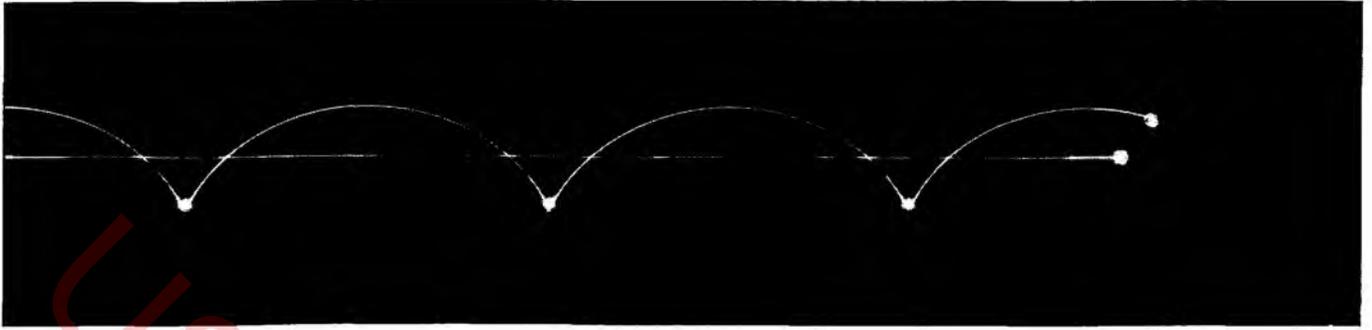


Figura 19 Fotografía con exposición en tiempo prolongado de un disco al girar. Se han fijado pequeñas luces al disco, una en su centro y otra en su borde. Esta última describe una curva llamada *cicloide*.

1. *Sistema = bloque + disco.* La gravedad (la única fuerza externa) efectúa un trabajo externo mgL sobre el sistema al moverse el bloque hacia abajo una distancia L . El trabajo externo neto es, entonces,

$$W_{\text{neto}} = mgL.$$

No existe un trabajo de fricción efectuado en el eje (sin fricción) o entre el cordón y el disco (donde no existe movimiento relacionado).

El cambio en la energía cinética es la energía cinética final, puesto que el sistema fue liberado desde el reposo:

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

El teorema trabajo-energía nos da

$$\begin{aligned} W_{\text{neto}} &= \Delta K \\ mgL &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= 2\left[\frac{2mg}{M+2m}\right]L. \end{aligned}$$

La cantidad entre corchetes es la aceleración que hallamos en el problema muestra 5, de modo que este resultado es, clara y sencillamente, la ya conocida ecuación $v^2 = v_0^2 + 2ax$ para el movimiento lineal con aceleración constante.

2. *Sistema = bloque.* Aquí el trabajo externo sobre el sistema es efectuado por la gravedad y por la tensión en el cordón:

$$W_{\text{neto}} = mgL - TL.$$

El cambio en la energía cinética del sistema (el bloque) es precisamente $\frac{1}{2}mv^2$, y el teorema trabajo-energía nos da

$$mgL - TL = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sustituyendo el resultado anterior para v^2 , podemos demostrar que esto da la tensión hallada en la solución al problema muestra 5.

3. *Sistema = disco.* En este caso, solamente T ejerce un trabajo externo y al usar la ecuación 15 para una rotación en un ángulo total ϕ efectuada por una torca constante TR , obtenemos

$$W_{\text{neto}} = TR\phi = TL,$$

y el cambio en la energía cinética del sistema (el disco) es

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)v^2/R^2 = \frac{1}{4}Mv^2.$$

Al aplicar nuevamente el teorema trabajo-energía, obtenemos

$$TL = \frac{1}{4}Mv^2.$$

Usted puede demostrar fácilmente que este resultado es consistente con los resultados anteriores para v^2 y T .

En cada caso, al definir cuidadosamente al sistema y clasificar las fuerzas y las torcas externas, obtenemos resultados idénticos de los enfoques basados en las leyes de Newton y las consideraciones de la energía.

12-6 MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN Y DE TRASLACIÓN COMBINADOS

El movimiento general de un sistema de partículas comprende tanto **traslación** como **rotación**. Hasta ahora hemos considerado únicamente la rotación pura mediante la cual el eje de rotación está fijo en el marco de referencia inercial elegido. Ahora, generalizaremos un tanto permitiendo que el sistema tenga también un movimiento de traslación. Cuando el centro de masa se mueve a una velocidad de traslación v_{cm} , un observador que vea al sistema desde un marco de referencia inercial que se mueva con esa velocidad verá que el centro de masa está quieto. Para este observador, tendrá todavía aplicación la ecuación básica de la dinámica de la rotación (Ec. 18, $\Sigma\tau = I\alpha$) a condición de que (1) el eje de rotación pase por el centro de masa, y (2) el eje tenga siempre la misma dirección en el espacio (esto es, al moverse el sistema, su eje en un instante es paralelo al eje en cualquier otro instante). En esta sección consideraremos este caso especial del movimiento de rotación y de traslación combinado.

Quizás, el giro de una rueda es el ejemplo más conocido de este movimiento, en que el eje de rotación permanece en una dirección fija mientras el cuerpo se halla en movi-

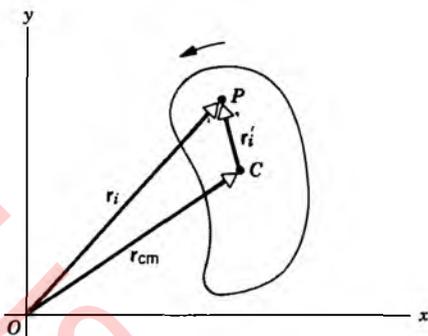


Figura 20 El centro de masa C de un cuerpo en movimiento de rotación y traslación está situado instantáneamente en la posición \mathbf{r}_{cm} . Una partícula arbitraria P del cuerpo está situada en \mathbf{r}_i respecto al origen O y en \mathbf{r}'_i respecto al centro de masa C .

miento de traslación. La figura 19 compara el movimiento de traslación del centro de masa de una rueda al rodar con el movimiento más complejo de un punto en la llanta, el cual debe describirse como una combinación de desplazamientos de traslación y de rotación.

Demostremos primero que, en este caso especial, la energía cinética de un cuerpo arbitrario puede expresarse como la suma de los términos independientes de la traslación y de la rotación. La figura 20 muestra un cuerpo arbitrario de masa M . El centro de masa C está ubicado instantáneamente en la posición \mathbf{r}_{cm} respecto al origen del marco de referencia inercial elegido. Una partícula P de masa m_i está ubicada en la posición \mathbf{r}_i respecto al origen y en la posición \mathbf{r}'_i respecto al centro de masa del cuerpo. El movimiento de traslación está restringido al plano xy ; esto es, el vector \mathbf{v}_i que describe el movimiento de m_i tiene sólo componentes x y y . El cuerpo gira también a una velocidad angular instantánea ω alrededor de un eje que pasa por el centro de masa. Con relación a O , la energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, y la energía cinética total del cuerpo se halla de la suma de todas esas partículas:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (20)$$

En la figura 20 vemos que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$. Al diferenciar, hallamos la relación correspondiente entre las velocidades: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}'_i$, donde \mathbf{v}_i es la velocidad de la partícula en el sistema xy , \mathbf{v}_{cm} es la velocidad del centro de masa, y \mathbf{v}'_i es la velocidad de la partícula respecto al centro de masa. Observado desde el marco de referencia del centro de masa, el movimiento es una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el centro de masa; entonces \mathbf{v}'_i tiene la magnitud $\omega r'_i$.

La cantidad v_i^2 que aparece en la ecuación 20 puede expresarse como $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$. Sustituyendo la expresión de la transformación de la velocidad, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}'_i$, hallamos

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i (v_{cm}^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}'_i + v_i'^2). \end{aligned} \quad (21)$$

El segundo término de la ecuación 21, que podemos expresar por $v_{cm}' (\sum v_i v_i')$, incluye como factor al ímpetu total de todas las partículas en el marco del centro de masa ($\sum \mathbf{p}_i' = \sum m_i \mathbf{v}_i' = M \mathbf{v}_{cm}'$, que es igual a cero porque $\mathbf{v}_{cm}' = 0$ en el marco del centro de masa. Así pues tenemos, sustituyendo a $\mathbf{v}'_i = r'_i \omega$ en el último término de la ecuación 21,

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i r_i'^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación 22 indica que la energía cinética total del objeto en movimiento consta de dos términos, uno asociado con la traslación pura del centro de masa del objeto a la velocidad \mathbf{v}_{cm} , y la otra asociada con la rotación pura alrededor del eje que pasa por el centro de masa. Los dos términos son bastante independientes: la rotación estaría presente incluso en ausencia de traslación (por ejemplo, como se observaría desde un marco de referencia que se moviese a razón de \mathbf{v}_{cm}). Las velocidades \mathbf{v}_{cm} y ω son, en este caso general, independientes entre sí: podemos proporcionar cualquier cantidad de energía cinética de rotación y cualquier cantidad de energía cinética de traslación. Por ejemplo, en el lanzamiento de un satélite desde un taxi espacial (véase la figura 34 de este capítulo y la figura 15 del capítulo 13), el satélite se coloca girando alrededor de su eje para su estabilidad (como estudiaremos en el capítulo 13) e independientemente se le da la velocidad de traslación necesaria para ponerlo en órbita.

Problema muestra 7 Un yoyo (Fig. 21) de masa $M = 0.023$ kg, que consta de dos discos de radio $R = 2.6$ cm unidos por un eje de radio $R_0 = 0.3$ cm, está girando en el extremo de un cordón de longitud $L = 0.84$ m con una velocidad angular ω_0 . ¿Qué velocidad angular se necesita para que el yoyo suba por el cordón? Suponga que el cordón tiene un espesor despreciable.

Solución Al comenzar la subida, sólo existe energía cinética de rotación, pero, al final, ésta es, en parte, energía cinética de rotación, en parte energía cinética de traslación, y en parte energía potencial gravitatoria. La conservación de la energía nos da, entonces,

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 + MgL,$$

donde ω y v son las velocidades finales angular y lineal. No podemos resolver este problema sencillamente para un yoyo real, pero podemos resolverlo para el yoyo ideal con un cordón de espesor despreciable hallando la condición necesaria para que el yoyo llegue justo a la mano (llegando con $v = \omega = 0$):

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = MgL.$$

Usando la inercia de rotación de un disco ($I = \frac{1}{2} MR^2$) y despreciando la contribución del eje a la inercia de rotación, resolvemos para ω_0 y hallamos

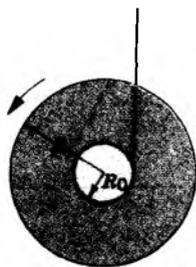


Figura 21 Problema muestra 7. Un yoyo, mostrado en sección transversal. El cordón, de un espesor que se supone despreciable, está enrollado alrededor de un eje de radio R_0 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4gL}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(9.8 \text{ m/s}^2)(0.84 \text{ m})}{(0.026 \text{ m})^2}} = 221 \text{ rad/s} = 35 \text{ rev/s.}$$

Esta considerable velocidad de rotación es sólo un límite inferior. Los valores de la velocidad angular de rotación en exceso de 100 rev/s son bastante comunes, especialmente si el yoyo es lanzado hacia abajo de modo que su energía de traslación inicial se convierte en energía de rotación. En el caso de una velocidad angular inicial grande, llegaría a la mano con una velocidad lineal considerable. De hecho, un truco muy conocido consiste en soltar el cordón del dedo en el último momento, permitiendo que la velocidad vertical del yoyo lo lleve a varios metros hacia arriba.

La interacción de las energías cinéticas de traslación, de rotación, y de la potencial gravitatoria es la causante del comportamiento del yoyo y de los muchos trucos que pueden hacerse con él.*

Rodamiento sin deslizamiento

Consideremos ahora un caso especial de movimiento combinado de traslación y de rotación, por el cual el objeto rueda por una superficie de modo tal que no existe movimiento respectivo entre el objeto y la superficie en el punto instantáneo de contacto. Este caso especial se conoce como *rodamiento sin deslizamiento*. La figura 22 muestra la fotografía de una rueda de bicicleta que está girando. Podemos ver cómo los rayos de la parte inferior, que está instantáneamente en reposo, tienen un enfoque más preciso que los de la parte superior, los cuales se ven borrosos. ¡La parte superior de la rueda se mueve claramente más rápidamente que la inferior! La fricción entre la rueda y la superficie es, claro está, la causante del rodamiento sin deslizamiento, pero en este caso especial la fuerza de fricción no trabaja y no disipa energía, porque no existe movimiento entre la rueda y la superficie en el punto de contacto. Si bien en el problema existe movimiento, la fuerza es de fricción *estática*.

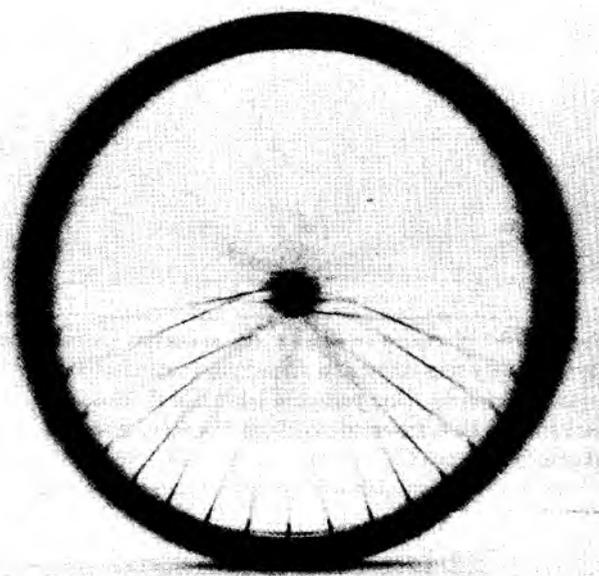


Figura 22 Fotografía de una rueda de bicicleta girando. Nótese que los rayos de la parte superior de la rueda se ven más borrosos que los de la parte inferior. Ello se debe a que la parte superior tiene una velocidad lineal más grande.

No todos los casos de rodamiento sobre una superficie con fricción consisten en rodamiento sin deslizamiento. Por ejemplo, imaginemos que un automóvil trata de arrancar en una calle cubierta de hielo. Al principio, puede que las ruedas giren sin desplazarse; en este caso, tenemos una rotación pura sin traslación y existe una gran cantidad de trabajo de fricción efectuado, como lo indica el hielo que se funde por el aumento de la energía interna resultante del trabajo de fricción. Si se vierte arena sobre el hielo, las ruedas giran aún más rápidamente, pero el automóvil comienza a avanzar poco a poco. Ahora queda todavía cierto deslizamiento entre la llanta y el hielo, de modo que la fuerza de fricción está todavía efectuando un trabajo, sólo que con cierto movimiento de traslación. Únicamente en el caso en que las llantas cesan de resbalar sobre el hielo, de modo que no haya movimiento en el punto de contacto entre la llanta y el hielo, nos encontramos con una situación de rodamiento sin deslizamiento y sin trabajo de fricción.

La figura 23 muestra una manera de ver al rodamiento sin deslizamiento como una superposición de movimientos de rotación y de traslación. La figura 23a muestra el movimiento de traslación, en que el centro de masa C se mueve a velocidad v_{cm} , y la figura 23b muestra el movimiento de rotación a la velocidad angular ω . Cuando se superponen los dos movimientos, el fondo B de la rueda tendrá una velocidad $v_{cm} - \omega R$; si ésta es cero, de modo que el punto de contacto esté en reposo, entonces debemos tener que $v_{cm} = \omega R$. Al superponer los movimientos de traslación y de rotación resultantes, obtenemos la figu-

* Véase "The Yo-Yo: A Toy Flywheel", por Wolfgang Burger, *American Scientist*, marzo-abril de 1984, pág. 137.

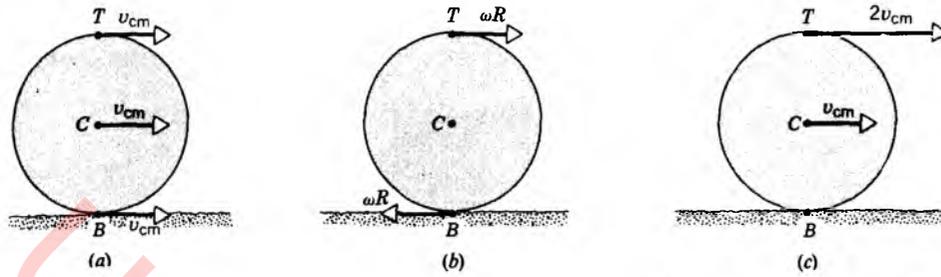


Figura 23 El rodamiento puede considerarse una superposición de traslación y rotación puras con respecto al centro de masa. (a) Movimiento de traslación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad lineal. (b) Movimiento de rotación, en el que todos los puntos se mueven con la misma velocidad angular alrededor del eje central. (c) La superposición de (a) y (b), donde las velocidades en T, C, y B han sido obtenidas por la suma vectorial de las componentes de la traslación y de la rotación.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
 FACULTAD DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE
 DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
 MONTEVIDEO, URUGUAY

ra 23c. Nótese que la velocidad lineal en la parte superior de la rueda T es exactamente el doble de la del centro.

Para una rotación pura la velocidad tangencial tiene la magnitud $v = \omega R$. Entonces, para el caso especial del rodamiento sin deslizamiento, los movimientos de rotación y de traslación deben estar relacionados por

$$v_{cm} = \omega R. \quad (23)$$

Este resultado se aplica *únicamente* en el caso del rodamiento sin deslizamiento. En el caso general de los movimientos de traslación y de rotación combinados, la velocidad tangencial $v (= \omega R)$ no es igual a v_{cm} .

La energía cinética de los movimientos de rotación y de traslación combinados, ecuación 22, ya no tiene dos términos independientes en el caso del rodamiento sin deslizamiento. Podemos ver a la energía cinética como si estuviese completamente determinada, bien por la velocidad de traslación o bien por la velocidad de rotación, y obtenemos las expresiones correspondientes al sustituir la ecuación 23 en la ecuación 22:

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} v_{cm}^2 / R^2, \quad (24a)$$

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \quad (24b)$$

En cualquier caso, es suficiente un solo parámetro (v_{cm} o ω) para determinar la energía cinética.

Otra visión del rodamiento sin deslizamiento

Existe otra manera instructiva de analizar el rodamiento sin deslizamiento: consideremos que el punto de contacto en B sea un eje instantáneo de rotación, como se ilustra en la figura 24. En cada instante existe un nuevo punto de contacto B y, por lo tanto, un nuevo eje de rotación, pero instantáneamente el movimiento consiste en una rotación pura en torno a B. La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2, \quad (25)$$

donde I_B es la inercia de rotación y ω_B es la velocidad angular, ambas consideradas en torno al eje de rotación que pasa por B. Partiendo del teorema del eje paralelo, $I_B = I_{cm} + MR^2$, donde R es la distancia entre B y el centro de masa. Sabemos que el centro de masa se mueve a velocidad v_{cm} , y entonces el movimiento de rotación en torno a B debe dar al centro de masa la velocidad tangencial apropiada: $v_{cm} = R \omega_B$. Ahora podemos expresar la energía cinética, usando la ecuación 25,

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} (I_{cm} + MR^2) \left(\frac{v_{cm}}{R} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_{cm} \omega_B^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2. \quad (26)
 \end{aligned}$$

La velocidad angular del centro de masa respecto a B debe ser la misma que la velocidad angular de B respecto al centro de masa; entonces $\omega_B = \omega$, y la energía cinética se convierte en idéntica a la dada por las ecuaciones 24. En este caso, la derivación se ha hecho suponiendo que las partes de la rotación y la traslación de la energía cinética no son independientes.

Problema muestra 8 Un cilindro sólido de masa M y radio R rueda hacia abajo sin deslizamiento por un plano inclinado de

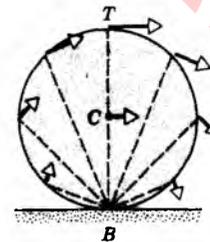


Figura 24 Puede considerarse que un cuerpo, al rodar, gira alrededor de un eje instantáneo en el punto de contacto B. Los vectores muestran las velocidades lineales instantáneas de puntos seleccionados.

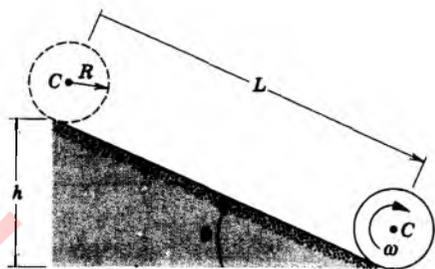


Figura 25 Problema muestra 8. Un cilindro rueda sin deslizamiento por un plano inclinado.

longitud L y altura h (Fig. 25). Halle la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega abajo.

Solución Para resolver este problema usamos la conservación de la energía. El cilindro está inicialmente en reposo. En el fondo del plano inclinado, el cambio de la energía potencial es $\Delta U = -Mgh$. Si el cilindro comienza desde el reposo, su energía cinética cambia en una cantidad dada por la ecuación 24a. Para un cilindro que gire en torno a su eje, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Si no existen otros intercambios de energía, entonces $\Delta E = 0$ da $\Delta K = -\Delta U$, o sea

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = Mgh.$$

Resolviendo para v_{cm} , obtenemos

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

La velocidad del centro de masa debería de haber sido $v_{cm} = \sqrt{2gh}$ si el cilindro se deslizará hacia abajo (sin rodar) por un plano inclinado sin fricción. La velocidad del cilindro al rodar es, por lo tanto, menor que la velocidad del cilindro al deslizarse porque, para el cilindro que rueda, parte de la energía potencial inicial ha sido transformada en energía cinética de rotación, dejando disponible menos energía para la parte de traslación de la energía cinética. Aunque el cilindro llegue rodando al fondo del plano inclinado más tarde que un cilindro idéntico que se deslice habiendo comenzado a bajar al mismo tiempo por el plano inclinado sin fricción, pero por lo demás idéntico, ambos llegan al fondo con la misma cantidad de energía; el cilindro que rueda tiene un movimiento rotatorio a la vez que se traslada, mientras el cilindro que se desliza no tiene ese movimiento rotatorio.

El problema muestra anterior fue resuelto mediante las técnicas de la energía. Podemos también resolver problemas de este tipo usando métodos dinámicos basados en fuerzas y torcas. Al hacerlo así, es conveniente usar la forma de rotación de la segunda ley de Newton, $\Sigma\tau = I\alpha$, alrededor de un eje que pase por el centro de masa. Dejamos acentadas nuevamente las dos condiciones especiales que nos permitan aplicar este resultado cuando el eje de rotación no esté fijo en el espacio: (1) el eje pasa por el centro de masa del objeto que gira, y (2) el eje no cambia su dirección en el espacio al moverse el objeto. Este problema satisface ambas condiciones.

En la figura 26 se muestra el diagrama del cuerpo libre para este problema. Mg es el peso del cilindro que actúa

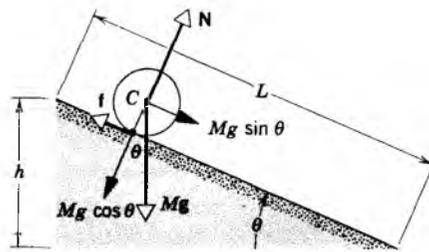


Figura 26 Las fuerzas que actúan sobre el cilindro rodante del problema muestra 8.

verticalmente hacia abajo a través del centro de masa, N es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y f es la fuerza de fricción estática que actúa hacia arriba a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

Usando la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación, obtenemos, para un movimiento perpendicular al plano inclinado,

$$N - Mg \cos \theta = 0,$$

y, para un movimiento a lo largo del plano inclinado,

$$Mg \sin \theta - f = Ma_{cm}.$$

Consideremos ahora el movimiento de rotación. Ni N ni Mg tienen torcas en torno al centro de masa C porque sus líneas de acción pasan por C , y tienen brazos de momento nulos. La fuerza de la fricción tiene un brazo de momento R en torno a C , de modo que $\tau = fR$ y entonces

$$fR = I_{cm}\alpha$$

$$f = I_{cm}\alpha/R.$$

La inercia de rotación en torno al centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Para un rodamiento sin deslizamiento, $v_{cm} = \omega R$; al diferenciar, se deduce que $a_{cm} = \alpha R$, y la ecuación anterior resulta ser

$$f = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)(a_{cm}/R^2) = \frac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Sustituyendo ésta en la segunda ecuación de traslación, hallamos que

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g \sin \theta.$$

Esto es, la aceleración del centro de masa del cilindro al rodar ($\frac{2}{3}g \sin \theta$) es menor de lo que sería su aceleración si el cilindro se deslizará por el plano inclinado ($g \sin \theta$). Este resultado se cumple en cualquier instante, sin importar la posición del cilindro en el plano inclinado.

Puesto que a_{cm} es constante, podemos hallar la velocidad del centro de masa, comenzando desde el reposo. Según la ecuación 20 del capítulo 2, $v^2 = v_0^2 + 2ax$, o sea

$$v_{cm}^2 = 2a_{cm}L,$$

de modo que

$$v_{cm}^2 = 2\left(\frac{2}{3}g \sin \theta\right)L = \frac{4}{3}g \left(\frac{h}{L}\right)L = \frac{4}{3}gh$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Este resultado es el mismo que el obtenido anteriormente por el método de la energía. El método de la energía es ciertamente más sencillo y más directo. Sin embargo, si estamos interesados en conocer los valores de las fuerzas, tales como N y f , debemos usar un método dinámico.

Este método determina la fuerza de fricción estática necesaria para el rodamiento:

$$f = Ma_{cm}/2 = (M/2)\left(\frac{2}{3}g \sin \theta\right) = \frac{1}{3}Mg \sin \theta.$$

¿Qué pasaría si la fuerza de fricción estática entre las superficies fuese menor que este valor?

Problema muestra 9 Una esfera, un cilindro, y un aro comienzan desde el reposo y ruedan hacia abajo por el mismo plano inclinado. ¿Cuál de todos estos cuerpos será el primero en llegar al fondo?

Solución Resolveremos este problema comparando las aceleraciones de los centros de masa de los tres objetos. El que tenga la aceleración mayor será el primero en llegar al fondo.

A partir de los cálculos anteriores, tenemos la siguiente ecuación general dinámica para el movimiento a lo largo del plano:

$$Mg \sin \theta - f = Ma_{cm},$$

donde

$$f = I_{cm}\alpha/R = I_{cm}a_{cm}/R^2.$$

Sustituyendo a f y resolviendo para a_{cm} , hallamos

$$a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + I_{cm}/MR^2}. \quad (27)$$

Podemos evaluar esta expresión para cada uno de los objetos:

$$\begin{aligned} \text{Esfera: } \frac{I_{cm}}{MR^2} &= \frac{2}{5}, & a_{cm} &= \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g \sin \theta \\ & & &= 0.714g \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cilindro: } \frac{I_{cm}}{MR^2} &= \frac{1}{2}, & a_{cm} &= \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g \sin \theta \\ & & &= 0.667g \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aro: } \frac{I_{cm}}{MR^2} &= 1, & a_{cm} &= \frac{g \sin \theta}{1 + 1} = \frac{1}{2}g \sin \theta \\ & & &= 0.500g \sin \theta. \end{aligned}$$

Claramente la esfera tiene la mayor aceleración y es la primera en llegar al fondo, seguida por el cilindro y luego por el aro. La esfera es el objeto más "compacto" y puede aceptar una rotación con el menor costo en energía cinética, puesto que su inercia de

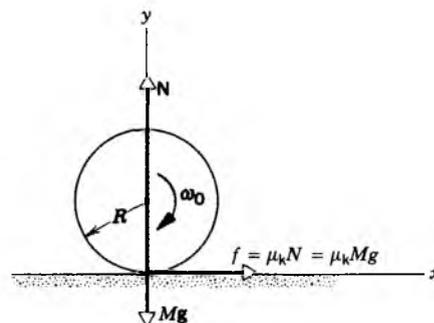


Figura 27 Problema muestra 10. Un cilindro que inicialmente gira a una velocidad angular ω_0 hace contacto con una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción f sobre el cilindro.

rotación es la más pequeña de las tres. Cada cuerpo tiene una energía cinética igual a Mgh en el fondo del plano inclinado; en la esfera, se halla en mayor cantidad la energía cinética del tipo de traslación y en menor cantidad la energía cinética del tipo de rotación.

Usted debería poder resolver también este problema utilizando los métodos de la energía al hallar cuál de los objetos tiene la v_{cm} más grande en el fondo del plano inclinado.

Obsérvese que nuestro resultado final para la aceleración de cada objeto no depende ni de la masa ni del radio del objeto. Los tres objetos pueden ser de tamaños bastante diferentes, pero la esfera siempre será la primera en llegar al fondo. Además, todas las esferas tienen al rodar la misma aceleración, sin importar cuáles sean sus tamaños o masas respectivos; una canica y una bola de boliche llegarán al fondo al mismo tiempo y con la misma velocidad.

Problema muestra 10 A un cilindro sólido uniforme de radio R ($= 12$ cm) y de masa M ($= 3.2$ kg) se le da una velocidad angular inicial ω_0 (en sentido de las manecillas del reloj) de 15 rev/s y luego se le hace descender a una superficie horizontal plana. El coeficiente de fricción cinética entre la superficie y el cilindro es $\mu_k = 0.21$. Inicialmente, el cilindro se desliza al moverse a lo largo de la superficie, pero después de un tiempo t inicia un rodamiento puro sin deslizamiento. (a) ¿Cuál es la velocidad v_{cm} del centro de masa en el tiempo t ? (b) ¿Cuál es el valor de t ?

Solución (a) La figura 27 muestra las fuerzas que actúan sobre el cilindro. Puesto que todas las fuerzas son constantes mientras ocurre el deslizamiento, la aceleración a_{cm} del centro de masa en la dirección x es constante. Entonces, para el movimiento de traslación, podemos escribir

$$\sum F_x = Ma_{cm} = M \left(\frac{v_f - v_i}{t - 0} \right).$$

Aquí, $v_i = 0$ y $v_f = v_{cm}$, la velocidad en t cuando se inicia el rodamiento puro. También, la única fuerza horizontal es la de fricción, dada por $\mu_k Mg$, de modo que

$$\mu_k Mg = Mv_{cm}/t. \quad (28)$$

La aceleración angular α alrededor de un eje que pase por el centro de masa es también constante (¿por qué?), de modo que, para el movimiento de rotación, podemos escribir

$$\sum \tau = I_{cm}\alpha = I_{cm} \left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0} \right).$$

Aquí, eligiendo que las rotaciones en sentido contrario a las manecillas sean positivas, $\omega_f = -v_{cm}/R$, la velocidad angular en el tiempo t , y $\omega_i = -\omega_0$. Solamente la fuerza f produce una torca en torno al centro de masa; la torca resultante es $\mu_k MgR$, una cantidad positiva. Usando $\sum \tau = I\alpha$, obtenemos

$$\mu_k MgR = \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \left(\frac{-v_{cm}/R - (-\omega_0)}{t} \right). \quad (29)$$

Eliminando a t de las ecuaciones 28 y 29 y resolviendo para v_{cm} , obtenemos

$$v_{cm} = \frac{1}{3}\omega_0 R = \frac{1}{3}(15 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev})(0.12 \text{ m}) = 3.8 \text{ m/s}.$$

Nótese que v_{cm} no depende de los valores de M , g , o μ_k . Sin embargo, ¿qué ocurriría si cualquiera de estas cantidades fuese cero?

(b) Al eliminar a v_{cm} entre las ecuaciones 28 y 29, podemos resolver para t y hallar

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu_k g} = 1.8 \text{ s}.$$

Como ejercicio, debería usted de comprobar estos resultados usando los métodos de la energía. Halle el cambio de energía cinética de rotación y compárelo con el trabajo efectuado por la torca de fricción. Nótese que, debido a que ocurre una rotación con deslizamiento entre el tiempo 0 y el tiempo t , el trabajo de fricción se efectúa durante ese periodo.

PREGUNTAS

- ¿Puede la masa de un objeto considerarse como concentrada en su centro de masa con el fin de calcular su inercia de rotación? Si se puede, explique por qué. Si no, plantee un contraejemplo.
- ¿Alrededor de qué eje es la inercia de rotación del cuerpo humano mínima? En torno a qué eje que pase por el centro de masa es nuestra inercia de rotación la mayor?
- ¿En torno a qué eje tendría un cubo una inercia de rotación mínima?
- Si dos discos circulares del mismo peso y espesor están hechos de metales con densidades diferentes, ¿qué disco, en caso de haber alguno, tendrá la mayor inercia de rotación en torno a su eje de simetría?
- Va a determinarse la inercia de rotación de un cuerpo de forma considerablemente complicada. La forma hace extremadamente difícil el cálculo matemático de $\int r^2 dm$. Sugiera modos en los que la inercia de rotación en torno a un eje particular podría medirse experimentalmente.
- En la figura 28 se muestran cinco sólidos en sección transversal. Las secciones transversales tienen igual altura e igual anchura máxima. Los sólidos tienen masas iguales. ¿Cuál de ellos tiene la inercia de rotación más grande en torno a un eje perpendicular que pase por el centro de masa? ¿Cuál tiene la más pequeña?

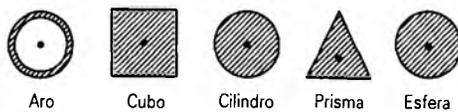


Figura 28 Pregunta 6

- ¿Se cumpliría la ecuación 9 si la placa no fuese “delgada”, esto es, si su espesor fuera comparable a (o incluso mayor que) a o b ?
- La figura 29a muestra una regla de un metro, de la que una mitad es de madera y la otra mitad de acero, y cuyo

extremo de madera está pivoteado en O . Se aplica una fuerza al extremo de acero en a . En la figura 29b, la regla está pivoteada en el extremo de acero en O' y la misma fuerza se aplica en el extremo de madera en a' . ¿Se obtiene la misma aceleración angular en cada caso? Si no, ¿en qué caso es mayor la aceleración angular?

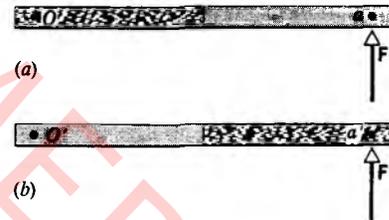


Figura 29 Pregunta 8.

- Al talar un árbol, un leñador hace un corte en el lado que da a la dirección en que va a caer el árbol. Explique por qué. ¿Estaría uno a salvo permaneciendo directamente detrás del árbol en el lado contrario a la caída?
- Usted puede distinguir un huevo crudo de uno cocido haciéndolos girar a ambos sobre una mesa. Explique cómo. También, si usted detiene el giro de un huevo crudo con los dedos y lo suelta rápidamente, continuará girando. ¿Por qué?
- Comente cada una de las siguientes aseveraciones sobre el deporte del esquí. (a) En una carrera de descenso, conviene utilizar esquíes que no giren con facilidad. (b) En una carrera de slalom, convienen los esquíes que den vuelta fácilmente. (c) Por lo tanto, la inercia de rotación de los esquíes en descenso debería ser más grande que la de los esquíes para slalom. (d) Considerando que existe una fricción baja entre los esquíes y la nieve, ¿cómo ejerce el esquiador las torcas para girar a los lados o para detener

un giro? (Véase "The Physics of Ski Turns", por J. I. Shonie y D. L. Mordick, *The Physics Teacher*, diciembre de 1972, pág. 491.)

12. Considérese una vara recta apoyada en su extremo sobre el hielo (sin fricción). ¿Cuál sería la trayectoria de su centro de masa al caer?
13. Para almacenar energía eólica o energía solar, se han sugerido volantes. La cantidad de energía que puede ser almacenada en un volante depende de la densidad y de la resistencia a la tracción del material de que esté hecho el volante y, para un peso dado, es necesario el material recio de la menor densidad disponible. ¿Puede usted explicar esto? (Véase "Flywheels", por R. F. Post y S. F. Post, *Scientific American*, diciembre de 1973, pág. 17.)
14. Explique por qué una rueda que gira sobre una superficie horizontal plana no disminuye su marcha debido a la fricción estática. Suponiendo que no haya deslizamiento, ¿qué obligaría a la rueda a disminuir la marcha?
15. Describa cualitativamente qué le sucede al sistema de la figura 18 si se le imprime al disco una velocidad angular inicial, en sentido de las manecillas del reloj, antes de ser liberado. ¿Qué cambios ocurren, si los hay, en la aceleración lineal del bloque, o en la aceleración angular del disco? Véase el problema muestra 5.
16. Explique por qué la rueda es un invento tan importante.
17. Aparte de su aspecto exterior, ¿por qué los automóviles deportivos tienen ruedas de rayos?
18. Una bala de cañón y una canica ruedan desde el reposo por una pendiente hacia abajo. ¿Cuál de las dos llega primero al fondo?
19. Un envase cilíndrico de hojalata lleno de carne de res y otro envase idéntico lleno de jugo de manzana ruedan por un plano inclinado hacia abajo. Compare sus aceleraciones angular y lineal. Explique la diferencia.
20. Un cilindro sólido de madera rueda hacia abajo por dos planos inclinados diferentes de la misma altura pero con ángulos de inclinación distintos. ¿Llegará al fondo con la misma velocidad en cada caso? ¿Tardará más tiempo en rodar por una pendiente que por la otra? Explique las respuestas.
21. Un cilindro sólido de latón y un cilindro sólido de madera tienen el mismo radio y masa, siendo más largo el cilindro de madera. Usted los suelta juntos en la parte superior de un plano inclinado. ¿Cuál le ganará al otro en llegar al fondo? Supongamos ahora que los cilindros sean de la misma longitud (y radio) y que las masas sean iguales por haber practicado un orificio a lo largo del eje del cilindro de latón. ¿Cuál de los dos cilindros ganará la carrera ahora? Explique las respuestas. Suponga que los cilindros ruedan sin deslizarse.
22. Ruth y Rogelio pasean en bicicleta a lo largo de una trayectoria a la misma velocidad. Las ruedas de la bicicleta de Ruth son de un diámetro un poco mayor que las ruedas de la bicicleta de Rogelio. ¿Cómo se comparan las velocidades angulares de sus ruedas? ¿Qué puede decir sobre las velocidades de las partes superiores de las ruedas?
23. Un tambor cilíndrico, empujado por una tabla desde una posición inicial que se muestra en la figura 30, rueda hacia

adelante en el suelo una distancia $L/2$, igual a la mitad de la longitud de la tabla. No existe deslizamiento en ningún punto de contacto. ¿Dónde estará la tabla entonces? ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre?

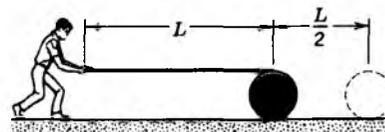


Figura 30 Pregunta 23

24. Dos discos pesados están unidos por una barra corta de radio mucho menor. El sistema está situado sobre una rampa de modo que los discos cuelgan por los lados como en la figura 31. El sistema rueda rampa abajo sin deslizamiento. (a) Cerca del fondo de la rampa los discos tocan a la mesa horizontal y el sistema continúa con una mayor velocidad de traslación. Explique por qué. (b) Si este sistema compitiera con un anillo (de cualquier radio) en descenso por la rampa, ¿cuál llegaría al fondo primero?

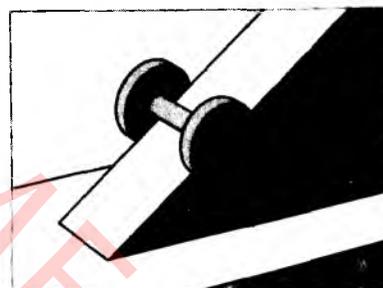


Figura 31 Pregunta 24.

25. Un yoyo cae hasta el final de su cordón y luego sube por él. ¿Se invierte la dirección de la rotación en el extremo final del cordón? Explique la respuesta.
26. Un yoyo descansa sobre una mesa horizontal y puede rodar libremente (véase la Fig. 32). Si se jala del cordón

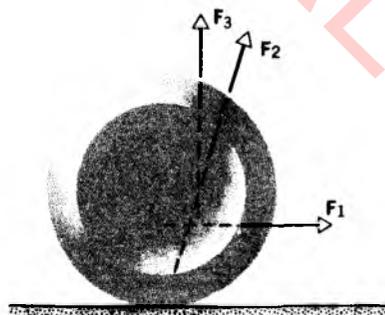


Figura 32 Pregunta 26.

con una fuerza horizontal, como F_1 , ¿en qué sentido rodará el yoyo? ¿Qué sucede cuando se aplica la fuerza F_2 (pasando su línea de acción por el punto de contacto entre el yoyo y la mesa)? Si se jala del cordón verticalmente con la fuerza F_3 , ¿qué sucede?

27. Una rueda de reborde sólida consta de dos discos concéntricos unidos, el más grande de los cuales tiene un radio R y el más pequeño un radio r . La rueda va a rodar a lo largo de un riel de dos niveles, como se muestra en la figura 33. Sin embargo, al dar un giro, el centro de la rueda se mueve una distancia $2\pi r$, según el disco más pequeño y $2\pi R$ según el disco más grande. Explique la aparente discrepancia.

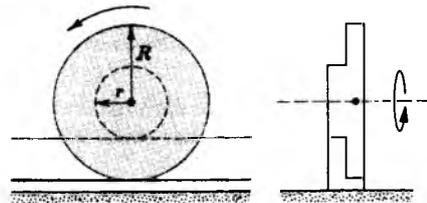


Figura 33 Pregunta 27.

28. Enuncie las tres leyes de Newton para el movimiento en términos que correspondan a cuerpos en rotación.

PROBLEMAS

Sección 12-2 Energía cinética de la rotación e inercia de la rotación

- Las masas y coordenadas de cuatro partículas son las siguientes: 50 g, $x = 2.0$ cm, $y = 2.0$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4.0$ cm; 25 g, $x = -3.0$ cm, $y = -3.0$ cm; 30 g, $x = -2.0$ cm, $y = 4.0$ cm. Calcule la inercia de rotación de este conjunto con respecto a los ejes (a) x , (b) y , y (c) z .
- Una molécula tiene una inercia de rotación de $14,000 \text{ u} \cdot \text{pm}^2$ y está girando a una velocidad angular de $4.30 \times 10^{12} \text{ rad/s}$. (a) Exprese la inercia de rotación en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. (b) Calcule la energía cinética de rotación en eV.
- La molécula de oxígeno tiene una masa total de $5.30 \times 10^{-26} \text{ kg}$ y una inercia de rotación de $1.94 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ en torno a un eje que pasa por el centro perpendicular a la línea que une a los átomos. Supóngase que tal molécula en el seno de un gas tiene una velocidad media de 500 m/s y que su energía cinética de rotación es de dos tercios de su energía cinética de traslación. Halle su velocidad angular promedio.

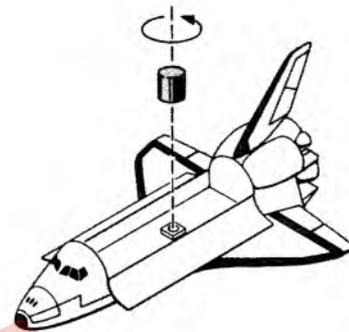


Figura 34 Problema 4.

Sección 12-3 Inercia de rotación de los cuerpos sólidos

- Un satélite de comunicaciones es un cilindro uniforme con 1220 kg de masa, 1.18 m de diámetro, y 1.72 m de longitud. Antes de lanzarlo desde la plataforma del taxi espacial, se le hace girar a razón de 1.46 rev/s en torno al eje del cilindro; véase la figura 34. Calcule la energía cinética de rotación del satélite.
- Cada una de las tres palas del rotor del helicóptero que se muestra en la figura 35 tiene 5.20 m de longitud y una masa de 240 kg . El rotor gira a 350 rev/min . (a) ¿Cuál es la inercia de rotación del conjunto del rotor en torno al eje de rotación? (Cada pala puede considerarse como una varilla.) (b) ¿Cuál es la energía cinética de rotación?
- La figura 36 muestra un bloque uniforme de masa M y aristas de longitudes a , b , y c . Calcule su inercia de rotación alrededor de un eje que pase por una esquina y

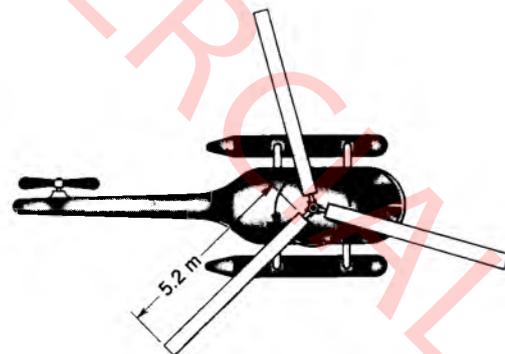


Figura 35 Problema 5.

sea perpendicular a la cara grande del bloque. (Sugerencia: Véase la Fig. 9.)

- Calcule la inercia de rotación de una regla de un metro, cuya masa es de 0.56 kg , en torno a un eje perpendicular a la regla y que está situado en la marca de 20 cm .
- Dos partículas, cada una de masa m , están unidas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas, cada una de longitud

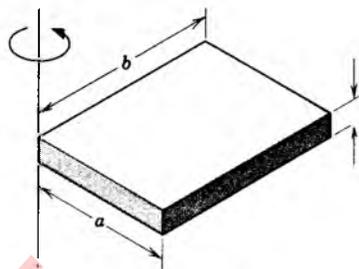


Figura 36 Problema 6.

L y masa M , como se muestra en la figura 37. La combinación gira alrededor del eje de rotación con una velocidad angular ω . Obtenga las expresiones algebraicas para (a) la inercia de rotación de la combinación en torno a O y (b) la energía cinética de rotación en torno a O .

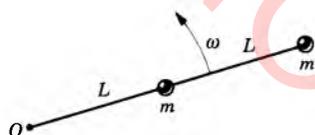


Figura 37 Problema 8.

9. (a) Demuestre que la suma de las inercias de rotación de un cuerpo laminar plano en torno a dos ejes perpendiculares cualesquiera en el plano del cuerpo es igual a la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje perpendicular al plano que pase por el punto donde se intersecan. (b) Aplique esto a un disco circular para hallar su inercia de rotación en torno a un diámetro como eje.
10. En Europa se utilizan en algunos casos camiones de entregas que operan haciendo uso de la energía almacenada en un volante giratorio. Los camiones son cargados haciendo uso de un motor eléctrico para llevar al volante a su velocidad máxima de 624 rad/s. Este volante es un cilindro sólido, homogéneo, con una masa de 512 kg y un radio de 97.6 cm. (a) ¿Cuál es la energía cinética del volante después de la carga? (b) Si el camión opera con un requerimiento de potencia de 8.13 kW en promedio, ¿durante cuántos minutos puede operar entre cargas?
11. (a) Demuestre que un cilindro sólido de masa M y radio R es equivalente a un aro delgado de masa M y radio $R/\sqrt{2}$, cuando ambos giran en torno a un eje central. (b) La distancia radial desde un eje dado en el que pudiera estar concentrada la masa del cuerpo sin alterarse la inercia de rotación del cuerpo en torno a ese eje se llama *radio de giro*. Sea que k represente al radio de giro y demuestre que

$$k = \sqrt{I/M}.$$

Esto da el radio del "aro equivalente" en el caso general.

12. La figura 38 muestra la barra sólida que se consideró en la sección 12-3 (véase también la Fig. 6) dividida en un número arbitrario de N trozos. (a) ¿Cuál es la masa m_i de cada trozo? (b) Demuestre que la distancia de cada trozo al eje de rotación puede ser escrita así: $r_i = (i - 1)L/N + (\frac{1}{2})L/N = (i - \frac{1}{2})L/N$. (c) Utilice la ecuación 5 para evaluar la inercia de rotación de esta barra, y demuestre que se reduce a la ecuación 6. Usted puede necesitar las sumas siguientes:

$$\sum_{i=1}^n 1 = n, \quad \sum_{i=1}^n i = n(n + 1)/2,$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

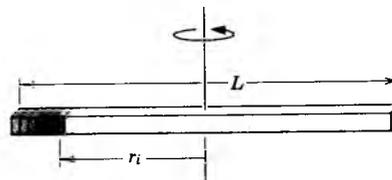


Figura 38 Problema 12.

13. En este problema buscamos calcular la inercia de rotación de un disco de masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie. Considere un elemento de masa dm en forma de anillo de radio r y anchura dr (véase la Fig. 39). (a) ¿Cuál es la masa dm de este elemento, expresada como una fracción de la masa total M del disco? (b) ¿Cuál es la inercia de rotación dI de este elemento? (c) Integre el resultado de la parte (b) para hallar la inercia de rotación de todo el disco.

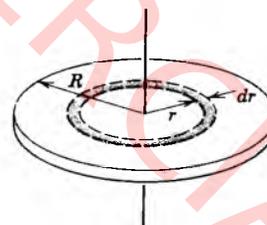


Figura 39 Problema 13.

14. En este problema usamos el resultado del problema anterior de la inercia de rotación de un disco para calcular la inercia de rotación de una esfera sólida uniforme de masa M y radio R en torno a un eje que pase por su centro. Considérese un elemento dm de la esfera en forma de disco de espesor dz a una altura z sobre el centro (véase la Fig. 40). (a) Expresada como una fracción de la masa total M , ¿cuál es la masa dm del elemento? (b) Considerando al elemento como un disco, ¿cuál es su inercia de rotación dI ? (c) Integre el resultado de (b) sobre toda la esfera para hallar la inercia de rotación de la esfera.

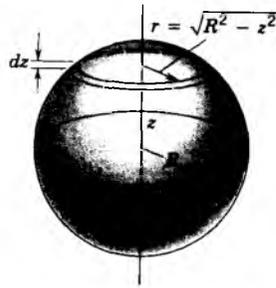


Figura 40 Problema 14.

Sección 12-4 Torca que actúa sobre una partícula

15. La figura 41 muestra las líneas de acción y los puntos de aplicación de dos fuerzas en torno al origen O . Imagine que estas fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido pivotado en O , estando todos los vectores en el plano de la figura. (a) Halle una expresión para la magnitud de la torca resultante sobre el cuerpo. (b) Si $r_1 = 1.30$ m, $r_2 = 2.15$ m, $F_1 = 4.20$ N, $F_2 = 4.90$ N, $\theta_1 = 75.0^\circ$, y $\theta_2 = 58.0^\circ$, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante?

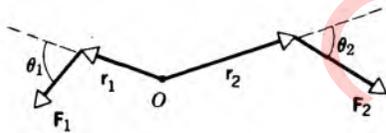


Figura 41 Problema 15.

16. Vuelva a trazar la figura 12 bajo las transformaciones siguientes: (a) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$, (b) $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, y (c) $\mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F}$ y $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, mostrando en cada caso la nueva dirección de la torca. Compruebe si hay consistencia con la regla de la mano derecha.
17. El objeto que se muestra en la figura 42 está pivotado en O . Sobre él actúan tres fuerzas en las direcciones que se muestran en la figura: $F_A = 10$ N en el punto A , a 8.0 m de O ; $F_B = 16$ N en el punto B , a 4.0 m de O ; y $F_C = 19$ N en el punto C , a 3.0 m de O . ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la torca resultante con respecto a O ?

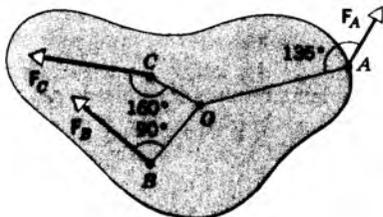


Figura 42 Problema 17.

18. (a) Dado que $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ y $\mathbf{F} = iF_x + jF_y + kF_z$, halle la torca $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. (b) Demuestre que si \mathbf{r} y \mathbf{F} están en un

plano determinado, entonces $\boldsymbol{\tau}$ no tiene una componente en ese plano.

Sección 12-5 Dinámica de la rotación de un cuerpo rígido

19. Un cilindro que tiene una masa de 1.92 kg gira en torno a su eje de simetría. Se le aplican las fuerzas que se muestran en la figura 43: $F_1 = 5.88$ N, $F_2 = 4.13$ N, y $F_3 = 2.12$ N. También, $R_1 = 4.93$ cm y $R_2 = 11.8$ cm. Halle la magnitud y la dirección de la aceleración angular del cilindro.

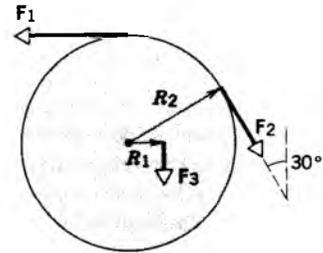


Figura 43 Problema 19.

20. Un cascarón esférico tiene un radio de 1.88 m. La aplicación de una torca de $960 \text{ N} \cdot \text{m}$ le imparte una aceleración angular igual a 6.23 rad/s^2 en torno a un eje que pasa por el centro del cascarón. Calcule (a) la inercia de rotación del cascarón en torno al eje de rotación y (b) la masa del cascarón.
21. En el acto de saltar desde un trampolín, un clavadista cambió su velocidad angular de cero a 6.20 rad/s en 220 ms. La inercia de rotación del clavadista es de $12.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) Halle la aceleración angular durante el salto. (b) ¿Qué torca externa actuó sobre el clavadista durante el salto?
22. El motor de un automóvil desarrolla 133 hp ($= 99.18 \text{ kW}$) cuando gira a 1820 rev/min. ¿Cuál es la torca desarrollada?
23. Una rueda de 31.4 kg y un radio de 1.21 m está girando a razón de 283 rev/min. Debe ser detenida en 14.8 s. Halle la potencia promedio requerida. Suponga que la rueda es un aro delgado.
24. Si en la figura 18a $R = 12.3$ cm, $M = 396$ g, y $m = 48.7$ g, halle la velocidad del bloque después de que descendió 54.0 cm comenzando desde el reposo. Resuelva el problema usando los principios de conservación de la energía.
25. Suponga que la Tierra es una esfera de densidad uniforme. (a) Calcule su energía cinética de rotación. (b) Suponga que esta energía puede ser aprovechada para nuestro uso. ¿Durante cuánto tiempo podría la Tierra suministrar 1.00 kW de potencia a cada uno de los 4.20×10^9 habitantes de la Tierra?
26. La figura 44 muestra una puerta blindada de gran masa en la instalación para probar neutrones del Lawrence Livermore Laboratory; ésta es la puerta de bisagras más pesada del mundo. La puerta tiene una masa de 44,000 kg, una inercia de rotación en torno a la línea de sus bisagras de $8.7 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, y una anchura de 2.4 m. ¿Qué fuerza uniforme, aplicada en el borde exterior en ángulo recto



Figura 44 Problema 26.

con la puerta, puede moverla desde el reposo en un ángulo de 90° en 30 s?

27. Sobre una polea que tiene una inercia de rotación de $1.14 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y un radio de 9.88 cm actúa una fuerza, aplicada tangencialmente a su borde, que varía en el tiempo según $F = 0.496t + 0.305t^2$, donde F está en newtons y t está en segundos. Si la polea estaba inicialmente en reposo, halle su velocidad angular 3.60 s después.
28. La figura 45 muestra dos bloques, cada uno de masa m , suspendidos de los extremos de una barra rígida carente de peso de longitud $L_1 + L_2$, siendo $L_1 = 20.0 \text{ cm}$ y $L_2 = 80.0 \text{ cm}$. La barra es sostenida en posición horizontal como se muestra en la figura y luego se deja caer. Calcule las aceleraciones lineales de los dos bloques cuando comienzan a moverse.

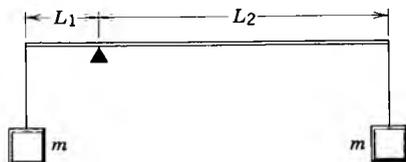


Figura 45 Problema 28.

29. Dos bloques idénticos, cada uno de masa M , están unidos por un cordón que pasa sobre una polea sin fricción de radio R y de inercia de rotación I (Fig. 46). El cordón no se desliza sobre la polea, y no se sabe si existe o no existe

fricción entre el plano y el bloque al deslizarse. Cuando este sistema se deja caer, se halla que la polea gira a través de un ángulo θ en el tiempo t y que la aceleración de los bloques es constante. (a) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea? (b) ¿Cuál es la aceleración de los dos bloques? (c) ¿Cuáles son las tensiones en las secciones superior e inferior del cordón? Todas las respuestas deben expresarse en términos de M, I, R, θ, g , y t .

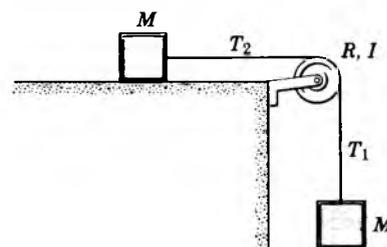


Figura 46 Problema 29.

30. Una rueda de masa M y radio de giro k (véase el problema 11) gira sobre un eje horizontal fijo que pasa por su cubo. Supóngase que el cubo roce al eje de radio a solamente en el punto más alto, siendo μ_k el coeficiente de fricción cinética. Se le da a la rueda una velocidad angular inicial ω_0 . Suponga una deceleración uniforme y halle (a) el tiempo transcurrido y (b) el número de revoluciones antes de que la rueda se detenga por completo.
31. En una máquina Atwood un bloque tiene una masa de 512 g y el otro una masa de 463 g. La polea, que está montada en chumaceras horizontales sin fricción, tiene un radio de 4.90 cm. Cuando es liberada a partir del reposo, se observa que el bloque más pesado cae 76.5 cm en 5.11 s. Calcule la inercia de rotación de la polea.
32. Una rueda en forma de disco uniforme de 23.0 cm de radio y 1.40 kg de masa gira a razón de 840 rev/min en rodamientos sin fricción. Para detener a la rueda, se oprime la zapata de un freno contra el borde de la rueda con una fuerza de 130 N, dirigida radialmente. La rueda completa 2.80 revoluciones antes de detenerse. Halle el coeficiente de fricción entre la zapata del freno y la periferia de la rueda.
33. Una vara de 1.27 m de longitud se mantiene vertical con un extremo sobre el piso y luego se deja caer. Halle la velocidad del otro extremo cuando alcanza el suelo, suponiendo que el extremo del suelo no se deslice.
34. Una esfera hueca, uniforme, gira en torno a un eje vertical en chumaceras sin fricción (Fig. 47). Un cordón delgado pasa alrededor del ecuador de la esfera, sobre una polea, y está unido a un objeto pequeño que, por otra parte, está libre de caer bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad del objeto después de que ha caído una distancia h desde el reposo?
35. Una barra uniforme de acero de 1.20 m de longitud y 6.40 kg de masa tiene unida en cada extremo una pequeña bola de 1.06 kg de masa. La barra está obligada a girar en un plano horizontal con respecto a un eje vertical que pasa

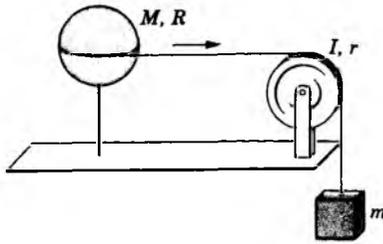


Figura 47 Problema 34.

por su punto medio. En cierto momento se observa que está girando a una velocidad angular de 39.0 rev/s. Debido a la fricción del eje, llega al reposo 32.0 s más tarde. Calcule, suponiendo una torca por fricción constante, (a) la aceleración angular, (b) la torca retardante ejercida por la fricción del eje, (c) la energía disipada por la fricción del eje, y (d) el número de revoluciones ejecutadas durante los 32.0 s. (e) Supóngase ahora que se sabe que la torca por fricción no es constante. ¿Cuál, si hay alguna, de las cantidades (a), (b), (c), o (d) puede calcularse sin requerir ninguna información adicional? Si hay alguna cantidad, dé su valor.

36. Un cuerpo rígido está hecho de tres varillas idénticas aseguradas entre sí en forma de letra H (Fig. 48). El cuerpo está libre de girar en torno a un eje horizontal que pasa por una de las piernas de la H. Se permite que el cuerpo caiga partiendo del reposo desde una posición en que el plano de la H es horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular del cuerpo cuando el plano de la H es vertical?

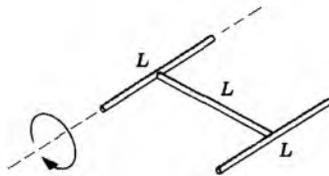


Figura 48 Problema 36.

37. La pala del rotor de un helicóptero tiene una longitud de 7.80 m y una masa de 110 kg. (a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el perno que une a la pala con el eje del rotor cuando éste está girando a razón de 320 rev/min? (Sugerencia: Para este cálculo puede considerarse que la pala es una masa puntual situada en el centro de masa. ¿Por qué?) (b) Calcule la torca que debe ser aplicada al rotor para llevarlo a una velocidad plena desde el reposo en 6.70 s. Ignore la resistencia del aire. (Para este cálculo no puede considerarse que la pala sea una masa puntual. ¿Por qué no? Suponga la distribución de una barra uniforme.)
38. Una chimenea alta se rompe cerca de su base y cae. Expresé (a) la aceleración lineal radial y (b) la aceleración lineal tangencial de la parte superior de la chimenea en función del ángulo θ formado por la chimenea con la vertical. (c) ¿Puede exceder de g la aceleración lineal resultante? (d) La chimenea se rompe durante la caída.

Explique cómo puede suceder esto. (Véase "More on the Falling Chimney", por Albert A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág 351).

39. La longitud del día aumenta alrededor de 1 ms/siglo. Esto se debe primordialmente a las fuerzas de fricción generadas por el movimiento del agua en los mares de poca profundidad del mundo en respuesta a las fuerzas de la marea ejercidas por el Sol y la Luna. (a) ¿En qué cantidad está perdiendo energía cinética de rotación la Tierra? (b) ¿Cuál es la aceleración angular? (c) ¿Qué fuerza tangencial, en las latitudes 60° N y 60° S, ejercen los mares sobre el lecho marino cercano a las costas?
40. Un disco uniforme de radio R y masa M gira a una velocidad angular ω_0 . Está colocado sobre una superficie horizontal plana; el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie es μ_k . (a) Halle la torca por fricción sobre el disco. (b) ¿Cuánto tiempo le tomará al disco llegar al reposo?
41. Un automóvil está equipado con un volante que conserva la energía el cual, en operación, está engranado a la flecha motriz de modo tal que gira a razón de 237 rev/s cuando el automóvil viaja a 86.5 km/h. La masa total del automóvil es de 822 kg, el volante pesa 194 N, y es un disco uniforme de 1.08 m de diámetro. El automóvil desciende por una pendiente de 5.00° , de 1500 m de longitud, partiendo del reposo, con el volante embragado y sin que el motor proporcione potencia alguna. Despreciando la fricción y la inercia de rotación de las ruedas, halle (a) la velocidad del automóvil en el pie de la pendiente, (b) la aceleración angular del volante en el pie de la pendiente, y (c) la potencia absorbida por la rotación del volante en el pie de la pendiente.

Sección 12-6 Movimientos de rotación y de traslación combinados

42. Una esfera sólida de 4.72 cm de radio rueda hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 34.0° . En el fondo del plano inclinado el centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 5.18 m/s. (a) ¿Qué distancia recorrerá la esfera por el plano hacia arriba? (b) ¿Cuánto tiempo le toma regresar al pie del plano? (c) ¿Cuántas rotaciones completa la esfera durante el viaje completo?
43. Un aro que rueda por un plano inclinado con un ángulo de inclinación θ marcha al parejo con un bloque que se desliza por el mismo plano. Demuestre que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano está dado por $\mu_k = \frac{1}{2} \tan \theta$.
44. Un aro de 3.16 m de radio tiene una masa de 137 kg. Rueda a lo largo de un piso horizontal de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 0.153 m/s. ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre el aro para detenerlo?
45. Un automóvil que viaja a 78.3 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de las llantas con respecto al eje? (b) Si el automóvil se detiene uniformemente en 28.6 vueltas de las llantas (sin patinar), ¿cuál será la aceleración angular de las ruedas? (c) ¿Cuánto avanza el automóvil durante este periodo de frenado?

46. Un automóvil de 1040 kg tiene cuatro ruedas de 11.3 kg. ¿Qué fracción de la energía cinética total del automóvil se debe a la rotación de las ruedas en torno a sus ejes? Suponga que las ruedas tienen la misma inercia de rotación que los discos de la misma masa y tamaño. Explique por qué no se necesita conocer el radio de las ruedas.
47. Un yoyo (véase el problema 7) tiene una inercia de rotación de $950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ y una masa de 120 g. El radio de su eje tiene 3.20 mm y su cordón tiene 134 cm de longitud. El yoyo rueda desde el reposo hacia abajo hasta el extremo del cordón. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuánto tiempo le toma llegar al final del cordón? (c) Si el yoyo se queda estancado en el extremo del cordón en un movimiento giratorio puro, ¿cuál es su velocidad angular, en rev/s? (d) Repita (c), pero esta vez suponga que el yoyo se lanza hacia abajo con una velocidad inicial de 1.30 m/s.
48. Una esfera uniforme rueda por un plano inclinado. (a) ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación si la aceleración lineal del centro de la esfera ha de ser de $0.133g$? (b) Para este ángulo, ¿cuál sería la aceleración de un bloque sin fricción que se deslizara por el plano inclinado?
49. Una esfera homogénea arranca desde el reposo en el extremo superior de la pista que aparece en la figura 49 y rueda sin deslizarse hasta que se sale por el extremo de la derecha. Si $H = 60 \text{ m}$ y $h = 20 \text{ m}$ y la pista es horizontal en el extremo de la derecha, determine la distancia a la derecha del punto A a la que la bola golpea la línea horizontal de base.

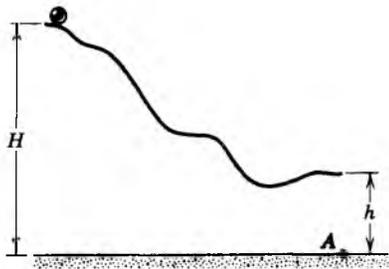


Figura 49 Problema 49.

50. Una canica sólida pequeña de masa m y radio r rueda sin deslizamiento a lo largo de la pista en rizo que se muestra en la figura 50, habiendo sido liberada desde el reposo en algún punto de la sección recta de la pista. (a) ¿Desde qué altura mínima desde el fondo de la pista deberá soltarse la canica con el fin de que se quede en la pista en la parte superior del rizo? (El radio del rizo es R ; suponga que $R \gg r$). (b) Si la canica se suelta desde una altura de $6R$ medida desde el fondo de la pista, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto Q?
51. Un cilindro sólido de longitud L y radio R tiene un peso W . Alrededor del cilindro están enrolladas dos cuerdas, cada una de ellas cerca de cada extremo, y los extremos de las cuerdas están unidos a ganchos en el techo. El cilindro se mantiene horizontalmente con las dos cuerdas exactamente verticales y luego se deja caer (Fig. 51). Halle (a) la tensión en cada cuerda cuando se desenrollan y (b) la aceleración lineal del cilindro cuando cae.

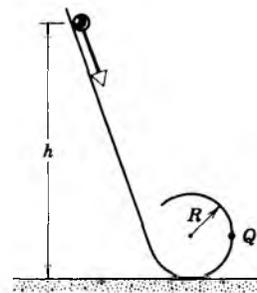


Figura 50 Problema 50.

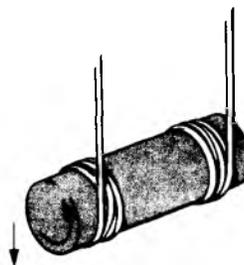


Figura 51 Problema 51.

52. Una longitud L de cinta flexible está enrollada firmemente. Luego se deja que se desenrolle mientras rueda por una pendiente inclinada que forma un ángulo θ con la horizontal, estando clavado el extremo superior de la cinta (Fig. 52). Demuestre que la cinta se desenrolla completamente en un tiempo $T = \sqrt{3L/g} \sin \theta$.

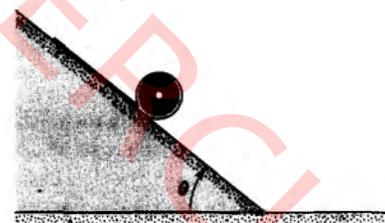


Figura 52 Problema 52.

53. Demuestre que un cilindro se deslizará por un plano inclinado de ángulo de inclinación θ si el coeficiente de fricción estática entre el plano y el cilindro es menor de $\frac{1}{3} \tan \theta$.
54. Un cuerpo rueda horizontalmente sin deslizamiento con una velocidad v . Luego rueda hacia arriba en un montículo hasta una altura máxima h . Si $h = 3v^2/4g$, ¿qué cuerpo puede ser?
55. Un disco uniforme, de masa M y radio R , está sobre un lado inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal carente de fricción. Luego se aplica una fuerza constante F tangencialmente en su perímetro por medio de un cordón enrollado alrededor de su borde. Describa el

movimiento (de rotación o de traslación) posterior del disco.

56. Un aparato para probar la resistencia al patinazo de llantas de automóvil está construido como se muestra en la figura 53. Inicialmente la llanta no tiene movimiento y está sujeta a un bastidor ligero que pivotea libremente en los puntos A y B . La inercia de rotación de la rueda en torno a su eje es de $0.750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, su masa es de 15.0 kg , y su radio es de 30.0 cm . La llanta está situada sobre la superficie de una banda transportadora que se mueve a una velocidad superficial de 12.0 m/s , de modo que AB es horizontal. (a) Si el coeficiente de fricción cinética entre la llanta y la banda transportadora es de 0.600 , ¿qué tiempo necesitará la rueda para alcanzar su velocidad angular final? (b) ¿Cuál será la longitud de la señal que deje el patinazo sobre la superficie del transportador?

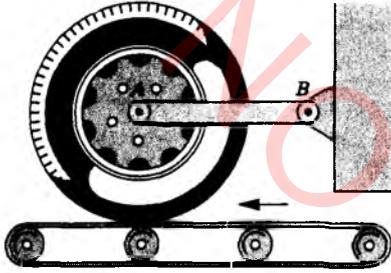


Figura 53 Problema 56.

57. Un cilindro sólido de 10.4 cm de radio y 11.8 kg de masa arranca desde el reposo y rueda sin deslizarse una distancia de 6.12 m por el techo de una casa, el cual tiene una inclinación de 27.0° . (a) ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro en torno a su centro al abandonar el techo de la casa? (b) La pared exterior de la casa tiene 5.16 m de altura. ¿A qué distancia de la pared golpea el cilindro el nivel del suelo? Véase la figura 54.
58. Un cilindro sólido de 23.4 kg de masa y 7.60 cm de radio tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor. La cinta pasa sobre una polea ligera sin fricción hasta un objeto de 4.48 kg de masa, que cuelga verticalmente (véase la Fig. 55). El plano sobre el que se mueve el cilindro está inclinado a 28.3° sobre la horizontal. Halle (a) la aceleración lineal del cilindro al rodar por el plano inclinado y (b) la tensión en la cinta, suponiendo que no hay deslizamiento.

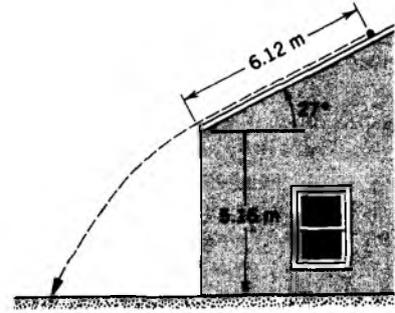


Figura 54 Problema 57.

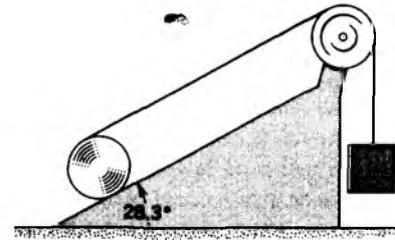


Figura 55 Problema 58.

59. Una estudiante arroja una regla de longitud L hacia arriba en el aire. En el momento en que la regla abandona su mano la velocidad del extremo más cercano de la regla es cero. Ésta completa N vueltas hasta que es atrapada por la estudiante en el punto de liberación inicial. Demuestre que la altura h a la que se elevó el centro de masa es $h = \pi NL/4$.
60. Una bola de billar es golpeada por un taco como se aprecia en la figura 56. La línea de acción del impulso aplicado es horizontal y pasa por el centro de la bola. La velocidad inicial \mathbf{v}_0 de la bola, su radio R , su masa M , y el coeficiente de fricción μ_k entre la bola y la mesa son todos conocidos. ¿Qué tan lejos se moverá la bola antes de que cese su deslizamiento sobre la mesa?



Figura 56 Problema 60.