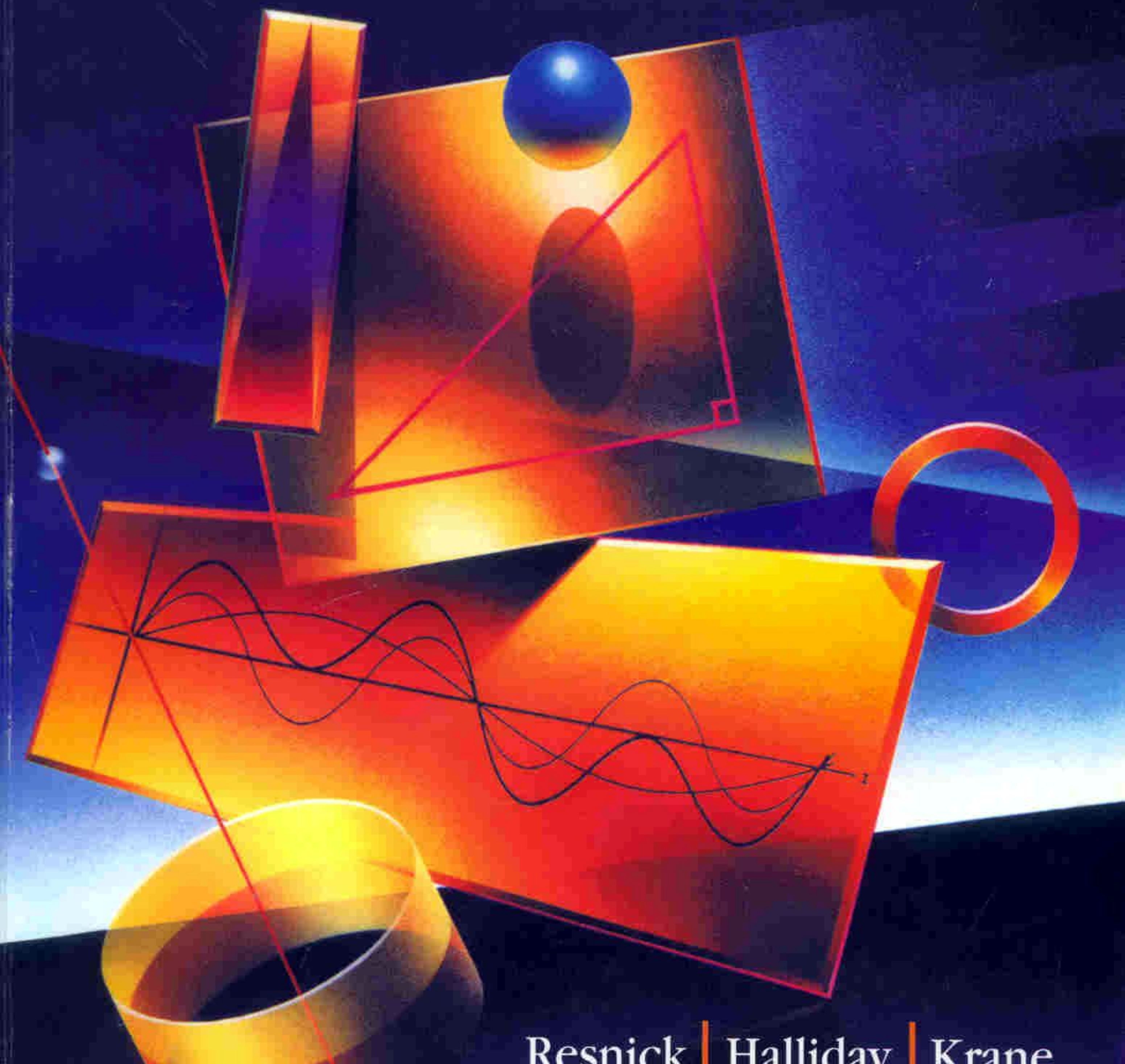
FÍSICA 1

4ª Edicion



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

CAPÍTULO 13 ÍMPETU ANGULAR 305

CAPÍTULO 14 EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 331

CAPÍTULO 15 OSCILACIONES 353

CAPÍTULO 16 GRAVITACIÓN 383

CAPÍTULO 17 ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS 419

CAPÍTULO 18 DINÁMICA DE LOS FLUIDOS 441

CAPÍTULO 19 MOVIMIENTO ONDULATORIO 465

CAPÍTULO 20 ONDAS SONORAS 495

CAPÍTULO 21 LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD 519

CAPÍTULO 22 TEMPERATURA 547

CAPÍTULO 23 LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL 565

CAPÍTULO 24 MECÁNICA ESTADÍSTICA 587

CAPÍTULO 25 EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 607

CAPÍTULO 26 ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 635

APÉNDICES

Física / Robert Resnick ; David Halliday ; Kenneth Krane. 3a. ed. español. México : Compania Editorial Continental, 2001

CAPÍTULO 11

CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN

Hasta aquí hemos estudiado solamente el movimiento de traslación *de los objetos. Así, hemos considerado tanto los cuerpos rígidos (en los que todas sus partes están fijas unas entre sí) como los sistemas no rígidos (cuyas partes pueden moverse unas con relación a las otras).*

El movimiento más general de un cuerpo rígido comprende tanto los movimientos de rotación *como los* de traslación. *En el presente capítulo comenzaremos a considerar este movimiento general. Iniciaremos con la descripción de la rotación con sus variables apropiadas, relacionándolas entre sí; esto pertenece al ámbito de la* cinemática de la rotación, *que es el tema de este capítulo. En los dos capítulos siguientes estudiaremos las relaciones del movimiento de rotación con la interacción de un objeto y su entorno* (dinámica de la rotación).

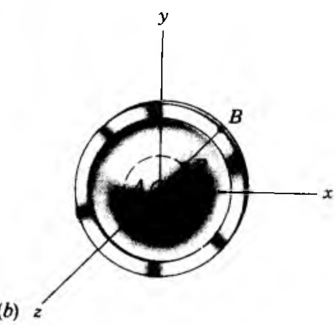
11-1 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

La figura 1 muestra una bicicleta de ejercicio fija. El eje de la rueda frontal al girar está fijo en el espacio; así, definiremos como z al eje de nuestro sistema de coordenadas. Un punto arbitrario P de la rueda está a una distancia r perpendicular al punto A en el eje z. Tracemos la línea AB de modo que pase por P desde A. El movimiento del punto P traza un arco de círculo cuando gira la rueda. No lo hace necesariamente a velocidad constante, pues quien practica el ejercicio puede cambiar el ritmo al que está pedaleando.

El movimiento de la rueda es un ejemplo de la *rotación pura de un cuerpo rígido*, que definiremos como sigue:

> *Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si cada punto del cuerpo (como P en la Fig. 1) se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos deben estar sobre una línea recta común llamada eje de rotación (el eje z de la Fig. 1).*

(a)



(b)

Figura 1 (*a*) La rueda de una bicicleta de ejercicio fija es un ejemplo de la rotación pura de un cuerpo rígido. (*b*) Coordenadas utilizadas para describir la rotación de la rueda. El eje de rotación, que es perpendicular al plano de la figura, es el eje z. Un punto arbitrario P situado a la distancia r del eje A se mueve en un círculo de radio r.

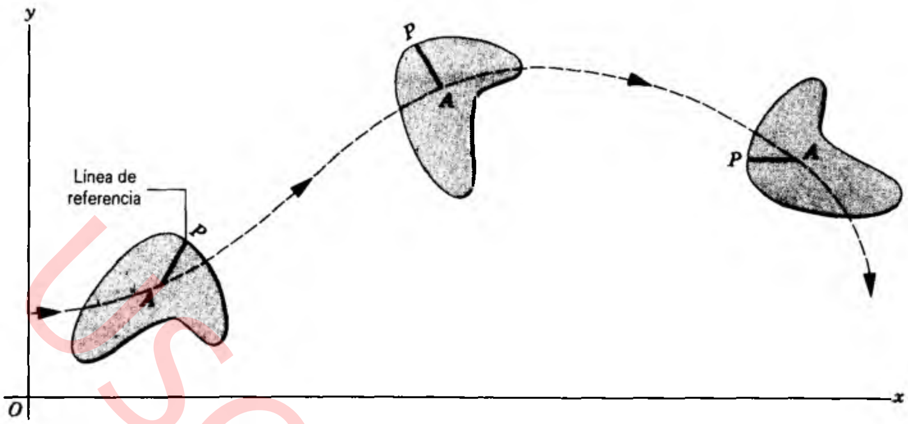


Figura 2 Un cuerpo rígido arbitrario con ambos movimientos de rotación y de traslación. En este caso bidimensional especial, el movimiento de traslación se halla confinado al plano xy. La línea punteada muestra la trayectoria en el plano xy que corresponde al movimiento de traslación del eje de rotación, que es paralelo al eje z a través del punto A. El movimiento de rotación está indicado por la línea AP.

Podemos también caracterizar el movimiento de la rueda por la línea de referencia AB en la figura 1. Al girar la rueda, la línea AB se mueve a través de un cierto ángulo en el plano xy. Otra manera de definir la rotación pura es la siguiente:

> *Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si una línea de referencia perpendicular al eje (como AB en la Fig. 1) se mueve a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo dado como cualquier otra línea de referencia perpendicular al eje del cuerpo.*

En el caso de una rueda de bicicleta ordinaria, la línea AB podría representar uno de los rayos (tomado como radial) de la rueda. La definición anterior significa entonces que, para una rueda en rotación pura, si un rayo gira en un cierto ángulo $\Delta\phi$ en el intervalo de tiempo Δt, entonces cualquier otro rayo deberá también girar a través de $\Delta\phi$ durante ese mismo intervalo.

El movimiento general de un objeto rígido incluirá componentes de traslación y de rotación, como, por ejemplo, en el caso de una rueda de bicicleta *móvil*. El punto P en tal rueda se mueve en círculo de acuerdo con un observador en el mismo marco de referencia que la rueda (el corredor, por ejemplo); pero otro observador fijo en el suelo describiría el movimiento de manera diferente. En casos aún más complejos, como el de una pelota de fútbol que vuele bamboleándose, podemos tener una combinación de un movimiento de traslación, un movimiento de rotación con respecto a un eje, y una variación en la dirección del eje. En general, la descripción tridimensional de un cuerpo rígido requiere de seis coordenadas; tres para ubicar el centro de masa, dos ángulos (como la latitud y la longitud) para orientar el eje de rotación, y un ángulo para describir las rotaciones alrededor del eje. La figura 2 muestra un cuerpo rígido bidimensional arbitrario que experimenta movimientos de rotación y de traslación. En este caso sólo se necesitan tres coordenadas: dos para el centro de masa y una para la coordenada angular de una línea de referencia en el cuerpo.

En el presente capítulo consideramos únicamente el movimiento de rotación pura. (En el capítulo siguiente se estudiará el caso más complicado de la rotación y la traslación combinadas.) Así, consideramos sólo objetos rígidos, en los que no existe movimiento relativo de las partes al girar el objeto; por lo tanto, el caso de un líquido dentro de un recipiente en rotación, por ejemplo, no lo estudiaremos ahora.

11-2 LAS VARIABLES DE LA ROTACIÓN

La figura 3*a* muestra un cuerpo de forma arbitraria que gira con respecto al eje z. Podemos decir exactamente del cuerpo completo en rotación dónde se encuentra éste dentro de nuestro marco de referencia, si conocemos la ubicación de un solo punto P del cuerpo en este marco. Así, para la cinemática de este problema, necesitamos considerar solamente el movimiento (bidimensional) de un punto situado en el círculo de radio r igual a la distancia perpendicular desde P hasta el punto A sobre el eje z. La figura 36*b* muestra una sección del cuerpo paralela al plano xy que incluye al punto P.

El ángulo ϕ en la figura 3b es la posición angular de la línea de referencia AP con respecto al eje x'. *Arbitrariamente elegimos como sentido positivo de la rotación el contrario al de las manecillas del reloj*, de modo que (en la Fig. 3*b*) ϕ aumenta para una rotación en sentido antihorario y disminuye para una rotación en el sentido de las manecillas, de acuerdo con un observador que esté más alejado a lo largo del eje positivo z que el objeto en rotación.

Es conveniente medir ϕ en radianes en lugar de medirlo en grados. Por definición ϕ está dado en radianes (rad) por la relación

$$\phi = s/r, \tag{1}$$

donde s es la longitud de arco que se muestra en la figura 3*b*.

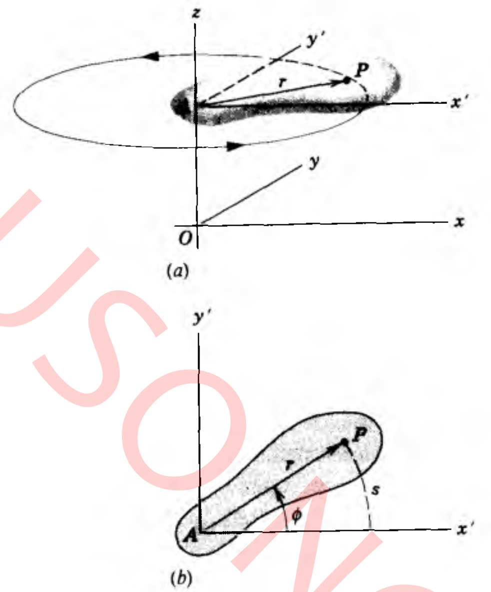


Figura 3 (*a*) Un cuerpo rígido arbitrario que gira en torno al eje *z*. (*b*) Corte de cuerpo en sección transversal. Los ejes x' y y' son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, pero pasan por el punto *A*. La línea de referencia *AP*, que une un punto *P* del cuerpo con el eje, está ubicada instantáneamente a un ángulo ϕ con respecto al eje x'. El punto *P* se mueve a través de una longitud de arco *s* cuando la línea *AP* gira a través del ángulo ϕ.

El radián, por ser la razón de dos longitudes, es un número puro y no tiene dimensiones. Puede, por lo tanto, incluirse en las unidades que corrspoden a las cantidades físicas, o puede despreciarse, según nos convenga.

Puesto que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, de la ecuación 1 se deduce que una partícula que se mueva en un arco de longitud igual a la circunferencia debe barrer un ángulo de 2π radianes. Así,

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} = 360°,$$

o sea

$$1 \text{ radián} = 57.3° = 0.159 \text{ revoluciones.}$$

Hagamos que el cuerpo de la figura 3*b* gire en sentido contrario a las manecillas del reloj. En el tiempo t_1 la posición angular de la línea *AP* es ϕ_1, y en un tiempo t_2 más tarde su posición angular es ϕ_2. Esto se muestra en la figura 4, la cual da las posiciones de *P* y de la línea de referencia en estos tiempos; por simplificación, hemos omitido el croquis del propio cuerpo.

El *desplazamiento angular* de *P* será $\phi_2 - \phi_1 = \Delta$ durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$. Definimos a la *velocidad angular promedio* $\bar{\omega}$ de la partícula *P* en este intervalo de tiempo así:

$$\bar{\omega} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \tag{2}$$

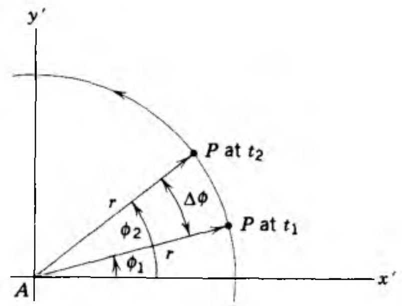


Figura 4 La línea de referencia *AP* de la figura 3*b* está en la coordenada angular ϕ_1 en el tiempo t_1 y en la coordenada angular ϕ_2 en el tiempo t_2. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el desplazamiento angular neto es $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

La *velocidad angular instantánea* ω es el límite alcanzado por esta razón cuando Δt tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

o sea

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \tag{3}$$

Para un cuerpo rígido en rotación pura, todas las líneas fijas en él que sean perpendiculares al eje de rotación giran a través del mismo ángulo en el mismo tiempo, de modo que la velocidad angular ω alrededor de este eje es la misma para cada punto del cuerpo. Entonces ω es caracterísica del cuerpo como un todo. La velocidad angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso (T^{-1}); sus unidades pueden ser radianes/segundo (rad/s) o revoluciones/segundo (rev/s).

Si la velocidad angular de *P* no es constante, entonces el punto tiene una aceleración angular. Sean ω_1 y ω_2 las velocidades angulares instantáneas en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente; entonces, la *aceleración angular promedio* $\bar{\alpha}$ del punto *P* se define como

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{4}$$

La *aceleración angular instantánea* es el límite de esta razón cuando Δt tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

o sea

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{5}$$

Puesto que ω es la misma para todos los puntos de un cuerpo rígido, se deduce de la ecuación 5 que α debe ser la misma para cada punto, y entonces α, como ω, es una característica del cuerpo como un todo. La aceleración angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso al cuadrado (T^{-2}); sus unidades pueden ser radianes/segundo^2 (rad/s2) o revoluciones/segundo^2 (rev/s^2).

En vez de la rotación de un cuerpo rígido, podíamos haber considerado el movimiento de una partícula aislada en una trayectoria circular. Esto es, P en la figura 4 puede representar a una partícula de masa m, obligada a moverse en un círculo de radio r (quizás sostenida por una barra rígida carente de masa de longitud r pivotada en el eje z). Todos los resultados derivados en esta sección son válidos ya sea que veamos a P como un punto matemático o como una partícula física; podríamos, por ejemplo, referirnos a la velocidad angular o a la aceleración angular de la *partícula P* mientras gira en torno al eje z. Más adelante hallaremos útil ver al cuerpo rígido en rotación de la figura 3 como un conjunto de partículas, cada una de las cuales está girando con respecto al eje a la misma velocidad angular y a la misma aceleración angular.

La rotación de una partícula (o de un cuerpo rígido) *con respecto a un eje fijo* tiene una correspondencia formal con el movimiento de traslación de una partícula (o de un cuerpo rígido) *a lo largo de una dirección fija*. Las variables cinemáticas son ϕ, ω, y α en el primer caso y x, v, y a en el segundo. Estas cantidades se corresponden en pares: ϕ a x, ω a v, y α a a. Nótese que las cantidades angulares difieren dimensionalmente de las cantidades lineales correspondientes por un factor de longitud. Nótese, además, que las seis cantidades pueden ser tratadas como escalares en este caso especial. Por ejemplo, una partícula en cualquier instante puede moverse en una dirección o en otra a lo largo de su trayectoria en línea recta, correspondiendo a un valor de v positivo o negativo; del mismo modo, una partícula en cualquier instante puede girar en una dirección o en otra con respecto a su eje fijo, correspondiendo a un valor de ω positivo o negativo.

Cuando, en el movimiento de traslación, eliminamos la restricción de que el movimiento sea a lo largo de una línea recta y consideramos el caso general del movimiento en tres dimensiones a lo largo de una trayectoria curva, las variables escalares x, v, y a deben ser reemplazadas por los vectores cinemáticos **r**, **v**, y **a**. En la sección 11-4 veremos hasta qué punto las variables cinemáticas de rotación se revelan como auténticos vectores cuando eliminamos la restricción de un eje de rotación fijo.

11-3 ROTACIÓN CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Hemos visto (en el capítulo 2) que, para el movimiento de traslación de una partícula o de un cuerpo rígido a lo largo de una dirección fija, como el eje x, el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el cual la aceleración a es cero. El siguiente tipo más sencillo corresponde a a = una constante (distinta de cero); para este movimiento derivamos las ecuaciones de la tabla 2 del capítulo 2, que relacionan las variables cinemáticas x, v, a, y t en todas las combinaciones posibles.

Para el movimiento de rotación de una partícula o de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el que la aceleración angular α es cero (como el movimiento circular uniforme). El siguiente tipo más sencillo de movimiento, en el que α = una constante (distinta de cero), corresponde exactamente al movimiento lineal con a = una constante (distinta de cero). Como antes, podemos derivar cinco ecuaciones que enlacen a las cuatro variables cinemáticas ϕ, ω, α, y t en todas las combinaciones posibles. Estas ecuaciones angulares pueden ser derivadas, mediante los métodos que empleamos para derivar las ecuaciones lineales, o pueden escribirse simplente, sustituyendo las cantidades angulares correspondientes por la cantidades lineales en las ecuaciones lineales.

Como ejemplo, derivemos la expresión que enlaza a ω, α, y t. Comenzaremos por reescribir la ecuación 5 como

$$d\omega = \alpha\, dt.$$

Integramos ahora el lado izquierdo desde ω_0 (la velocidad angular en el tiempo $t = 0$) hasta ω (la velocidad angular en el tiempo t), y a la derecha desde el tiempo 0 hasta el tiempo t:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt = \alpha \int_0^t dt,$$

donde el último paso puede ser considerado *solamente* cuando la aceleración angular α es constante. Llevando a cabo la integración, obtenemos

$$\omega - \omega_0 = \alpha t,$$

o sea

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \tag{6}$$

Esto es el análogo de rotación de la ecuación 15 del capítulo 2, $v = v_0 + at$. Nótese que podríamos obtener la expresión de rotación sustituyendo a ω por v y a α por a en la expresión de la traslación.

Por medio de tales derivaciones, podemos hallar cinco expresiones básicas de la cinemática de la rotación con una aceleración angular constante, que se listan en la tabla 1 junto con sus contrapartes de la traslación. La ecuación 7 puede derivarse escribiendo la ec. 3 como $d\phi = \omega\, dt$ e integrando. Las ecuaciones 8, 9, y 10 pueden derivarse eliminando, respectivamente, a t, α, y ω_0 de las ecuaciones 6 y 7 (que pueden ser consideradas como las dos ecuaciones básicas, porque se derivan de las definiciones

TABLA 1 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN LINEAL O ANGULAR CONSTANTE

Número de la ecuación (capítulo 2)	*Movimiento de traslación (dirección fija)*	*Movimiento de rotación (eje fijo)*	*Número de la ecuación (este capítulo)*
(15)	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(6)
(19)	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(7)
(20)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$	(8)
(21)	$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t$	$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}t$	(9)
(22)	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10)

de la aceleración angular y de la velocidad angular). Usted podría comprobar dimensionalmente todas las ecuaciones antes de verificarlas. Ambos grupos de ecuaciones se aplican tanto para partículas como para cuerpos rígidos.

El sentido positivo de las cantidades angulares ω y α se halla determinado por la dirección en la cual ϕ crece. A partir de la ecuación 3, vemos que ω es positiva si ϕ crece con el tiempo (esto es, el objeto está girando en dirección contraria a las manecillas del reloj). De igual forma, a partir de la ecucaión 5, vemos que α es positiva si ω crece con el tiempo, aun si ω es negativa y se torna menos negativa. Estas convenciones son similares a las convenciones de signo correspondientes para las cantidades lineales.

Problema muestra 1 Partiendo desde el reposo en el tiempo $t = 0$, una piedra abrasiva tiene una aceleración angular constante α de 3.2 rad/s². En $t = 0$ la línea de referencia AB de la figura 5 es horizontal. Halle (*a*) el desplazamiento angular de la línea AB (y por lo tanto de la piedra abrasiva) y (*b*) la velocidad angular de la piedra abrasiva 2.7 s después.

Solución (*a*) α y t están dadas; deseamos hallar ϕ. De aquí que utilicemos la ecuación 7 (véase la tabla 1):

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

En $t = 0$, tenemos que $\phi_0 = 0$, $\omega = \omega_0$, y $\alpha = 3.2$ rad/s². Por lo tanto, después de 2.7 s,

$$\phi = 0 + (0)(2.7\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(3.2\ \text{rad/s}^2)(2.7\ \text{s})^2$$
$$= 11.7\ \text{rad} = 1.9\ \text{rev}.$$

(*b*) α y t están dadas; deseamos hallar ω. Por lo tanto, usaremos la ecuación 6:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (3.2\ \text{rad/s}^2)(2.7\ \text{s})$$
$$= 8.6\ \text{rad/s} = 1.4\ \text{rev/s}.$$

Problema muestra 2 Supongamos que la potencia que mueve a la rueda abrasiva del problema muestra 1 es desconectada cuando la rueda está girando a una velocidad angular de 8.6 rad/s. Una pequeña fuerza de fricción en la flecha causa una deceleración angular constante, y la rueda llega finalmente al reposo en un tiempo de 192 s. Halle (*a*) la aceleración angular y (*b*) el ángulo total girado durante la deceleración.

Solución (*a*) Dadas $\omega_0 = 8.6$ rad/s y $t = 192$ s, buscamos α y, por lo tanto, utilizamos la ecuación 6 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$), o sea

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 8.6\ \text{rad/s}}{192\ \text{s}} = -0.045\ \text{rad/s}^2.$$

(*b*) Según la ecuación 9 de la tabla 1 tenemos que

$$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}t = 0 + \frac{8.6\ \text{rad/s} + 0}{2}(192\ \text{s})$$
$$= 826\ \text{rad} = 131\ \text{rev}.$$

11-4 CANTIDADES DE ROTACIÓN COMO VECTORES

El desplazamiento lineal, la velocidad y la aceleración son vectores. Las cantidades angulares correspondientes *pueden ser* también vectores, ya que además de su magnitud debemos especificar también su dirección, es decir, la dirección del eje de rotación en el espacio. Puesto que hemos considerado la rotación sólo en torno a un eje fijo, hemos podido tratar a ϕ, ω, y α como cantidades escalares. Si cambia la dirección del eje, sin embargo, ya no podemos eludir la pregunta, "¿son vectores las cantidades de rotación?"

En la sección 3-2 aprendimos que, para representar a un vector, una cantidad física no debe tener solamente magnitud y dirección, sino que debe obedecer también a las leyes de la suma vectorial. Sólo experimentalmente podemos discernir si una cantidad física obedece a estas leyes.

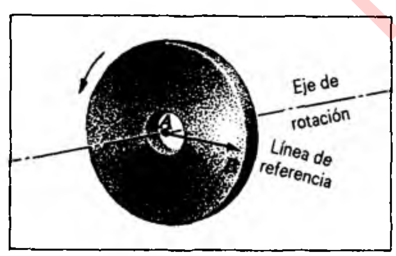


Figura 5 Problema muestra 1. La línea de referencia AB es horizontal en $t = 0$ y gira con la piedra abrasiva.

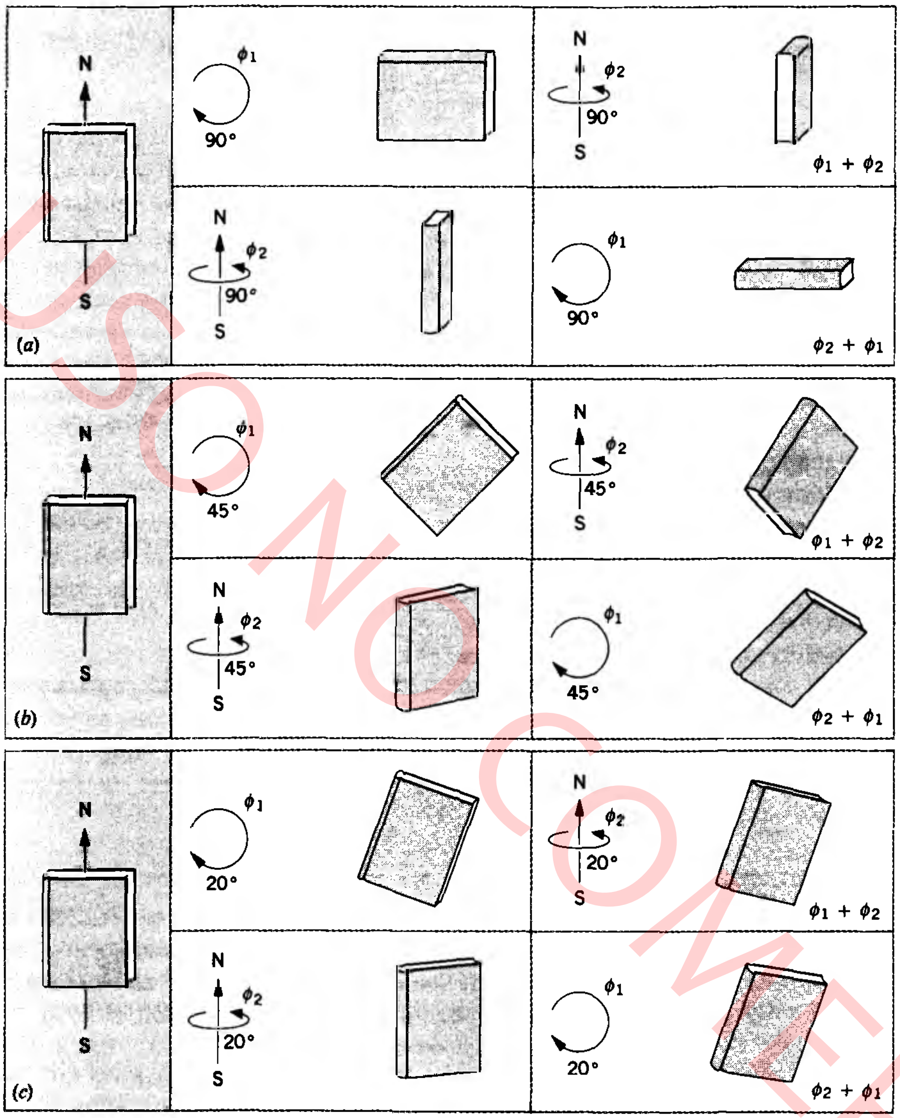


Figura 6 (*a*) Al libro se le dan dos giros de 90°, ϕ_1 alrededor de un eje que forma un ángulo recto con la página y ϕ_2 alrededor de un eje en la página señalada con norte-sur. Como se muestra, la orientación final depende del orden en que efectuemos estos giros. Así, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ difiere del de $\phi_2 + \phi_1$. (*b*) En giros de 45°, la diferencia entre las orientaciones finales es más pequeña de lo que era en el caso del giro de 90°. (*c*) En giros de 20°, las orientaciones finales son casi idénticas. Las orientaciones finales serán más parecidas al volverse más pequeños los ángulos ϕ_1 y ϕ_2.

Veamos primero el desplazamiento angular ϕ. La magnitud del desplazamiento angular de un cuerpo es el ángulo al cual gira el cuerpo. Sin embargo, los desplazamientos angulares no son vectores porque no se suman como vectores. Por ejemplo, demos dos rotaciones sucesivas ϕ_1 y ϕ_2 a un libro que inicialmente está en un plano horizontal (Fig. 6). Sea ϕ_1 una rotación a 90° en sentido de las manecillas del reloj en torno al eje vertical que pasa por el centro del libro visto éste desde arriba. Sea ϕ_2 un giro de 90° en sentido de las manecillas del reloj alrededor de un eje norte-sur que pasa por el centro del libro según lo vemos mirando al norte. En un caso, apliquemos la operación ϕ_1 primero, y luego ϕ_2. En el otro caso, apliquemos primero la operación ϕ_2 y luego ϕ_1. Conviene que usted haga la prueba. Ahora, si los desplazamientos angulares son cantidades vectoriales, deben sumarse como vectores. En particular, deben obedecer a la ley asociativa de la suma de vectores, **A** + **B** = **B** + **A**, que nos dice que el orden en que sumemos a los vectores no afecta su suma. Como se indica en la figura 6*a*, esta ley no tiene

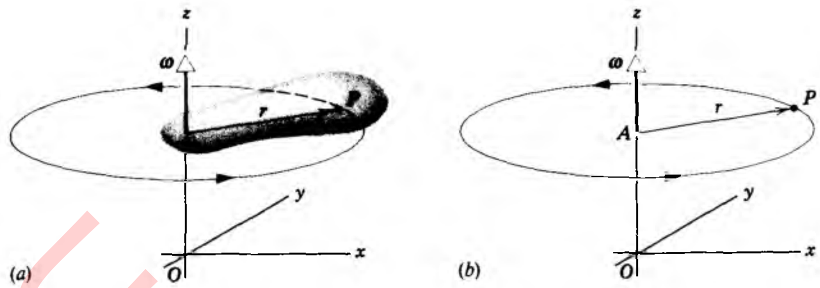


Figura 7 El vector de la velocidad angular de (*a*) un cuerpo rígido al girar y (*b*) una partícula al girar, ambos considerados con respecto a un eje fijo.

validez para desplazamientos angulares finitos, y entonces $\phi_1 + \phi_2 \neq \phi_2 + \phi_1$, donde ϕ_1 y ϕ_2 significan las operaciones mostradas en la figura 6*a*. Por lo tanto, los desplazamientos angulares finitos no pueden ser representados como cantidades vectoriales.

A medida que los dos desplazamientos angulares se hagan más pequeños, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ se acerca al de la operación $\phi_1 + \phi_2$ (Fig. 6*b*, *c*). Si los desplazamientos angulares se hacen infinitesimales, el orden de la suma ya no altera el resultado; así, $d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1$. De aquí que *los desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser representados como vectores.*

Las cantidades definidas en términos de desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser también vectores. Por ejemplo, la velocidad angular es $\omega = d\phi/dt$. Puesto que $d\phi$ es un vector y dt es un escalar, el cociente ω es un vector. *Por lo tanto, la velocidad angular puede ser representada como un vector.* En la figura 7*a*, por ejemplo, representamos a la velocidad angular ω del cuerpo rígido en rotación por una flecha dirigida a lo largo del eje de rotación; en la figura 7*b* representamos a la rotación de una partícula P en torno a un eje fijo precisamente de la misma manera. La longitud de la flecha se hace proporcional a la magnitud de la velocidad angular. El sentido de la rotación determina la dirección en la que la flecha apunta a lo largo del eje. Por convención, si los dedos de la *mano derecha* se doblan alrededor del eje en dirección de la rotación del cuerpo, el pulgar extendido apunta a lo largo de la dirección del vector de la velocidad angular. Para la rueda de la figura 1, por lo tanto, el vector de la velocidad angular apunta perpendicularmente a la página (en la dirección de z negativa) si el corredor está pedaleando hacia adelante. En la figura 3*b*, ω es perpendicular a la página, apuntando hacia arriba y afuera correspondiendo a la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. La velocidad angular de la tornamesa de un fonógrafo (que gira en sentido de las manecillas si se la ve desde arriba) es un vector que apunta hacia abajo. Nótese que nada se mueve en dirección al vector de la velocidad angular. El vector representa la velocidad angular del movimiento de rotación que tiene lugar en un plano perpendicular a él.

La aceleración angular es también una cantidad vectorial. Esto se deduce de la definición $\alpha = d\omega/dt$, en la cual $d\omega$ es un vector y dt un escalar. Más adelante encontraremos otras cantidades de rotación que son vectores, como la torca y el ímpetu angular. El uso de la regla de la mano derecha para definir la dirección de los vectores $d\phi$, ω, y α conduce a un formalismo vectorial que es consistente con todas las cantidades de rotación.

Problema muestra 3 Un disco gira en una flecha horizontal montada en chumaceras, a una velocidad angular ω_1 de 84 rad/s como en la figura 8*a*. Todo el conjunto de disco y flecha está colocado sobre una tornamesa que gira con respecto a un eje vertical a ω_2 = 43 rad/s, en sentido antihorario vista desde arriba. Describa la rotación del disco vista por un observador dentro del salón.

Solución El disco está sujeto a dos velocidades angulares simultáneamente; podemos describir su movimiento resultante por la suma vectorial de estos vectores. La velocidad angular ω_1 asociada con la rotación de la flecha tiene una magnitud de 84 rad/s y tiene lugar en torno a un eje que no está fijo pero que, visto por un observador situado dentro del salón, gira en un plano horizontal a 43 rad/s. La velocidad angular ω_2 asociada con la tornamesa está fija verticalmente y tiene una magnitud de 43 rad/s.

La velocidad angular resultante ω del disco es la suma vectorial de ω_1 y ω_2. La magnitud de ω es

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(84\ \text{rad/s})^2 + (43\ \text{rad/s})^2} = 94\ \text{rad/s}.$$

La dirección de ω no está fija en el marco de referencia de nuestro observador sino que gira a la misma razón angular que

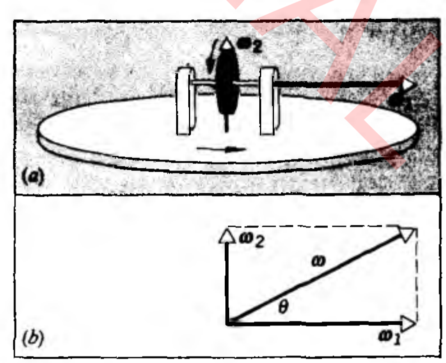


Figura 8 Problema muestra 3. (*a*) Un disco que gira sobre una tornamesa que también gira. (*b*) La suma de los vectores de la velocidad angular.

la tornamesa. El vector $\boldsymbol{\omega}$ no está en el plano horizontal sino que apunta hacia arriba en un ángulo θ (véase la Fig. 8*b*), donde

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tan^{-1}\frac{43\ \text{rad/s}}{84\ \text{rad/s}} = 27°.$$

Podemos describir el movimiento del disco como una sola rotación en torno a este nuevo eje (cuya dirección en el marco de referencia de nuestro observador está cambiando con el tiempo como se describió anteriormente) en una cantidad angular de 94 rad/s. ¿Cómo cambiaría esta situación si la dirección de rotación del disco, o de la tornamesa, o de ambas, se invirtieran?

11-5 RELACIONES ENTRE VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA ESCALAR

En las secciones 4-4 y 4-5 discutimos la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve en círculo. Cuando un cuerpo rígido gira con respecto a un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve en círculo. De aquí que podamos describir al movimiento de tal partícula ya sea en variables lineales o en variables angulares. La relación entre las variables lineal y angular nos permite ir y venir de una descripción a la otra, resultando muy útil.

Consideremos una partícula en P situada en un cuerpo rígido, a una distancia perpendicular r del eje que pasa por A, como en la figura 7. Esta partícula se mueve en un círculo de radio r. La posición angular ϕ de la línea de referencia AP se mide con respecto al eje x o el x', como en la figura 3*b*. La partícula se mueve a través de una distancia s a lo largo del arco cuando el cuerpo gira en un ángulo ϕ, de modo que

$$s = \phi r, \tag{11}$$

donde ϕ está en radianes.

Al diferenciar ambos lados de esta ecuación respecto al tiempo, y observando que r es constante, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\, r.$$

Pero ds/dt es la velocidad lineal (tangencial) de la partícula en P y $d\phi/dt$ es la velocidad angular ω del cuerpo que gira, de modo que

$$v = \omega r. \tag{12}$$

Ésta es una relación entre las *magnitudes* de la velocidad lineal tangencial y de la velocidad angular; la velocidad lineal de una partícula en movimiento circular es el producto de la velocidad angular y la distancia r de la partícula desde el eje de rotación.

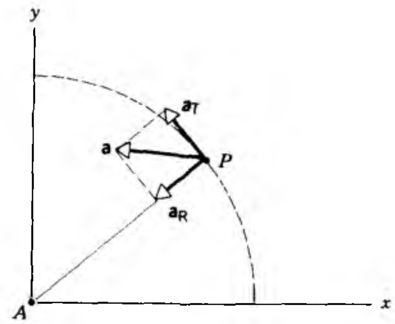


Figura 9 Las componentes radial y tangencial de la aceleración de una partícula en el punto P de un cuerpo rígido que gira en torno al eje z.

Al diferenciar la ecuación 12 con respecto al tiempo, tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\, r.$$

Pero dv/dt es la magnitud de la componente *tangencial* a_T de la aceleración de la partícula (véase la sección 4-5), y $d\omega/dt$ es la magnitud de la aceleración angular del cuerpo que gira, de modo que

$$a_T = \alpha r. \tag{13}$$

De aquí que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración lineal de una partícula en movimiento circular sea el producto de la magnitud de la aceleración angular y la distancia r de la partícula desde el eje de rotación.

Hemos visto en la sección 4-4 que la componente *radial* a_R de la aceleración es v^2/r para una partícula que se mueve en círculo. Esto puede ser expresado en términos de la velocidad angular usando la ecuación 12. Tenemos

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \tag{14}$$

En la figura 9 se muestra la aceleración resultante **a** del punto P.

Las ecuacioanes 11 a 14 nos permiten describir el movimiento de un punto en un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo *ya sea* en variables angulares *o* en variables lineales. Podríamos preguntar por qué necesitamos las variables angulares cuando ya estamos familiarizados con las variables lineales equivalentes. La respuesta es que la descripción angular ofrece una ventaja distinta sobre la descripción lineal cuando deben considerarse varios puntos del mismo cuerpo en rotación. En un cuerpo en rotación, los puntos que están a diferentes distancias del eje no tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración *lineales*, sino que *todos* los puntos de un cuerpo rígido que giran en torno a un eje fijo tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración *angulares* en cualquier instante. Usando las variables angulares podemos describir el movimiento de todo el cuerpo de manera sencilla.

La figura 10 muestra un ejemplo interesante de la razón entre las variables lineales y angulares. Cuando una chimenea alta es demolida por una carga explosiva colocada en su base, a menudo se quebrará al caer, comenzando la rotura hacia el lado de abajo de la chimenea.

Antes de la rotura, la chimenea es un cuerpo rígido, que pivotea en torno a un eje cercano a su base con una cierta aceleración angular α. Según la ecuación 13, la parte superior de la chimenea tiene una aceleración tangencial a_T dada por αL, donde L es la longitud de la chimenea. La componente vertical de a_T puede exceder fácilmente de g, la aceleración de la caída libre. Esto es, la parte superior de la chimenea está cayendo hacia abajo con una aceleración vertical mayor que la de un ladrillo en caída libre.

Esto puede suceder solamente mientras la chimenea permanezca como un cuerpo rígido aislado. Dicho de otra manera, la parte del fondo de la chimenea, al actuar en el mortero que mantiene unidos a los ladrillos, debe "jalar hacia abajo" de la parte superior de la chimenea para provocar una caída tan rápida. Esta fuerza cortante es a menudo mayor de lo que el mortero puede tolerar, y la chimenea se rompe. La chimenea ha pasado a ser ahora dos cuerpos rígidos, cuya parte superior está en caída libre llegando al suelo más tarde de lo que lo haría si la chimenea no se hubiese roto.

Figura 10 Una chimenea, al caer, a menudo no es lo suficientemente fuerte como para proporcionar la aceleración tangencial de gran radio que se necesitaría si todo el objeto fuese a girar como un cuerpo rígido con aceleración angular constante. Para una descripción completa de este fenómeno, véase "More on the Falling Chimney", por A. A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág. 351.

Problema muestra 4 Si el radio de la piedra abrasiva del problema muestra 1 es de 0.24 m, calcule (*a*) la velocidad lineal o tangencial de un punto en la periferia, (*b*) la aceleración tangencial de un punto en la periferia, y (*c*) la aceleración radial de un punto en la periferia, al final de 2.7 s. (*d*) Repita para un punto a la mitad de la distancia entre el centro y la periferia, es decir, en $r = 0.12$ m.

Solución Tenemos que $\alpha = 3.2$ rad/s², $\omega = 8.6$ rad/s después de 2.7 s, y $r = 0.24$ m. Entonces,

(*a*) $v = \omega r = (8.6 \text{ rad/s})(0.24 \text{ m}) = 2.1$ m/s;

(*b*) $a_T = \alpha r = (3.2 \text{ rad/s}^2)(0.24 \text{ m}) = 0.77 \text{ m/s}^2$;

(c) $a_R = \omega^2 r = (8.6 \text{ rad/s})^2(0.24 \text{ m}) = 18 \text{ m/s}^2$.

(*d*) Las variables *angulares* son las mismas para este punto en $r = 0.12$ m que para un punto de la periferia. Esto es, una vez más $\alpha = 3.2$ rad/s² y $\omega = 8.6$ rad/s. Usando las ecuaciones 12 a 14 con $r = 0.12$ m, obtenemos para este punto

$$v = 1.0 \text{ m/s}, \qquad a_T = 0.38 \text{ m/s}^2, \qquad a_R = 8.9 \text{ m/s}^2.$$

Éstas son cada una la mitad de sus valores respectivos para el punto de la periferia. Las variables lineales son proporcionales al radio desde el eje de rotación.

Nótese una vez más que, en las ecuaciones que implican variables angulares *solamente*, como las listadas en la tabla 1, usted puede expresar las cantidades angulares en cualquier unidad angular (grados, radianes, revoluciones), en tanto se haga así de manera consistente. Sin embargo, en las ecuaciones en que se mezclan cantidades lineales y angulares, como las ecuaciones 11, 12, 13, y 14, *se deberán* de expresar las cantidades angulares en radianes, como lo hemos hecho en este problema muestra. Debemos hacerlo así porque las ecuaciones 12, 13, y 14 se basaron en la ecuación 11, que define, en efecto, la medida radián.

11-6 RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA VECTORIAL *(Opcional)*

En la sección anterior expresamos a las variables tanto lineales como angulares en forma escalar. Regresaremos ahora a los métodos vectoriales haciendo un análisis similar al de la sección 4-5, pero utilizando aquí variables angulares. Continuaremos trabajando con el cuerpo rígido que gira en torno al eje fijo, como en la figura 3.

La figura 11*a* muestra una partícula *P* en el cuerpo rígido en rotación de la figura 3. (Aquí, por conveniencia, hemos eliminado incluso el perfil del cuerpo, mostrando solamente la partícula en *P* y el círculo que describe cuando gira el cuerpo.) El cuerpo puede tener cualquier aceleración angular, incluso una aceleración no constante. Como en la figura 7*b*, el vector $\boldsymbol{\omega}$ representa la velocidad angular de la partícula situada en *P* en el tiempo elegido *t*, vector que es paralelo al eje *z* y que se ha representado en la figura 11*a* en el origen, para mayor conveniencia.

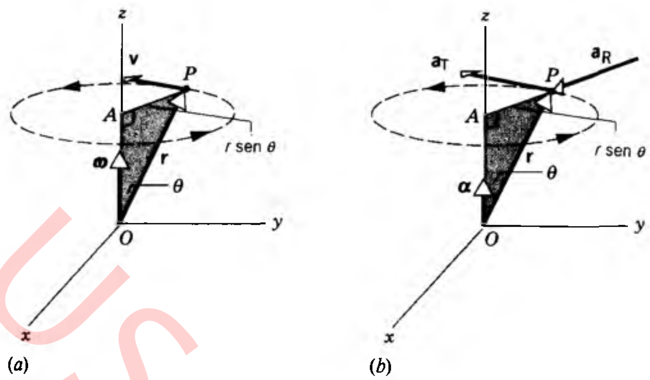


Figura 11 (*a*) Una partícula en *P*, en el cuerpo rígido en rotación de la Fig. 3 está ubicada en **r** con respecto al origen *O*. La partícula tiene una velocidad angular ω (dirigida a lo largo del eje *z*) y una velocidad tangencial **v**. (*b*) La partícula situada en *P* tiene una aceleración angular α a lo largo del eje *z*. La partícula tiene también una aceleración tangencial $\mathbf{a}_T$ y una aceleración radial $\mathbf{a}_R$.

La partícula *P* está ubicada en el sistema de coordenadas tridimensionales de la figura 11*a* por el vector de posición **r** *trazado desde el origen*. Esto representa un cambio en la notación acostumbrada, donde *r* representaba la distancia *perpendicular* desde *P* hasta el eje *z* (véase la Fig. 3). En la figura 11, aquella distancia perpendicular es ahora *r* sen θ.

A partir de la ecuación 12 podemos hallar la magnitud de la velocidad de la partícula *P* (teniendo presente que *r* de la ecuación 12 es ahora *r* sen θ):

$$v = \omega r \text{ sen } \theta. \tag{15}$$

Aquí ω es la magnitud del vector ω en la figura 11, *r* es la magnitud del vector **r**, y θ es el ángulo entre estos dos vectores.

La ecuación 15 tiene la misma forma que la ecuación 16 del capítulo 3 para la magnitud del producto cruz o producto vectorial entre dos vectores: Si **a** y **b** son dos vectores cualesquiera, su producto vectorial **c** tiene la magnitud $c = ab$ sen θ, donde es el ángulo entre **a** y **b**. La comparación con la ecuación 15 sugiere que podemos expresar la velocidad como un producto vectorial:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{16}$$

La ecuación 16 ciertamente da la magnitud correcta para **v** porque, como hemos visto, la definición de la magnitud del producto vectorial, nos dará la ecuación 15. Veamos si la ecuación 16 nos da también la dirección correcta para **v**.

Según la definición del producto vectorial en la sección 3-5, si **c** = **a** × **b**, entonces el vector **c** está a lo largo de una línea en ángulo recto con el plano formado por **a** y **b**. La dirección de **c** queda determinada por la regla de la mano derecha, en la cual damos un giro al *primer* vector **a** (el orden *es* importante) en el plano del segundo vector **b** con los dedos de la mano derecha moviéndose a través del ángulo más pequeño entre **a** y **b**; el pulgar extendido de la mano derecha nos da entonces la dirección de **c**. (Véase la Fig. 17 del capítulo 3.)

Aplicando esta regla cuidadosamente a los vectores ω y **r** de la figura 11*a*, hallaremos que la ecuación 16 da realmente la dirección correcta para la velocidad **v** en el tiempo *t*, esto es, tangente a la trayectoria de la partícula situada en *P*. (Al aplicar la regla de la mano derecha, está permitido deslizar un vector a cualquier posición en el espacio coordenado, en tanto no se cambie su dirección. Así, podemos situar a **v** temporalmente en el origen, si esto nos ayuda a aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de **v**.)

Volvamos ahora a la aceleración. Podemos hallar la aceleración (lineal) al diferenciar la velocidad dada por la ecuación 16. Esto es,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{17}$$

Nótese que, al considerar la derivada de un producto vectorial, seguimos la misma regla que empleamos al considerar la derivada de un producto algebraico ordinario, excepto que debemos tener cuidado de que el orden de los vectores en los términos siga siendo el mismo. (Esto es, en ambos términos de la derecha de la ecuación 17, $\boldsymbol{\omega}$ viene *antes* que **r**, como sucede en el producto original.) Es importante mantener el orden apropiado porque, como lo aprendimos en la figura 17*b* del capítulo 3, **a** × **b** = –**b** × **a**.

En la ecuación 17, al reemplazar a $d\omega/dt$ con la aceleración angular α (véase la Ec. 5), y al reemplazar también a $d\mathbf{r}/dt$ con la velocidad **v**, obtenemos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{18}$$

Estudiemos cada uno de los dos términos del lado derecho de la ecuación 18 por orden.

En tanto que el eje de rotación permanezca fijo, $d\omega$ apuntará también a lo largo del eje *z*. Puesto que la dirección de α debe ser la misma que la dirección de $d\omega$, la aceleración angular α está también a lo largo del eje *z*, como se muestra en la figura 11*b*. Puesto que α es paralela a ω, se deduce que $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ debe de ser paralela a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ y también a **v** (véase la Ec. 16). Por lo tanto, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$, al igual que **v** en la figura 11*a*, es tangente a la trayectoria circular de la partícula en *P*, y es la componente *tangencial* $\mathbf{a}_T$ de la aceleración **a** de la partícula. La magnitud de la aceleración tangencial estuvo dada por la ecuación 13, la que escribimos como $a_T = \alpha r$ sen θ después de reemplazar a *r* por *r sen* θ.

Consideremos ahora el segundo término del lado derecho de la ecuación 18. Si imaginamos que el vector $\boldsymbol{\omega}$ en la figura 11*a* se movió hasta *P* (quedando paralelo al eje *z* en el proceso), vemos inmediatamente al usar la regla de la mano derecha, que el segundo término de la ecuación 18 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, apunta radialmente hacia adentro en *P*. Este segundo término tiene una magnitud ωv (porque el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y **v** es de 90°), lo cual se convierte en $\omega^2 r$ *sen* θ al usar la ecuación 15. Al comparar con la ecuación 14, vemos que ésta es precisamente la componente radial $\mathbf{a}_R$ del vector de la aceleración.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 18 como

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_R, \tag{19}$$

donde

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \tag{20}$$

y

$$\mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{21}$$

Las ecuaciones 16 y 18 son, entonces, las relaciones vectoriales entre las variables lineales y angulares para la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo. ■

PREGUNTAS

1. En la sección 11-1 afirmábamos que, en general, se requieren seis variables para ubicar a un cuerpo rígido con respecto a un marco de referencia en particular. ¿Cuántas variables se requieren para ubicar al cuerpo de la figura 2 con respecto al marco xy mostrado en esa figura? Si este número no es seis, explique la diferencia.
2. ¿En qué sentido es el radián una medida "natural" del ángulo, y el grado una medida "arbitraria" de esa misma cantidad? Por lo tanto, ¿qué ventajas existen al usar radianes en lugar de grados?
3. ¿Podrían las cantidades angulares ϕ, ω, y α ser expresadas en términos de grados en lugar de radianes en las ecuaciones de rotación de la tabla 1?
4. ¿Tiene que estar necesariamente a lo largo de un eje el vector que represente a la velocidad angular de una rueda que gire con respecto a ese eje fijo? Podría representarse simplemente como paralelo al eje, pero situado en cualquier lugar? Recuérdese que estamos en libertad de deslizar un vector de desplazamiento a lo largo de su propia dirección o trasladarlo lateralmente sin cambiar su valor.
5. Haga girar un libro de la misma forma que en la figura 6*a*, pero esta vez use desplazamientos angulares de 180° en lugar de 90°. ¿Qué concluiría usted con respecto a las posiciones finales del libro? ¿Le obliga esto a cambiar de opinión acerca de si los desplazamientos angulares (finitos) pueden ser tratados como vectores?

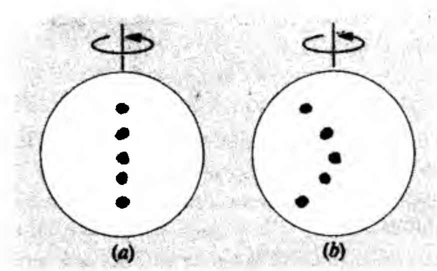


Figura 12 Pregunta 6.

6. La rotación del Sol puede monitorizarse siguiendo las manchas solares, tormentas magnéticas del Sol de aspecto más oscuro en el disco solar. La figura 12*a* muestra las posiciones iniciales de cinco manchas y la figura 12*b* las posiciones de las mismas manchas al cabo de una rotacion solar más. ¿Qué podemos concluir con respecto a la naturaleza física del Sol a partir de estas observaciones?
7. ¿Por qué es aconsejable expresar a α en rev/s^2 en la ecuación 7 de la tabla 1 ($\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$) pero no en la ecuación 13 ($a_T = \alpha r$)?
8. Un cuerpo rígido está libre de girar con respecto a un eje fijo. ¿Puede el cuerpo tener una aceleración angular distinta de cero aun cuando la velocidad angular del cuerpo sea (quizás instantáneamente) cero? ¿Cuál es la equivalente lineal de esta pregunta? Dé ejemplos físicos para ilustrar ambas situaciones, la lineal y la angular.
9. Un golfista hace oscilar un palo de golf, haciendo un tiro largo desde la estaquilla o *tee*. ¿Tienen todos los puntos del palo la misma velocidad angular ω en cualquier instante mientras el palo está en movimiento?
10. Cuando decimos que un punto situado en el ecuador de la Tierra tiene una velocidad angular de 2 π rad/dia, ¿qué marco de referencia utilizamos?
11. Teniendo en cuenta la rotación y la traslación de la Tierra, ¿se mueve un árbol más rápidamente durante el día o durante la noche? ¿Con respecto a qué marco de referencia se da la respuesta? (La rotación y la traslación de la Tierra son en la misma dirección.)
12. Una rueda está girando alrededor de su eje. Considérese un punto en la periferia. Cuando la rueda gira a una velocidad angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? Cuando la rueda gira con una aceleración angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? ¿Cambian las magnitudes de estas aceleraciones con el tiempo?
13. Supóngase que se le pida determinar la distancia recorrida por una aguja al tocar un disco de vinilo de fonógrafo. ¿Qué información necesitará usted? Explique desde el punto de vista de un marco de referencia (*a*) fijo en el salón, (*b*) fijo en el disco que está girando, y (*c*) fijo en el brazo del tocadiscos.
14. ¿Cuál es la razón entre las velocidades angulares de un par de engranes acoplados de radios diferentes?
15. El planeta Venus (véase la Fig. 13) se mueve en una órbita circular alrededor del Sol, completando una vuelta cada 225 días. Venus gira también en torno a un eje polar,

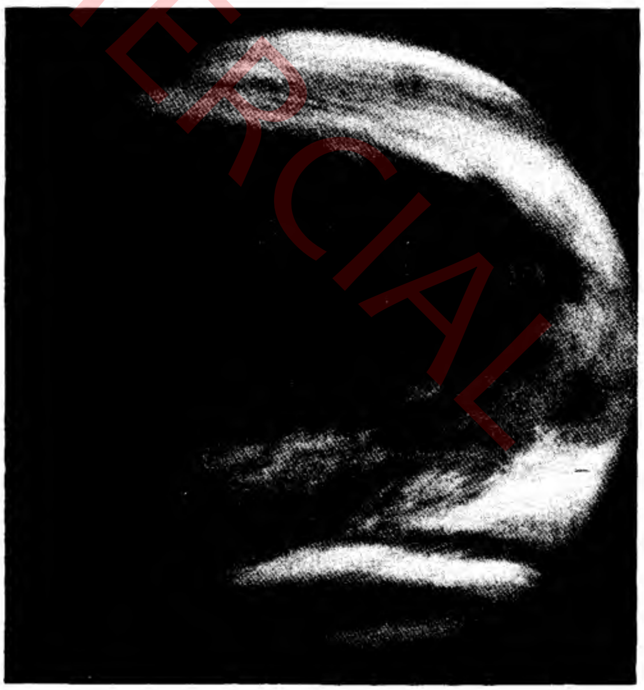


Figura 13 Pregunta 15.

completando una rotación cada 243 días. El sentido (dirección) del movimiento rotatorio es opuesto, pero paralelo, al del movimiento de traslación. (*a*) Describa el vector que represente la rotación de Venus en torno a su eje. (*b*) Describa el vector que represente la velocidad angular de Venus en torno al Sol. (*c*) Describa la velocidad angular resultante, obtenida al sumar las velocidades de traslación y angular rotatoria.

PROBLEMAS

Sección 11-2 Las variables de la rotación

1. Demuestre que 1 rev/min = 0.105 rad/s.

2. El ángulo girado por el volante de un generador durante un intervalo de tiempo t está dado por

$$\phi = at + bt^3 - ct^4,$$

donde a, b, y c son constantes. ¿Cuál es la expresión para (*a*) su velocidad angular y (*b*) su aceleración angular?

3. Nuestro Sol está a 2.3×10^4 ly (años luz) del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, y se mueve en círculo alrededor de este centro a una velocidad de 250 km/s. (*a*) ¿Qué tanto tiempo le toma al Sol completar una vuelta alrededor del centro galáctico? (*b*) ¿Cuántas vueltas ha completado el Sol desde que se formó hace alrededor de 4.5×10^9 años?

4. Una rueda gira con una aceleración angular α dada por

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

donde t es el tiempo y a y b son constantes. Si la rueda tiene una velocidad angular inicial ω_0, escriba las ecuaciones para (*a*) la velocidad angular y (*b*) el ángulo girado, en función del tiempo.

5. ¿Cuál es la velocidad angular de (*a*) la manecilla de segundos, (*b*) la manecilla de minutos, y (*c*) la manecilla horaria de un reloj?

6. Un buen lanzador de béisbol puede lanzar una bola hacia la meta a 85 mi/h con una rotación de 1800 rev/min. ¿Cuántas vueltas da la bola en su camino hacia la meta? Para simplificar, supóngase que la trayectoria de 60 ft es una línea recta.

7. Un clavadista da 2.5 vueltas completas en su trayecto de la plataforma de 10 m hasta la superficie del agua. Suponiendo una velocidad inicial vertical nula, calcule la velocidad angular promedio de este clavado.

8. La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación está descrita por $\phi = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$, donde ϕ está en radianes si t se ha dado en segundos. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular en $t = 2.0$ s, y en $t = 4.0$ s? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular promedio en el intervalo de tiempo que comienza en $t = 2.0$ s y termina en $t = 4.0$ s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea al principio y al final de este intervalo de tiempo?

9. Una rueda tiene 8 rayos y un radio de 30 cm. Está montada sobre un eje fijo y gira a razón de 2.5 rev/s. Usted quiere disparar una saeta de 24 cm paralela a este eje y a través de la rueda sin tocar ninguno de los rayos. Supóngase que la saeta y los rayos son muy delgados; véase la figura 14. (*a*) ¿Qué velocidad mínima deberá tener la saeta? (*b*) ¿Importa a dónde apunte usted entre el eje y la llanta? De ser así, ¿cuál es la mejor ubicación?

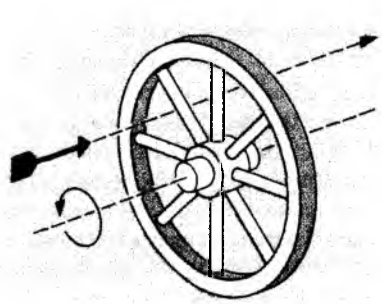


Figura 14 Problema 9.

10. Una rueda con 16 rayos que gira en sentido de las manecillas del reloj es fotografiada en película. La película es pasada por el proyector a razón de 24 cuadros/s, que es la velocidad apropiada para el proyector. Sin embargo, en la pantalla aparece la rueda girando en sentido contrario a las manecillas a razón de 4.0 rev/min. Halle la más baja velocidad angular posible a la cual estuvo girando la rueda.

11. Un día solar es el intervalo de tiempo entre dos salidas sucesivas del Sol en lo más alto de una longitud dada, esto es, el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación al Sol. Un día sideral es el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación a las estrellas fijas, es decir, el intervalo de tiempo entre dos observaciones sucesivas en lo más alto de una dirección fija en el cielo llamada el equinoccio de primavera. (*a*) Demuestre que hay exactamente un día solar (medio) menos en un año que días siderales (medios) en un año. (*b*) Si el día solar (medio) tiene exactamente 24 horas, ¿qué tan largo es un día sideral (medio)?

Sección 11-3 Rotación con aceleración angular constante

12. Una tornamesa de fonógrafo que gira a 78 rev/min disminuye su velocidad y se detiene 32 s después de que el motor ha sido desconectado. (*a*) Halle su aceleración angular (uniforme) en rev/min². (*b*) ¿Cuántas revoluciones llevó a cabo en este tiempo?

13. La velocidad angular de un motor de automóvil aumenta de 1170 rev/min a 2880 rev/min en 12.6 s. (*a*) Halle la aceleración angular en rev/min². (*b*) ¿Cuántas revoluciones completa el motor durante este tiempo?

14. Como parte de una inspección de mantenimiento, se hace que el compresor de un motor de propulsión a chorro gire de acuerdo con la gráfica mostrada en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones completa el compresor durante la prueba?

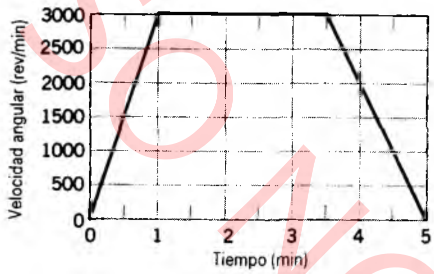


Figura 15 Problema 14.

15. El volante de una máquina gira a 25.2 rad/s. Cuando la máquina es apagada, el volante decelera una cantidad constante y llega al reposo después de 19.7 s. Calcule (*a*) la aceleración angular (en rad/s²) del volante, (*b*) el ángulo (en rad) a través del cual gira el volante al llegar al reposo, y (*c*) el número de revoluciones llevadas a cabo por el volante para llegar al reposo.

16. Mientras espera para abordar un helicóptero, usted observa que el movimiento del rotor cambió de 315 rev/min a 225 rev/min en 1.00 min. (*a*) Halle la aceleración angular durante el intervalo. (*b*) Suponiendo que esta aceleración permanece constante, calcule el tiempo que tarda el rotor en detenerse. (*c*) ¿Cuántas revoluciones dará el rotor después de la segunda observación que usted realice?

17. Cierta rueda gira 90 rev en 15 s, siendo su velocidad angular al final del periodo de 10 rev/s. (*a*) ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al principio del intervalo de 15 s, suponiendo una aceleración angular constante? (*b*) ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el tiempo en que la rueda estaba en reposo y el comienzo del intervalo de 15 s?

18. Una polea de 8.14 cm de diámetro tiene una cuerda de 5.63 m de longitud enrollada a su periferia. Comenzando desde el reposo, se le da a la polea una aceleración angular de 1.47 rad/s². (*a*) ¿A través de qué ángulo debe girar la rueda para que la cuerda se desenrolle? (*b*) ¿Cuánto tiempo le toma?

19. Un volante completa 42.3 rev cuando su velocidad angular disminuye desde 1.44 rad/s hasta detenerse por completo. (*a*) Suponiendo una aceleración uniforme, ¿cuál es el tiempo necesario para que llegue al reposo? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular? (*c*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que complete la primera mitad de las 42.3 rev?

20. Comenzando desde el reposo en $t = 0$, una rueda experimenta una aceleración angular constante. Cuando $t =$ 2.33 s, la velocidad angular de la rueda es de 4.96 rad/s. La aceleración continúa hasta $t = 23.0$ s, en que cesa de repente. ¿A través de qué angulo gira la rueda en el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 46.0$ s?

21. Un púlsar es una estrella de neutrones que gira a gran velocidad y desde la cual recibimos pulsaciones de radio con una sincronización precisa, correspondiendo una pulsación a cada rotación de la estrella. El periodo T de la rotación se halla midiendo el tiempo entre pulsaciones. Actualmente, el púlsar situado en la región central de la nebulosa del Cangrejo (véase la Fig. 16) tiene un periodo de rotación $T = 0.033$ s, y se observa que la rotación crece a razón de 1.26×10^{-5} s/y. (*a*) Demuestre que la velocidad angular ω de la estrella está relacionada con el periodo de rotación según $\omega = 2\pi/T$. (*b*) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular en rad/s²? (*c*) Si la aceleración angular es constante, ¿cuándo cesará de girar el púlsar? (*d*) El púlsar se originó por la explosión de una supernova en el año 1054 D.C. ¿Cuál era el periodo de rotación del púlsar al nacer? (Supóngase una aceleración angular constante.)

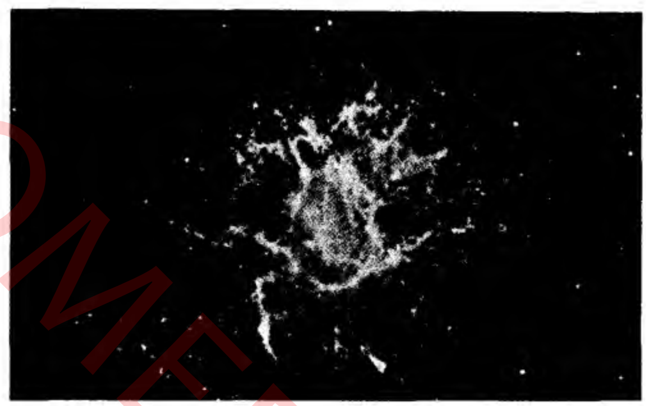


Figura 16 Problema 21.

Sección 11-4 Cantidades de rotación como vectores

22. Un planeta P gira alrededor del Sol en órbita circular, con el Sol en el centro, siendo coplanar y concéntrica con la órbita circular de la Tierra E alrededor del Sol. P y E giran en el mismo sentido. Los tiempos requeridos para la revolución de P y E alrededor del Sol son T_P y T_E. Sea T_S el tiempo necesario para que P complete una vuelta alrededor del Sol con relación a E: demuestre que $1/T_S = 1/T_E - 1/T_P$. Suponga que $T_P > T_E$.

Sección 11-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma escalar

23. Un disco de fonógrafo está colocado sobre una tornamesa girando a razón de $33\frac{1}{3}$ rev/min. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular en rad/s? ¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el disco situado donde está la aguja (*b*) al comenzar y (*c*) al terminar el disco? En estas posiciones, las distancias desde la aguja al eje de la tornamesa son 5.90 in y

2.90 in, respectivamente. (*d*) Halle la aceleración en cada una de estas posiciones.

24. ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que da una vuelta circular de 110 m de radio a razón de 52.4 km/h?

25. Un punto en la periferia de una rueda abrasiva de 0.75 m de diámetro cambia su velocidad uniformemente de 12 m/s a 25 m/s en 6.2 s. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda durante este intervalo?

26. ¿Cuáles son (*a*) la velocidad angular, (*b*) la aceleración radial, y (*c*) la aceleración tangencial de una nave espacial que ejecuta una vuelta circular de 3220 km de radio a una velocidad constante de 28,700 km/h?

27. Un astronauta está pasando una prueba en una centrífuga. La centrífuga tiene un radio de 10.4 m y, al comenzar, gira de acuerdo a $\theta = 0.326t^2$, donde t en segundos da θ en radianes. Cuando $t = 5.60$ s, ¿cuáles son (*a*) la velocidad angular del astronauta, (*b*) su velocidad tangencial, (*c*) su aceleración tangencial, y (*d*) su aceleración radial?

28. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es casi un círculo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra (vista como una partícula) con respecto al Sol? (*b*) ¿Cuál es su velocidad lineal en su órbita? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de la Tierra con respecto al Sol?

29. Una barra roscada con 12.0 vueltas/cm y un diámetro de 1.18 cm está montada horizontalmente. Se atornilla a la barra una solera con un orificio roscado con el mismo paso que la barra; véase la figura 17. La barra gira a 237 rev/min. ¿Cuánto tiempo le tomará a la solera moverse 1.50 cm a lo largo de la barra?

30. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular con respecto al eje polar de un punto en la superficie de la Tierra a una latitud de 40°N? (*b*) ¿Cuál es la velocidad lineal? (*c*) ¿Cuáles son los valores para un punto en el ecuador?

31. El volante de una máquina de vapor gira a una velocidad angular constante de 156 rev/min. Cuando se corta el vapor, la fricción de las chumaceras y del aire llevan al volante al reposo en 2.20 h. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular constante del volante, en rev/min^2? (*b*) ¿Cuántas revoluciones dará el volante antes de llegar al reposo? (*c*) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a 52.4 cm del eje de rotación cuando el volante está girando a 72.5 rev/min? (*d*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración lineal total de la partícula en la parte (*c*)?

32. Un volante giroscópico de 2.83 cm de radio es acelerado desde el reposo a 14.2 rad/s^2 hasta que su velocidad angular es de 2760 rev/min. (*a*) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto situado en la llanta del volante? (*b*) ¿Cuál es la aceleración radial de este punto cuando el volante está girando a plena velocidad? (*c*) ¿Qué distancia recorre un punto sobre la llanta durante la aceleración?

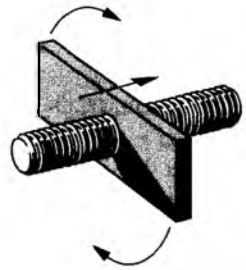


Figura 17 Problema 29.

33. Si una hélice de aeroplano de 5.0 ft (= 1.5 m) de radio gira a 2000 rev/min y el aeroplano es impulsado a una velocidad en tierra de 300 mi/h (= 480 km/h), ¿cuál es la velocidad de un punto en la punta de la hélice, visto por (*a*) el piloto y (*b*) un observador en tierra? Supóngase que la velocidad del aeroplano es paralela al eje de rotación de la hélice.

34. Un método antiguo para medir la velocidad de la luz hace uso de una rueda dentada que gira. Un rayo de luz que pasa a través de una ranura en el borde exterior de la rueda, como en la figura 18, viaja hasta un espejo distante, y regresa a la rueda en el momento preciso para pasar a través de la siguiente ranura de la rueda. Esta rueda dentada tiene un radio de 5.0 cm y 500 dientes en su borde. Las mediciones tomadas cuando el espejo estaba a una distancia L = 500 m de la rueda indicaron una velocidad de la luz de 3.0×10^5 km/s. (*a*) ¿Cuál era la velocidad angular (constante) de la rueda? (*b*) ¿Cuál era la velocidad lineal de un punto en su borde?

35. Una rueda A de radio $r_A = 10.0$ cm está acoplada por medio de una banda B a otra rueda C de radio $r = 25.0$ cm, como se muestra en la figura 19. La rueda A aumenta su velocidad angular desde el reposo a razón de una cantidad uniforme de 1.60 rad/s^2. Determine en cuánto tiempo llegará la rueda C a una velocidad de rotación de 100 rev/min, suponiendo que la banda no se deslice. (*Sugerencia*: Si la

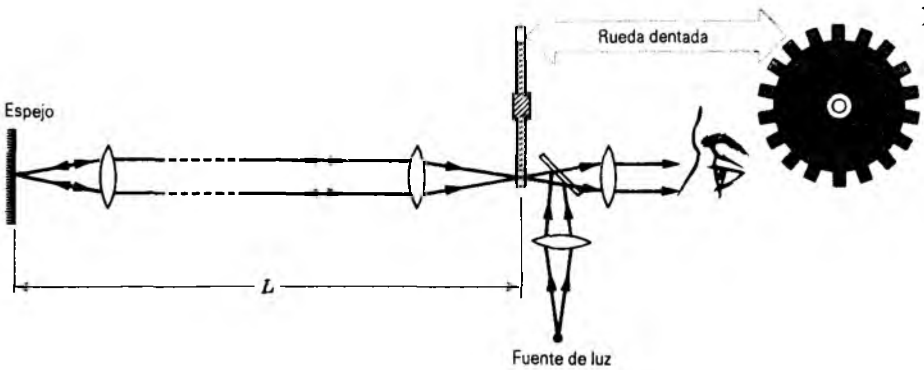


Figura 18 Problema 34.

banda no se desliza, las velocidades lineales en la periferia de las dos ruedas deben ser iguales.)

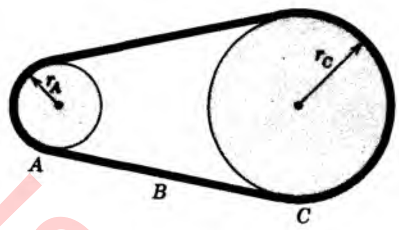


Figura 19 Problema 35.

36. Las aspas de un molino de viento parten del reposo y giran con una aceleración angular de 0.236 rad/s^2. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que un punto sobre un aspa experimente el mismo valor para las magnitudes de la aceleración centrípeta y de la aceleración tangencial?

37. Un cuerpo rígido, que parte del reposo, gira con respecto a un eje fijo con aceleración angular constante α. Considérese una partícula a una distancia r del eje. Exprese (*a*) la aceleración radial y (*b*) la aceleración tangencial de esta partícula en términos de α, r, y el tiempo t. (*c*) Si la aceleración resultante de la partícula en cierto instante forma un ángulo de 57.0° con la aceleración tangencial, ¿qué ángulo total ha girado el cuerpo hasta ese momento?

38. El disco de un sistema de audio para disco digital compacto tiene un radio interior y exterior de su material grabado (los conciertos para violín de Tchaikovsky y de Mendelssohn) de 2.50 cm y 5.80 cm, respectivamente. Al funcionar, el disco es barrido con una velocidad lineal constante de 130 cm/s, comenzando desde el borde interior y moviéndose hacia afuera. (*a*) Si la velocidad angular inicial del disco es de 50.0 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular final? (*b*) Las líneas en espiral del barrido están a una separación de 1.60 μm aparte; ¿cuál es la longitud total del barrido? (*c*) ¿Cuál es el tiempo de la grabación sonora?

39. Un automóvil que viaja a 97 km/h tiene ruedas de 76 cm de diámetro. (*a*) Halle la velocidad angular de las ruedas con respecto al eje. (*b*) El automóvil es llevado a un alto uniformemente a las 30 vueltas de las ruedas. Calcule la aceleración angular. (*c*) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este periodo de frenado?

40. Un velocímetro colocado en la rueda frontal de una bicicleta da una lectura que es directamente proporcional a la velocidad angular de la rueda. Suponga que tal velocímetro esté calibrado para una rueda de 72 cm de diámetro pero que, equivocadamente, se instala en una rueda de 62 cm de diámetro. ¿Estaría equivocada la lectura de la velocidad lineal? De ser así, ¿en qué sentido y por qué fracción de la velocidad real?

Sección 11-6 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma vectorial

41. Un objeto se mueve en el plano xy de modo que $x = R \cos \omega t$ y $y = R$ sen ωt. Aquí x y y son las coordenadas del objeto, t es el tiempo y R y ω son constantes. (*a*) Elimínese a t entre estas ecuaciones para hallar la ecuación de la curva en la que se mueve el objeto. ¿Cuál es esta curva? ¿Cuál es el significado de la constante ω? (*b*) Diferencie las ecuaciones para x y y con respecto al tiempo para hallar las componentes x y y de la velocidad del cuerpo, v_x y v_y. Combine a v_x y a v_y para hallar la magnitud y la dirección de **v**. Describa el movimiento del objeto. (*c*) Diferencie a v_x y a v_y con respecto al tiempo para obtener la magnitud y la dirección de la aceleración resultante.

42. Un objeto rígido que gira con respecto al eje z está decelerando a razón de 2.66 rad/s^2. Considérese una partícula ubicada en $\mathbf{r} = 1.83\mathbf{j} + 1.26\mathbf{k}$ (en metros). En el instante en que $\omega = 14.3\mathbf{k}$ (en rad/s), halle (*a*) la velocidad de la partícula y (*b*) su aceleración. (*c*) ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular de la partícula?