

FÍSICA 1

4^a Edición



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (<i>Opcional</i>)	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
CAPÍTULO 1	1	<hr/> <hr/>	
MEDICIONES		CAPÍTULO 4	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL	
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	Y TRIDIMENSIONAL	59
1-3 Patrón de Tiempo	3	<hr/> <hr/>	
1-4 Patrón de Longitud	5	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-5 Patrón de Masa	7	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-7 Análisis Dimensional	10	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
Preguntas y Problemas	11	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (<i>Opcional</i>)	69
<hr/> <hr/>		4-6 Movimiento Relativo	71
CAPÍTULO 2	17	Preguntas y Problemas	74
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	CAPÍTULO 5	
2-2 Descripciones del Movimiento	17	FUERZA Y LAS LEYES	
2-3 Velocidad Promedio	20	DE NEWTON	87
2-4 Velocidad Instantánea	21	<hr/> <hr/>	
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-1 Mecánica Clásica	87
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-3 Fuerza	90
2-8 Galileo y la Caída Libre (<i>Opcional</i>)	29	5-4 Masa	90
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (<i>Opcional</i>)	30	5-5 Segunda Ley de Newton	92
Preguntas y Problemas	31	5-6 Tercera Ley de Newton	94
<hr/> <hr/>		5-7 Unidades de Fuerza	96
CAPÍTULO 3	41	5-8 Peso y Masa	97
VECTORES		5-9 Medición de Fuerzas	99
3-1 Vectores y Escalares	41	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42	5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
3-3 Componentes de Vectores	43	Preguntas y Problemas	106

CAPÍTULO 6
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137

CAPÍTULO 7
TRABAJO Y ENERGÍA 149

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163

CAPÍTULO 8
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	189 190

CAPÍTULO 9
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	220 224

CAPÍTULO 10
COLISIONES 233

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

CAPÍTULO 11
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

CAPÍTULO 12
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

CAPÍTULO 13
ÍMPETU ANGULAR **305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

CAPÍTULO 14
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS **331**

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

CAPÍTULO 15
OSCILACIONES **353**

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	371 373

CAPÍTULO 16
GRAVITACIÓN **383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria G	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	404 408

CAPÍTULO 17
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS **419**

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	431 433

CAPÍTULO 18
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS **441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6 Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (<i>Opcional</i>)	453
Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19
MOVIMIENTO ONDULATORIO **465**

19-1 Ondas Mecánicas	465
19-2 Tipos de Ondas	466
19-3 Ondas Viajeras	467
19-4 Velocidad de Onda	471
19-5 La Ecuación de la Onda (<i>Opcional</i>)	471
19-6 Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7 El Principio de Superposición	476
19-8 Interferencia de Ondas	478
19-9 Ondas Estacionarias	482
19-10 Resonancia	485
Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20
ONDAS SONORAS **495**

20-1 La Velocidad del Sonido	495
20-2 Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3 Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4 Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5 Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6 Pulsaciones	506
20-7 El Efecto Doppler	508
Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD **519**

21-1 Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2 Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3 Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4 La Transformación de Lorentz	526
21-5 Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6 La Transformación de las Velocidades	529
21-7 Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8 Ímpetu Relativista	535
21-9 Energía Relativista	537
21-10 La Lógica la Relatividad Especial	540
Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22
TEMPERATURA **547**

22-1 Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2 Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3 Medición de la Temperatura	549
22-4 La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5 Dilatación Térmica	554
Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL **565**

23-1 Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2 El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3 Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4 Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5 Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6 La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7 Fuerzas Intermoleculares (<i>Opcional</i>)	578
23-8 La Ecuación de Estado de van der Waals (<i>Opcional</i>)	579
Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24
MECÁNICA ESTADÍSTICA **587**

24-1 Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2 Recorrido libre medio	589
24-3 La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4 La Distribución de las Energías	597
24-5 Movimiento Browniano	599
24-6 Distribuciones Estadísticas Cuánticas (<i>Opcional</i>)	600
Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA **607**

25-1 El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2 Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3 Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4 Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26
ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY
DE LA TERMODINÁMICA **635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 9

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Hasta aquí hemos tratado los objetos como si fueran partículas puntuales que tienen masa pero no tamaño. Ésta no es en realidad una restricción grave, porque todos los puntos de un objeto en movimiento de traslación simple se mueven de manera idéntica, y no existe diferencia si tratamos al objeto como una partícula o como un cuerpo extenso. Sin embargo, esta restricción no es válida para muchos objetos en movimiento. Por ejemplo, cuando un objeto gira mientras se mueve, o cuando sus partes vibran en relación a otras, no sería válido tratar a todo el objeto como una sola partícula. Aun en estos casos más complicados, existe un punto del objeto cuyo movimiento bajo la influencia de fuerzas externas puede ser analizado como el de una partícula simple. Este punto se llama centro de masa. En este capítulo describiremos cómo hallar el centro de masa de los objetos y demostraremos que reglas simples (de nuevo, las leyes de Newton) para el movimiento del centro de masa de un sistema complejo nos conducen a la segunda de las grandes leyes de la conservación que encontraremos: la conservación del ímpetu lineal.

9-1 SISTEMAS DE DOS PARTÍCULAS

En los capítulos 7 y 8 hemos empleado los conceptos de energía para estudiar el movimiento de un cuerpo sobre el que ejerce su acción la fuerza de un resorte. Veamos ahora un problema ligeramente más complicado: el movimiento unidimensional de dos cuerpos unidos por un resorte. Por simplicidad, supondremos por el momento que no actúa ninguna fuerza externa neta sobre los cuerpos, a excepción de la fuerza del resorte. Esto es, supondremos que se deslizan libremente sin fricción en una superficie horizontal llana. Como ejemplo práctico de tal sistema podríamos considerar el movimiento sobre un riel de aire de dos deslizadores unidos por un resorte.

Cuando el resorte se estira o se comprime desde su longitud de relajamiento, ejerce una fuerza sobre ambos cuerpos, los cuales podemos tratar individualmente como partículas. Las fuerzas sobre las dos partículas tienen magnitudes iguales. (Podemos pensar en el resorte simplemente como una representación física de las fuerzas que los dos cuerpos pudieran ejercer directamente uno sobre el otro como, por ejemplo, dos átomos de una

molécula. En ese caso, la tercera ley de Newton requiere que las fuerzas sobre las dos partículas sean iguales y opuestas. La presencia del resorte, que se supone carente de masa, no cambia este requisito.)

No podemos analizar independientemente los movimientos de los dos cuerpos usando las leyes de Newton, porque el movimiento de uno depende del movimiento del otro. Por ejemplo, si un cuerpo tiene mucha más cantidad de masa que el otro, su desplazamiento es relativamente pequeño, y el desplazamiento del cuerpo con menor masa es aproximadamente igual al cambio de longitud del resorte. Por otra parte, si los dos cuerpos tienen masas iguales, tendrán desplazamientos que son cada uno de ellos de magnitud igual a la mitad de la extensión del resorte.

La figura 1 ilustra un ejemplo del tipo de movimiento que deseamos analizar. En este caso especial, se le da al resorte (de constante de fuerza k) un alargamiento inicial, y los dos cuerpos se sueltan desde el reposo. Sea d_i la extensión inicial del resorte, de modo que su energía inicial es $E_i = U_i + K_i = \frac{1}{2}kd_i^2 + 0$. En cualquier instante de tiempo en particular, cuando la extensión del resorte sea d , la energía es

$$E = U + K = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad (1)$$

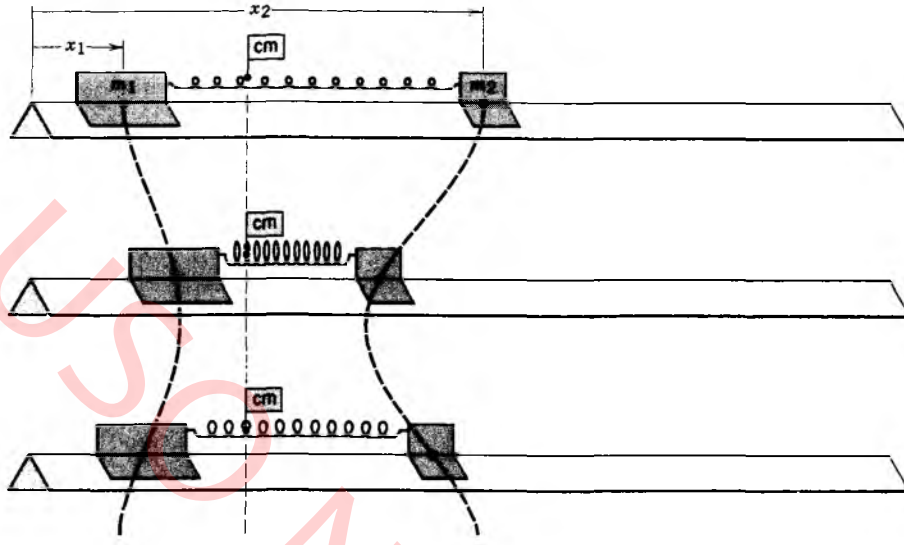


Figura 1 Dos deslizadores unidos por un resorte estirado se sueltan desde el reposo en un riel de aire. El movimiento resultante no es sencillo, excepto para el punto marcado con la bandera, el cual permanece en reposo. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales. En el caso mostrado, $m_1 = 2m_2$.

que representa la energía potencial del resorte y la energía cinética de los dos cuerpos. La conservación de la energía requiere que la energía E , en cualquier momento sea igual a la energía inicial E_i , lo cual nos da

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (2)$$

Como lo muestra la figura 1, las posiciones de los dos cuerpos están relacionadas por

$$x_2 = x_1 + L + d, \quad (3)$$

donde L es la longitud de relajamiento del resorte. Las ecuaciones 2 y 3 no son suficientes para resolver x_1 y x_2 en función del tiempo y, por lo tanto, no nos es posible completar la solución de este problema sin información adicional.

La información adicional que necesitamos proviene del análisis de un punto particular del sistema de la figura 1. Este punto, llamado *centro de masa* (cm) del sistema, está señalado por una bandera en la figura 1. En este caso especial, el centro de masa no se mueve en absoluto.

Veamos cómo el uso del centro de masa nos ayuda a completar la solución de este problema. La posición del centro de masa se define, para el caso especial de dos partículas en una dimensión, como

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2), \quad (4)$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas x respectivas de las dos partículas. Aquí M es la *masa total* del sistema:

$$M = m_1 + m_2.$$

El centro de masa de un sistema de dos cuerpos es un punto en el espacio definido por la ecuación 4 en una dimensión. No se requiere que sea necesariamente una parte de cualquiera de los cuerpos.

La velocidad del centro de masa, v_{cm} , se encuentra tomando la derivada respecto al tiempo de la ecuación 4:

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1x_1 + m_2x_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1v_1 + m_2v_2), \end{aligned} \quad (5)$$

que es la velocidad de la bandera en la figura 1. La aceleración del centro de masa se halla diferenciando nuevamente. El resultado es

$$\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1v_1 + m_2v_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1a_1 + m_2a_2), \end{aligned} \quad (6)$$

donde a_1 y a_2 son las aceleraciones respectivas de m_1 y de m_2 .

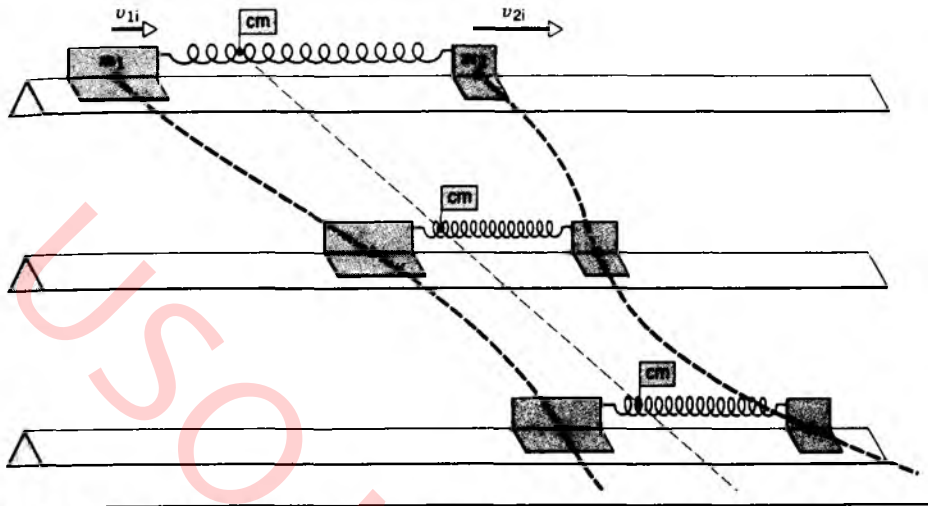


Figura 2 A dos deslizadores unidos por un resorte estirado se les da velocidades iniciales arbitrarias. Los dos deslizadores se mueven en una forma compleja, mientras que el centro de masa, marcado con una bandera, se mueve a velocidad constante. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales.

Continuamos aplicando las leyes de Newton por separado a m_1 y m_2 . Sea \mathbf{F}_{12} la fuerza ejercida sobre m_1 por m_2 , y \mathbf{F}_{21} la fuerza ejercida sobre m_2 por m_1 . La segunda ley de Newton aplicada por separado a m_1 y m_2 nos da $\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2$. (En nuestro ejemplo, es el resorte el que ejerce las fuerzas sobre m_1 y m_2 . Sin embargo, no perdemos generalidad al suponer que los cuerpos ejercen fuerzas directas entre sí, en tanto consideremos que el resorte carece de masa.) La *tercera* ley de Newton requiere que $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Sustituyendo en la ecuación 6 nos da

$$a_{\text{cm}} = \frac{1}{M} (F_{12} + F_{21}) = 0.$$

En este caso especial, en el cual ninguna fuerza neta actúa sobre el sistema, el centro de masa no tiene aceleración y, por lo tanto, se mueve a velocidad constante (que es cero en la Fig. 1). Podríamos entonces completar la solución al combinar las ecuaciones 2 y 3, y usando las ecuaciones 4 y 5 para eliminar, ya sea a x_1 y a v_1 , o a x_2 y a v_2 . (Véase el problema 1.)

La figura 2 ilustra el caso ligeramente más general en el que se le da al resorte una extensión inicial y se les dan a los dos cuerpos velocidades iniciales v_{1i} y v_{2i} . Aquí podemos ver que el centro de masa se mueve a velocidad constante, aun cuando el movimiento del sistema como un todo es bastante complejo.

Las ecuaciones 4 a 6 son aun más generales de lo que nos sugiere este experimento particular. Con objeto de adoptar la situación más general, supongamos ahora que existe una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext},1}$ sobre m_1 en adición a la fuerza interna \mathbf{F}_{12} sobre m_1 causada por m_2 . (Por ejemplo, el riel de aire podría estar inclinado, de modo que actuaría la gravedad; o bien, el experimento podría ser llevado a

cabo sobre una superficie con fricción.) La segunda ley de Newton aplicada a m_1 es

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1. \quad (7)$$

De manera similar, supongamos que actúan sobre m_2 tanto una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext},2}$ como una fuerza interna \mathbf{F}_{21} , y tendremos

$$\mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2. \quad (8)$$

Al sumar las ecuaciones 7 y 8 nos da

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} + \mathbf{F}_{\text{ext},2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2. \quad (9)$$

Los primeros dos términos de esta ecuación dan la fuerza externa neta $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}}$ que actúa sobre el sistema (la cual en nuestra exposición anterior supusimos que era cero). La suma de los dos términos siguientes, $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$, se anula por la tercera ley de Newton, la cual exige que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. El lado derecho de la ecuación 9 puede expresarse como $M \mathbf{a}_{\text{cm}}$, usando la ecuación 6. Así, tenemos el resultado general

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}}. \quad (10)$$

Esta ecuación se parece nuevamente mucho a la segunda ley de Newton aplicada a una partícula de igual masa M de nuestro sistema, moviéndose a la misma velocidad v_{cm} en la posición x_{cm} .

Resumiendo nuestros resultados en el caso de un sistema unidimensional de dos partículas, vemos que todo el sistema puede considerarse para ciertos propósitos como si se moviera a una velocidad v_{cm} y tuviera su masa total M concentrada

M concentrada en la posición x_{cm} . Más aún, en ausencia de una fuerza externa neta, $a_{cm} = 0$, y el centro de masa se mueve a velocidad constante. Desarrollaremos a continuación expresiones más generales para estos conceptos.

9-2 SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

En esta sección generalizaremos los resultados de la sección previa a sistemas tridimensionales que contengan más de dos partículas.

Consideremos un sistema que consista en N partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_N . La masa total es

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum m_n.$$

Cada partícula del sistema puede ser representada por su masa m_n (donde $n = 1, 2, \dots, N$), su posición en la coordenada \mathbf{r}_n (cuyas componentes son $x_n, y_n, y z_n$), su velocidad \mathbf{v}_n (cuyas componentes son $v_{nx}, v_{ny}, y v_{nz}$), y su aceleración \mathbf{a}_n .

Sobre cada partícula actúa una fuerza \mathbf{F}_n , la cual en general difiere de una partícula a otra. Esta fuerza puede surgir en parte de las otras $N - 1$ partículas y en parte de un agente externo.

El centro de masa del sistema puede definirse por una extensión lógica de la ecuación 4:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n x_n, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n y_n, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n z_n. \end{aligned} \quad (11c)$$

En la notación vectorial más compacta, estas tres ecuaciones pueden escribirse como una sola expresión que dé la posición del centro de masa:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{r}_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando la derivada de esta expresión, hallamos la velocidad del centro de masa:

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\mathbf{r}_N}{dt} \right)$$

o sea

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{cm} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Diferenciando, una vez más, hallamos la aceleración del centro de masa:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{cm} &= \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N) \\ &= \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{a}_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Podemos reescribir la ecuación 14 así:

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N$$

o sea

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N, \quad (15)$$

donde el último resultado se deduce de la aplicación de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F}_n = m_n \mathbf{a}_n$, a cada partícula individual. La fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas es, entonces, igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. La ecuación 15 es precisamente la segunda ley de Newton para el sistema de N partículas tratado como una sola partícula de masa M ubicada en el centro de masa, que se mueve a velocidad \mathbf{v}_{cm} y experimenta una aceleración \mathbf{a}_{cm} .

Es útil simplificar la ecuación 15 un poco más aún. Entre las fuerzas que actúan sobre las partículas están las *fuerzas internas*, que surgen de las interacciones con otras partículas que son parte del sistema, y las *fuerzas externas*, que se originan fuera del sistema que estamos estudiando. Cualquier partícula dada m_n puede experimentar una fuerza ejercida sobre ella por la partícula m_k , la cual escribiremos como \mathbf{F}_{nk} . Esta fuerza determinada es una entre las muchas que integran a \mathbf{F}_n , la fuerza total sobre m_n . De manera similar, la fuerza total sobre la partícula m_k incluye un término \mathbf{F}_{kn} debido a la interacción con la partícula m_n . Según la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$, y entonces estas dos fuerzas particulares se cancelan al llevar a cabo la suma de todas las fuerzas en la ecuación 15. De hecho, todas esas fuerzas internas son parte de pares acción-reacción y se cancelan. (En el capítulo 5 advertíamos que las fuerzas de acción y de reacción deben aplicarse a partículas diferentes y, por lo tanto, no pueden oponerse entre sí. No estamos violando aquí este hecho, porque estamos aplicando la acción a una partícula y la reacción a otra. Aquí, la distinción consiste en que estamos sumando para obtener la fuerza neta sobre las *dos*

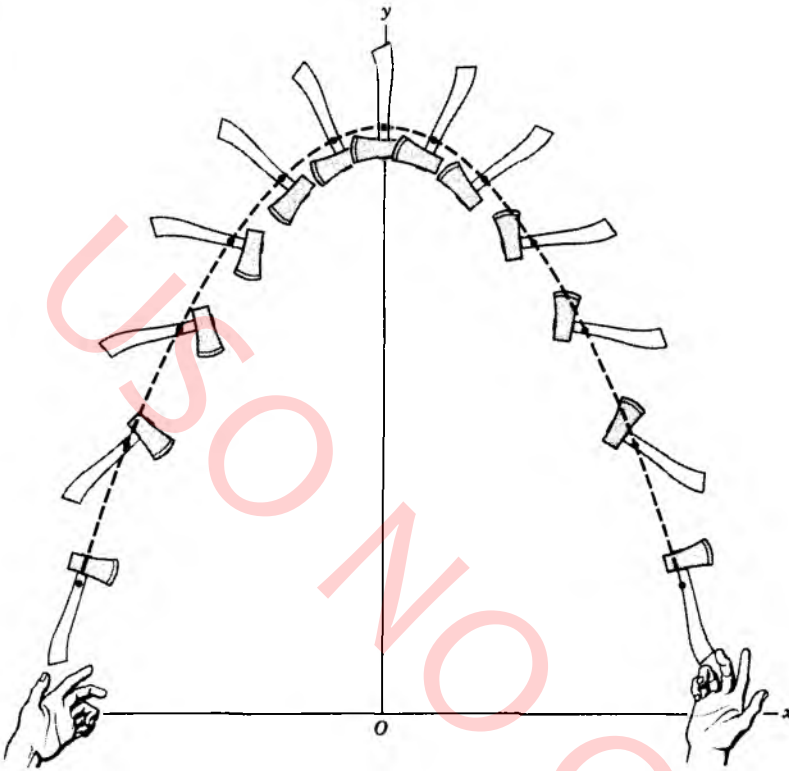


Figura 3 Un hacha se lanza al aire entre dos personas, y gira al mismo tiempo que se traslada. La trayectoria parabólica del centro de masa (representado por el punto en el mango del hacha) está indicada por la línea punteada. Una partícula lanzada al aire de la misma manera seguiría esa misma trayectoria. Ningún otro punto del hacha se mueve de forma tan simple.

partículas, en cuyo caso las componentes de acción y reacción, las cuales se aplican todavía a partículas diferentes, en realidad se cancelan.)

Todo lo que queda en la ecuación 15 es el total de todas las fuerzas *externas*, y la ecuación 15 se reduce a

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}, \quad (16)$$

que puede expresarse en función de sus componentes como sigue:

$$\sum F_{\text{ext},x} = Ma_{\text{cm},x}, \quad \sum F_{\text{ext},y} = Ma_{\text{cm},y},$$

y

$$\sum F_{\text{ext},z} = Ma_{\text{cm},z}.$$

Podemos resumir este importante resultado como sigue:

El movimiento de traslación total de un sistema de partículas puede ser analizado usando las leyes de Newton como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa y la fuerza externa total estuviera aplicada en ese punto.

Se deduce inmediatamente un corolario en el caso $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$:

Si la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es cero, entonces el centro de masa del sistema se mueve a velocidad constante.

Esto explica la observación hecha en la sección 9-1 al estudiar el problema de las dos masas unidas por un resorte.

Éstos son resultados generales que se aplican tanto a series de partículas individuales como a partículas unidas entre sí por fuerzas internas, como en un objeto sólido. El objeto, en sí mismo, puede estar efectuando cualquier clase de movimiento complicado, pero el centro de masa se moverá conforme a la ecuación 16. La figura 3 muestra un objeto complejo que se mueve bajo la influencia de la gravedad. A la vez que se traslada, también gira. Su centro de masa, sin embargo, sigue una trayectoria parabólica simple. En lo que respecta a la fuerza externa (la gravedad), el sistema se comporta como si fuera una partícula de masa M ubicada en el centro de masa. Un problema complicado se reduce, por tanto, a dos problemas relativamente sencillos: la trayectoria parabólica del centro de masa y una rotación respecto al centro de masa.

Como un ejemplo más, consideremos al sistema Tierra-Luna moviéndose bajo la gravedad del Sol (la fuerza externa). La figura 4 muestra que el centro de masa del sistema sigue una órbita estable alrededor del Sol; ésta es la trayectoria que seguiría una partícula de masa $m_{\text{Tierra}} + m_{\text{Luna}}$. La Tierra y la Luna giran también con respecto a sus centros de masa, dando por resultado una ligera oscilación de la Tierra con respecto a la trayectoria de la órbita estable. Usando los datos del apéndice C, nos será posible demostrar que el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a unos 4600 km del centro de la Tierra y, por lo tanto, está en el interior de la Tierra.

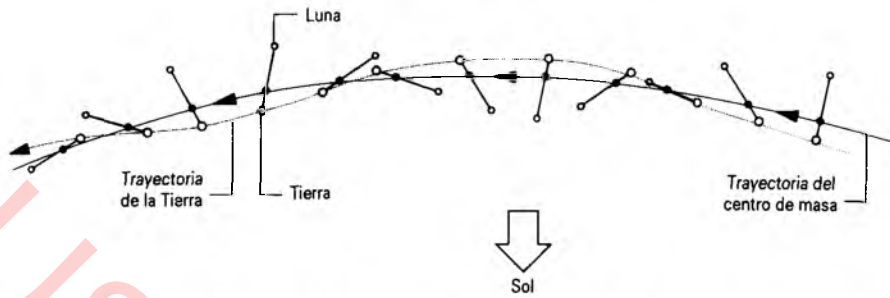


Figura 4 El centro de masa del sistema Tierra-Luna sigue una órbita casi circular con respecto al Sol, mientras que la Tierra y la Luna giran alrededor de su centro de masa común, exactamente igual que el hacha de la figura 3. Este efecto, que causa un ligero “bamboleo” en la órbita de la Tierra, se halla representado de manera muy exagerada en la figura. El centro de masa del sistema Tierra-Luna se halla en realidad dentro de la Tierra, de modo que la Tierra siempre se traslapa con la trayectoria orbital del centro de masa.

La figura 5 muestra el movimiento de un misil balístico que se separa en tres vehículos de reentrada múltiple (MRV). En efecto, una explosión separa a los tres vehículos pero, como la explosión genera solamente fuerzas internas, no afecta al movimiento del centro de masa. El centro de masa continúa describiendo la trayectoria balística como si no hubiera ocurrido la explosión, hasta que uno o más de los vehículos experimente una fuerza externa, como la proveniente de la resistencia atmosférica al avance o el impacto en un blanco.

Problema muestra 1 La figura 6a muestra un sistema de tres partículas, inicialmente en reposo, de masas $m_1 = 4.1 \text{ kg}$, $m_2 = 8.2 \text{ kg}$, y $m_3 = 4.1 \text{ kg}$. Fuerzas externas diferentes actúan sobre las partículas, de magnitudes $F_1 = 6 \text{ N}$, $F_2 = 12 \text{ N}$, y $F_3 = 14 \text{ N}$. En la figura se muestran las direcciones de las fuerzas. ¿Dónde está el centro de masa de este sistema, y cuál es la aceleración del centro de masa?

Solución La posición del centro de masa está señalada en la figura por un punto. Como lo sugiere la figura 6b, tratamos a

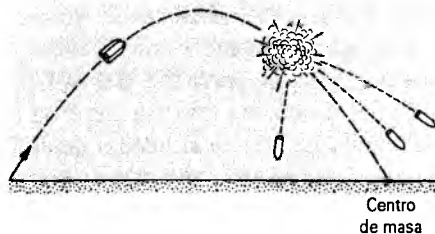


Figura 5 Un misil que contiene tres cabezas explosivas sigue una trayectoria parabólica. Una explosión separa las tres cabezas, las cuales se trasladan de modo que su centro de masa describe la trayectoria parabólica original. Por simplicidad no se muestra el “vehículo” de las tres cabezas explosivas.

este punto como una partícula real, de una masa M igual a la masa del sistema de 16.4 kg ($m_1 + m_2 + m_3$), y suponiendo que todas las fuerzas externas ejerzan su acción en ese punto. Hallamos el centro de masa partiendo de las ecuaciones 11a y 11b:

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \\ &= \frac{1}{16.4 \text{ kg}} [(4.1 \text{ kg})(-2 \text{ cm}) + (8.2 \text{ kg})(4 \text{ cm}) \\ &\quad + (4.1 \text{ kg})(1 \text{ cm})] = 1.8 \text{ cm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \\ &= \frac{1}{16.4 \text{ kg}} [(4.1 \text{ kg})(3 \text{ cm}) + (8.2 \text{ kg})(2 \text{ cm}) \\ &\quad + (4.1 \text{ kg})(-2 \text{ cm})] = 1.3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Nótese aquí el uso bastante aceptable de unidades mixtas.

La componente x de la fuerza externa neta que actúa sobre el centro de masa es (véase la Fig. 6b):

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},x} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ &= -6 \text{ N} + (12 \text{ N})(\cos 45^\circ) + 14 \text{ N} = 16.5 \text{ N}, \end{aligned}$$

y la componente y es

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},y} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ &= 0 + (12 \text{ N})(\sin 45^\circ) + 0 = 8.5 \text{ N}. \end{aligned}$$

La fuerza externa neta tiene, entonces, una magnitud de

$$F_{\text{ext}} = \sqrt{(F_{\text{ext},x})^2 + (F_{\text{ext},y})^2} = \sqrt{(16.5 \text{ N})^2 + (8.5 \text{ N})^2} = 18.6 \text{ N}$$

y forma un ángulo con el eje x dado por

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_{\text{ext},y}}{F_{\text{ext},x}} = \tan^{-1} \frac{8.5 \text{ N}}{16.5 \text{ N}} = 27^\circ.$$

Ésta es también la dirección del vector de aceleración. Según la ecuación 16, la magnitud de la aceleración del centro de masa está dada por

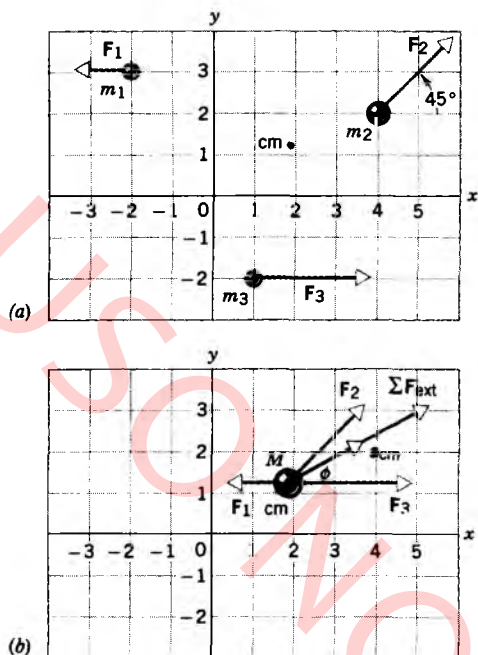


Figura 6 Problema muestra 1. (a) Las fuerzas mostradas actúan sobre tres partículas, situadas en reposo en las posiciones mostradas. Se ha marcado el centro de masa del sistema. (b) El movimiento de traslación de todo el sistema puede ser representado por el movimiento de una partícula de masa total M situada en el centro de masa y sobre la que actúan las tres fuerzas externas. Se muestran la fuerza y la aceleración del centro de masa resultantes.

$$a_{cm} = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{18.6 \text{ N}}{16.4 \text{ kg}} = 1.1 \text{ m/s}^2.$$

Las tres partículas de la figura 6a, como también su centro de masa, se mueven con aceleraciones constantes (diferentes). Si las partículas parten del reposo, cada una se moverá, a velocidad siempre creciente, a lo largo de una línea recta en dirección de la fuerza que actúa sobre ellas.

Problema muestra 2 En el sistema que se ilustra en la figura 7a, hallar la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques. Ya hemos resuelto este problema, como problema muestra 8 del capítulo 5, aplicando las leyes de Newton a cada bloque por separado. Resuelva el problema en este caso considerando el movimiento del centro de masa del sistema de dos partículas.

Solución La figura 7b muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema de dos partículas. Hallamos primero el centro de masa aplicando las ecuaciones 11a y 11b al sistema mostrado en la figura 7b:

$$x_{cm} = -\frac{m_1}{M}(L-y) \quad \text{y} \quad y_{cm} = \frac{m_2}{M}y,$$

donde L es la longitud del cordón y y es la coordenada vertical de m_2 .

Diferenciando con respecto al tiempo, podemos hallar las componentes de la velocidad del centro de masa:

$$v_{cm,x} = \frac{m_1}{M}v \quad \text{y} \quad v_{cm,y} = \frac{m_2}{M}v,$$

donde $v (= dy/dt)$ es la magnitud común de las velocidades de los dos bloques. Diferenciando de nuevo, podemos hallar las componentes de la aceleración:

$$a_{cm,x} = \frac{m_1}{M}a \quad \text{y} \quad a_{cm,y} = \frac{m_2}{M}a,$$

donde $a (= dv/dt)$ es la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques.

A continuación, aplicamos las leyes de Newton. En la figura 7b, la fuerza externa ejercida por el soporte sin fricción del cordón de unión es descompuesta en sus componentes x y y , cada una de magnitud T (la tensión del cordón). Al usar la Ec. 16 nos da

$$\text{componente } x: \quad T = Ma_{cm,x},$$

$$\text{componente } y: \quad m_1g - N + m_2g - T = Ma_{cm,y}.$$

Sustituyendo para $a_{cm,x}$ y $a_{cm,y}$, podemos entonces eliminar a T de estas dos ecuaciones y obtener, con $m_1g = N$,

$$a = g \frac{m_2}{M},$$

de acuerdo con el resultado obtenido previamente en el capítulo 5.

Nótese que en este problema muestra debemos considerar la fuerza externa ejercida sobre el sistema por el soporte sin fricción, la cual no interviene al considerar a las fuerzas sobre los cuerpos 1 y 2 por separado.

Si el sistema se suelta desde el reposo cuando m_2 está en su posición más alta, el movimiento resultante del centro de masa se efectúa a lo largo de la línea recta que se muestra en la figura 7c. La dirección de a_{cm} puede ser hallada al sumar vectorialmente las cinco fuerzas que actúan sobre el sistema mostrado en la figura 7b.

9-3 CENTRO DE MASA DE OBJETOS SÓLIDOS

Sería sumamente engorroso hallar el centro de masa de un objeto sólido usando la ecuación 12 y haciendo la suma para cada átomo del sistema. En su lugar, dividiremos al objeto en elementos pequeños de masa δm_n . Cuando estos elementos se vuelven infinitesimalmente pequeños, las sumas de las ecuaciones 11 y 12 se transforman en integrales:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum x_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad (17a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum y_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad (17b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum z_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int z \, dm. \quad (17c)$$

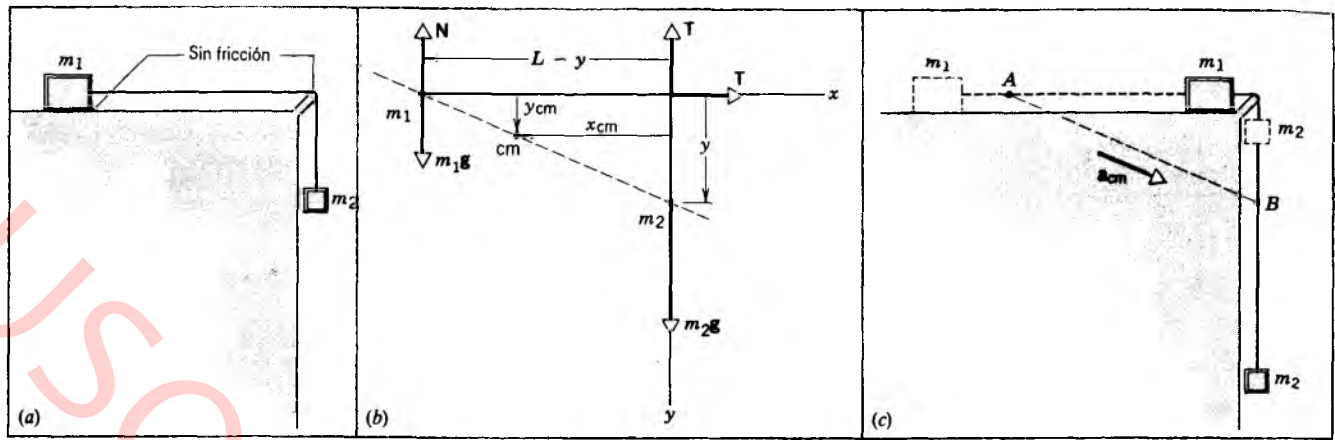


Figura 7 Problema muestra 2. (a) Dos masas están unidas por un cordón de longitud L que pasa sobre un soporte sin fricción. (b) Un diagrama parcial de cuerpo libre muestra las fuerzas *externas* que actúan en el sistema. El soporte sin fricción ejerce una fuerza externa sobre el cordón cuyas componentes son cada una igual a la tensión T del cordón (el cual es una fuerza *interna* y, por lo tanto, no se muestra). (c) El centro de masa se mueve desde el punto A , cuando m_2 está en su posición más alta, hasta el punto B , cuando m_1 llega al soporte. Al caer m_2 , m_1 se mueve hacia la derecha y, por lo tanto, el centro de masa debe moverse hacia la derecha. La fuerza horizontal T es la única fuerza externa posible que puede dar por resultado un movimiento horizontal del centro de masa. La gravedad, por supuesto, proporciona la fuerza externa responsable del movimiento del centro de masa hacia abajo.

En la forma vectorial, estas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (18)$$

En muchos casos es posible usar argumentos basados en la geometría o en la simetría para simplificar el cálculo del centro de masa de objetos sólidos. Si un objeto tiene una simetría esférica, el centro de masa debe estar en el centro geométrico de la esfera. (No es necesario que su densidad sea constante; una bola de béisbol, por ejemplo, tiene una simetría esférica aunque esté compuesta por capas de materiales diferentes. Su centro de masa está en su centro geométrico. Cuando nos referimos a la simetría esférica, queremos decir que la densidad puede variar con r pero debe tener la misma variación en cada dirección.) Si un sólido tiene una simetría cilíndrica (esto es, si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un eje), entonces el centro de masa debe estar en el eje. Si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un plano, entonces el centro de masa debe de estar en el plano.

A menudo encontramos objetos sólidos, irregulares que pueden ser divididos en varias partes. Podemos hallar el centro de masa de cada parte y luego, al tratar a cada parte como una partícula ubicada en su propio centro de masa, podemos hallar el centro de masa de la combinación.

Como ejemplo, consideremos la placa triangular que se muestra en la figura 8. Dividimos a la placa en un número

grande de franjas delgadas paralelas a la base del triángulo, como en la figura 8a. El centro de masa de cada franja debe estar en su centro geométrico y, por lo tanto, el centro de masa de la placa debe estar en alguna parte a lo largo de la línea que une a los centros de las franjas. (Reemplacemos cada franja con una masa puntual ubicada en el centro de masa de la franja. La hilera de las masas puntuales forma, en efecto, un objeto unidimensional cuyo centro de masa estará con toda seguridad a lo largo de su longitud.) Repitiendo este procedimiento con franjas trazadas paralelamente a los otros dos lados (Figs. 8b y 8c), obtenemos dos líneas adicionales, cada una de las cuales debe

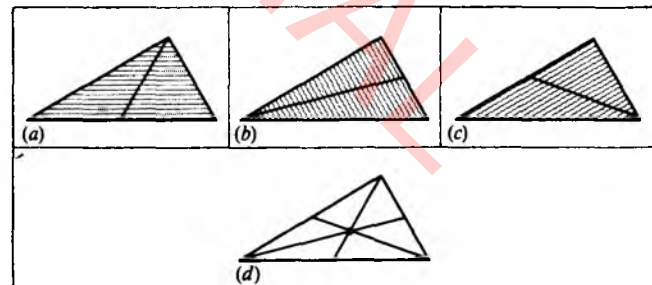


Figura 8 En (a), (b) y (c), el triángulo está dividido en franjas delgadas, paralelas a cada uno de los tres lados. El centro de masa debe estar a lo largo de las líneas divisorias simétricas que se muestran. (d) El punto negro, el único punto común a las tres líneas, es la posición del centro de masa.

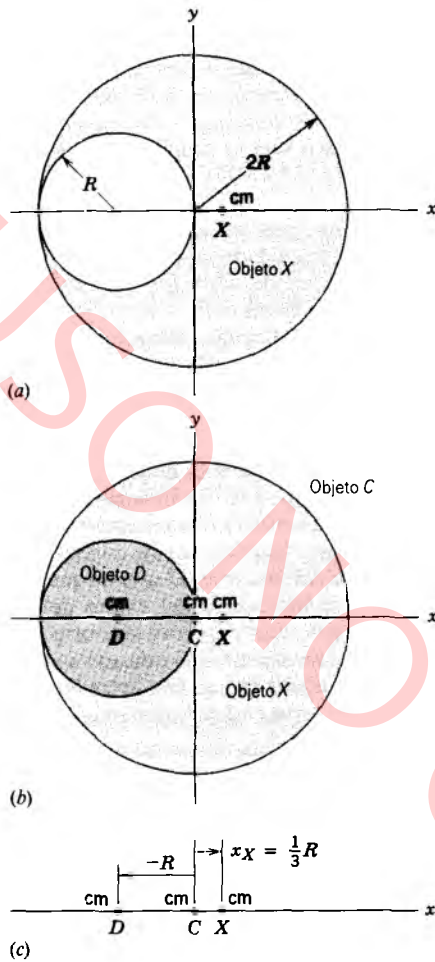


Figura 9 Problema muestra 3. (a) El objeto X es un disco de metal de radio $2R$ con un orificio de radio R . (b) El objeto D es un disco de metal que llena el orificio del objeto X; su centro de masa está en $x_D = -R$. El objeto C es el disco compuesto hecho de los objetos X y D; su centro de masa está en el origen. (c) Los centros de masa de los tres objetos.

también incluir al centro de masa de la placa. Superponiendo las tres líneas, como en la figura 8d, hallamos que tienen solamente un punto en común, el cual debe ser, por lo tanto, el centro de masa.

Problema muestra 3 La figura 9a muestra una placa circular de metal de radio $2R$ de la que se ha extraído un disco de radio R . Llamémosle el objeto X. Su centro de masa se marca con un punto sobre el eje x . Ubique este punto.

Solución La figura 9b muestra el objeto X, estando su orificio lleno con un disco de radio R , al cual llamaremos objeto D. Sea C el gran disco compuesto uniforme así formado. Por simetría, el centro de masa del objeto C está en el origen del sistema de coordenadas, como se muestra.

Al hallar el centro de masa de un objeto compuesto, suponemos que las masas de sus componentes están concentradas en

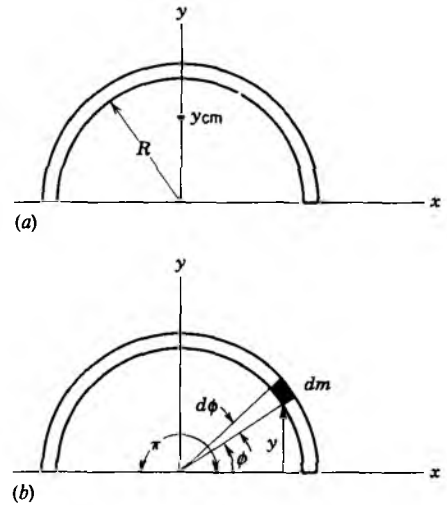


Figura 10 Problema muestra 4. (a) Una tira delgada de metal doblada en forma de semicírculo. (b) Un elemento de la tira de masa dm ubicado en la coordenada ϕ .

sus centros de masa individuales. Entonces el objeto C puede ser tratado como equivalente a dos masas puntuales, representando a los objetos X y D. La figura 9c muestra las posiciones de los centros de masa de estos tres objetos.

La posición del centro de masa del objeto C está dada por la ecuación 11a como:

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

donde x_D y x_X son las posiciones de los centros de masa de los objetos D y X, respectivamente. Observando que $x_C = 0$ y resolviendo para x_X , obtenemos

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}.$$

La razón m_D/m_X debe de ser la misma que la razón de las áreas de los objetos D y X (suponiendo que la placa tenga densidad y espesor uniformes). Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{m_D}{m_X} &= \frac{\text{area of } D}{\text{area of } X} = \frac{\text{area of } D}{\text{area of } C - \text{area of } D} \\ &= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Con $x_D = -R$, obtenemos:

$$x_X = \frac{1}{3}R.$$

Problema muestra 4 Una tira delgada de material está doblada en forma de semicírculo de radio R (Fig. 10). Halle su centro de masa.

Solución En este caso, el uso de una coordenada angular simplifica la integración que va a llevarse a cabo. Además, por la simetría del objeto, concluimos que el centro de masa debe estar sobre el eje y (esto es, $x_{cm} = 0$). Por lo tanto, usaremos la ecuación 17b para hallar y_{cm} . Consideremos el pequeño elemen-

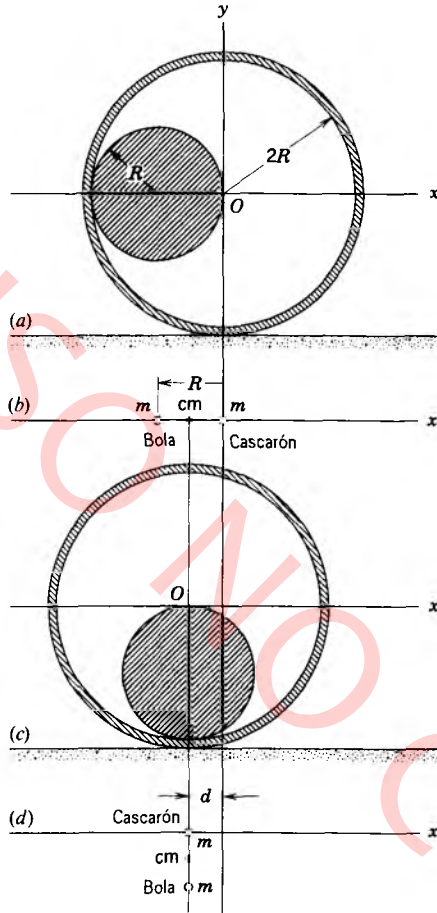


Figura 11 Problema muestra 5. (a) Una bola de radio R se deja caer desde esta posición inicial y es libre de rodar dentro de un cascarón esférico de radio $2R$. (b) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación. (c) El estado final después de que la bola ha llegado al reposo. El cascarón se ha movido de tal forma que el centro de masa del sistema permanece en su lugar. (d) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación.

to de masa dm que se muestra en la figura 10b. Subtiende un ángulo $d\phi$, y puesto que la masa total M de la tira subtiende un ángulo π (un círculo completo subtendería un ángulo 2π), la masa dm debe de ser la misma fracción de M como $d\phi$ lo es de π . Esto es, $dm/M = d\phi/\pi$, o $dm = (M/\pi)d\phi$. El elemento dm está ubicado en la coordenada $y = R \sin \phi$. En este caso podemos escribir la ecuación 17b así:

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^\pi (R \sin \phi) \frac{M}{\pi} d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R.$$

El centro de masa está aproximadamente a dos tercios de un radio situado a lo largo del eje y . Obsérvese que, como ilustra este caso, el centro de masa no necesita estar dentro del volumen o del material de un objeto.

Problema muestra 5 Una bola de masa m y radio R está situada dentro de un cascarón esférico de la misma masa m y de radio interior $2R$. La combinación está en reposo sobre una mesa como se muestra en la figura 11a. La bola se suelta, oscila en vaivén adentro, y por último llega al reposo en el fondo, como en la figura 11c. ¿Cuál será el desplazamiento d del cascarón durante el proceso?

Solución Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema bola-cascarón son la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza normal ejercida verticalmente hacia arriba por la mesa. Ninguna de las fuerzas tiene una componente horizontal, de modo que $\Sigma F_{ext,x} = 0$. Según la ecuación 16 la componente $a_{cm,x}$ de la aceleración del centro de masa debe también ser cero. Entonces, la posición horizontal del centro de masa del sistema debe permanecer fija, y el cascarón debe moverse de tal modo que esto suceda así.

Podemos representar tanto a la bola como al cascarón por partículas aisladas de masa m , localizadas en sus respectivos centros. La figura 11b muestra el sistema antes de que la bola se deje caer, y la figura 11d después de que la bola ha llegado al reposo en el fondo del cascarón. Elegimos que nuestro origen coincida con la posición inicial del centro del cascarón. La figura 11b muestra que, con respecto a este origen, el centro de masa del sistema bola-cascarón está ubicado a una distancia $\frac{1}{2}R$ hacia la izquierda, a mitad del camino entre las dos partículas. La figura 11d muestra que el desplazamiento del cascarón está dado por

$$d = \frac{1}{2}R.$$

El cascarón debe recorrer hacia la izquierda esta distancia mientras la bola llega al reposo.

La bola llega al reposo por la fuerza de fricción que actúa entre ella y el cascarón. ¿Por qué no afecta esta fuerza de fricción a la ubicación final del centro de masa?

9-4 ÍMPETU LINEAL DE UNA PARTÍCULA

El ímpetu de una partícula aislada es un vector \mathbf{p} definido como el producto de su masa m por su velocidad \mathbf{v} :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (19)$$

El ímpetu, por ser el producto de una cantidad escalar por una vectorial, es en sí mismo un vector. Puesto que es proporcional a \mathbf{v} , el ímpetu \mathbf{p} de una partícula depende del marco de referencia del observador; debemos siempre especificar este marco.

Newton, en sus famosos *Principia*, expresó la segunda ley del movimiento en función del ímpetu (al cual llamó “cantidad de movimiento”). Expresado en la terminología moderna la segunda ley de Newton se lee así:

La razón de cambio del ímpetu de un cuerpo es igual a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y está en la dirección de esa fuerza.

En forma simbólica esto se convierte en

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (20)$$

Aquí $\Sigma \mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

Para una partícula aislada de masa constante, esta forma de la segunda ley es equivalente a la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ que hemos venido usando hasta ahora. Esto es, si m es constante, entonces

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Las relaciones $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para partículas aisladas son completamente equivalentes en la mecánica clásica.

Se halla una relación conveniente entre el ímpetu y la energía cinética al combinar $K = \frac{1}{2}mv^2$ y $p = mv$, lo cual da

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad (21)$$

Ímpetu a velocidades elevadas (Opcional)

Con velocidades de la partícula cercanas a la velocidad de la luz (región en la que debe usarse la teoría de la relatividad en lugar de la mecánica newtoniana), la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ya no tiene validez. Sin embargo, sucede que la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ es todavía una ley válida si el ímpetu \mathbf{p} de una partícula aislada se define no como $m\mathbf{v}$ sino como

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (22)$$

donde c es la velocidad de la luz. A velocidades ordinarias ($v \ll c$), la ecuación 22 se reduce a la ecuación 19.

Para partículas relativistas, puede demostrarse que la relación básica entre el ímpetu y la energía cinética es

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \quad (23)$$

Derivaremos este resultado en el capítulo 21. La figura 12 muestra una comparación entre el resultado clásico (Ec. 21) y el relativista (Ec. 23) en partículas para un intervalo de velocidades. Obviamente, el resultado clásico no funciona para velocidades elevadas. Como lo esperábamos (véase el problema 27), la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades ordinarias.

Independientemente de la forma en que escribamos la energía cinética, ésta tiene dimensiones de la masa por la velocidad al cuadrado, que es lo mismo que el ímpetu multiplicado por la velocidad. Por lo tanto, podemos escribir, usando nuestra notación de la sección 1-7 para indicar dimensiones,

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}$$

A menudo resulta conveniente expresar el ímpetu en unidades de energía divididas por la velocidad y, al trabajar con partículas, son elecciones convenientes las expresiones eV/c , MeV/c , etc. Esto nos permite expresar la cantidad pc en unidades de energía tales como MeV , lo cual es mucho más conveniente al trabajar con expresiones como la ecuación 23. Para un electrón con un ímpetu dado de $1.5 \text{ MeV}/c$, por ejemplo, el término pc de la

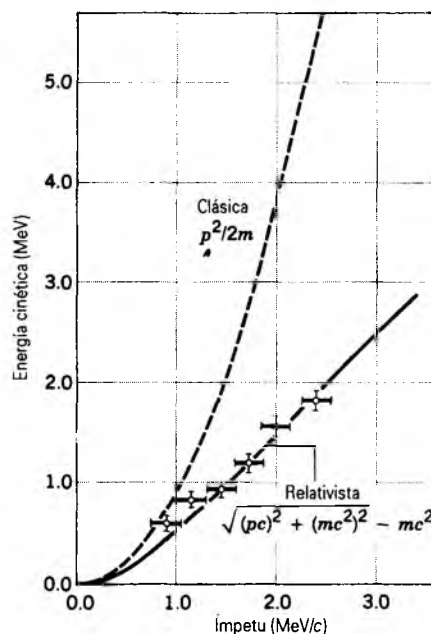


Figura 12 Una comparación de las relaciones clásica (Ec. 21) y relativista (Ec. 23) entre el ímpetu y la energía cinética para electrones emitidos en ciertos procesos de desintegración radioactiva. Los círculos representan las mediciones experimentales; las barras horizontales y verticales que pasan a través de los círculos representan el margen de incertidumbre en estas mediciones. Los datos favorecen obviamente la relación relativista. Nótese que, a baja velocidad (energía e ímpetu pequeños), las dos relaciones son indistinguibles.

ecuación 23 es de 1.5 MeV y puede calcularse fácilmente que la energía cinética del electrón es, según esa ecuación, 1.1 MeV .

En la región de velocidades muy altas de la partícula, el ímpetu p de la partícula puede ser tan grande que el término pc de la ecuación 23 resulta mucho más grande que el término mc^2 , por lo que la ecuación se reduce entonces a $K = pc$ con una buena aproximación. La expresión del ímpetu en unidades de energía divididas por c es especialmente útil en esta región. Por ejemplo, un electrón cuyo ímpetu sea de $500 \text{ MeV}/c$ tiene una energía cinética muy cercana a los 500 MeV . (Obsérvese que esta aproximación es muy pobre para el electrón de 1.5 MeV considerado anteriormente.) ■

9-5 ÍMPETU LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supongamos que en lugar de una partícula aislada tenemos un sistema de N partículas, con masas m_1, m_2, \dots, m_N . Supongamos también que ninguna masa entra o sale del sistema de modo que la masa total $M (= \Sigma m_i)$ del sistema permanece constante en el tiempo. Las partículas pueden interactuar entre sí, y las fuerzas externas pueden actuar igualmente sobre ellas. Cada partícula tiene cierta veloci-

dad y cierto ímpetu en el marco de referencia particular que se esté usando. El sistema, como un todo, tiene un ímpetu total \mathbf{P} , el cual se define simplemente como el vector suma de los ímpetus de las partículas individuales en este mismo marco, o sea

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N \\ = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N. \quad (24)$$

Si comparamos esta relación con la ecuación 13, vemos de inmediato que

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{cm}, \quad (25)$$

la cual es una definición equivalente al ímpetu de un sistema de partículas:

El ímpetu lineal total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.

Si diferenciamos la ecuación 25 con respecto al tiempo obtenemos, para una masa constante M supuesta,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M \mathbf{a}_{cm}. \quad (26)$$

La comparación de la ecuación 26 con la ecuación 16, $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M \mathbf{a}_{cm}$, nos permite escribir la segunda ley de Newton para un sistema de partículas en la forma:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (27)$$

La ecuación 27 afirma que, en un sistema de partículas, la fuerza externa neta es igual a la velocidad de cambio del ímpetu lineal del sistema. Esta ecuación es la generalización de la ecuación de una partícula aislada, $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (Ec. 20), a un sistema de muchas partículas, cuando ninguna masa entra o sale del sistema. La ecuación 27 se reduce a la ecuación 20 para el caso especial de una partícula aislada, puesto que sólo pueden actuar fuerzas externas sobre un sistema de una sola partícula. En la sección 9-8 consideraremos las modificaciones de la ecuación 27 para sistemas de masa variable.

9-6 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU LINEAL

Supongamos que la suma de las fuerzas externas que actúa sobre un sistema es cero. Entonces, según la ecuación 27,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{P} = \text{una constante.}$$

Cuando la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el vector del ímpetu total del sistema permanece constante.

Este resultado sencillo, pero de carácter general, se llama ley de conservación del ímpetu lineal. Al igual que la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del ímpetu lineal se aplica a una gran variedad de situaciones físicas y no tiene excepciones conocidas.

Las leyes de conservación (tales como las de la energía y del ímpetu lineal, que ya hemos visto, y las del ímpetu angular y la carga eléctrica, que veremos más adelante en el texto) son de importancia teórica y práctica en la física, porque son sencillas y universales. Las leyes de conservación de la energía y del ímpetu lineal, por ejemplo, van más allá de las limitaciones de la mecánica clásica y permanecen válidas tanto en el ámbito relativista como en el cuántico.

Todas las leyes de la conservación tienen la forma siguiente. Mientras, el sistema está cambiando, existe un aspecto del mismo, por otra parte, que permanece inalterable. Observadores diferentes, cada uno de ellos en un marco de referencia diferente, al observar el cambio de un mismo sistema, estarían todos de acuerdo en que las leyes de conservación se aplican al sistema. Por ejemplo, para la conservación del ímpetu lineal, observadores situados en marcos de referencia inerciales diferentes, asignarían valores diferentes de \mathbf{P} al ímpetu lineal del sistema, pero todos estarían de acuerdo (suponiendo que $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$) en que el valor de \mathbf{P} permanece sin cambio mientras se mueven las partículas que forman el sistema. La fuerza \mathbf{F} es invariante con respecto a las transformaciones galileanas (todos los observadores inerciales están de acuerdo en su medición). Si $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$ en cualquier marco inercial, entonces todos los observadores inerciales hallarán también que $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$ y llegarán a la conclusión de que ese ímpetu se conserva.

El ímpetu total de un sistema puede ser cambiado solamente por las fuerzas externas que actúen sobre el sistema. Las fuerzas internas, por ser iguales y opuestas, producen cambios de ímpetu iguales y opuestos, que se cancelan entre sí. En un sistema de partículas en el cual no actúe ninguna fuerza externa,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \text{una constante.} \quad (28)$$

Los ímpetus de las partículas individuales pueden cambiar, pero su suma permanece constante si no existe fuerza externa alguna.

El ímpetu es una cantidad vectorial. La ecuación 28 es, por lo tanto, equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de las coordenadas. De aquí que la conservación del ímpetu lineal nos proporciona las tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Por otra parte, la conservación de la energía nos

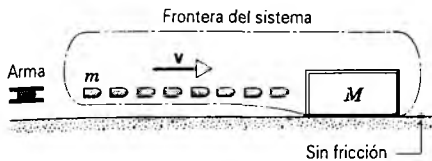


Figura 13 Problema muestra 6. Un arma dispara una ráfaga de balas contra un bloque de madera. Analizamos el sistema que definimos que consta del bloque y las balas en vuelo.

proporciona solamente una condición del movimiento de un sistema al que se aplique, porque la energía es una cantidad escalar.

Si nuestro sistema de partículas consta solamente de una partícula aislada, entonces la ecuación 28 se reduce a afirmar que, si ninguna fuerza neta actúa sobre ella, el ímpetu de la partícula es una constante, lo cual es equivalente (para una partícula aislada) a afirmar que su velocidad es una constante. Esto es, simplemente, otra forma de enunciar la primera ley de Newton.

Problema muestra 6 Una ráfaga de balas de masa m y de 3.8 g cada una, se dispara horizontalmente con una velocidad v de 1100 m/s contra un gran bloque de madera de masa M ($= 12$ kg) que inicialmente está en reposo sobre una mesa horizontal; véase la figura 13. Si el bloque puede deslizarse sin fricción por la mesa, ¿qué velocidad adquirirá después de que se han incrustado en él 8 balas?

Solución La ecuación 28 ($P =$ una constante) es válida solamente para sistemas cerrados, en los que no entre ni salga partícula alguna. Entonces nuestro sistema debe incluir tanto al bloque como a las 8 balas, considerado como un todo. En la figura 13, hemos identificado a este sistema trazando una curva cerrada a su alrededor.

Por ahora, consideraremos solamente la dirección horizontal. No actúa ninguna fuerza externa horizontal sobre el sistema bloque + balas. Las fuerzas que actúan cuando las balas chocan contra el bloque son fuerzas internas y no contribuyen a F_{ext} , la cual no tiene una componente horizontal.

Puesto que no actúan fuerzas externas (horizontales), podemos aplicar la ley de conservación del ímpetu (Ec. 28). El ímpetu inicial (horizontal), medido mientras las balas están todavía en camino y el bloque está en reposo, es

$$P_i = N(mv),$$

en el cual mv es el ímpetu de una bala individual y $N = 8$. El ímpetu final, medido cuando todas las balas estén en el bloque y el bloque se deslice sobre la mesa a velocidad V , es

$$P_f = (M + Nm)V.$$

La conservación del ímpetu requiere que

$$P_i = P_f$$

o sea

$$N(mv) = (M + Nm)V.$$

Resolviendo para V nos da

$$V = \frac{Nm}{M + Nm} v = \frac{(8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})}{12 \text{ kg} + (8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})} (1100 \text{ m/s}) = 2.8 \text{ m/s}.$$

Con la elección que hemos hecho del sistema, no tuvimos que considerar las fuerzas ejercidas cuando las balas penetran en el bloque. Esas fuerzas son todas internas.

En dirección vertical, las fuerzas externas son el peso de las balas, el peso del bloque, y la fuerza normal sobre el bloque. Mientras que las balas están en vuelo, adquieren la componente de un ímpetu vertical pequeño como resultado de la acción de la gravedad. Cuando las balas chocan contra el bloque, el bloque debe ejercer sobre cada bala una fuerza con componentes tanto horizontal como vertical. Junto con la fuerza vertical sobre la bala, que es necesaria para que su ímpetu vertical cambie a cero, debe haber (de acuerdo con la tercera ley de Newton) un aumento correspondiente de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie horizontal. Este aumento no sólo se debe al peso de la bala encajada; tiene una contribución adicional que proviene de la razón de cambio del ímpetu vertical de la bala. Cuando todas las balas hayan llegado al reposo respecto al bloque, la fuerza normal será igual a los pesos combinados del bloque y de las balas encajadas.

Por simplicidad, para la resolución de este problema hemos supuesto que las balas se disparan tan rápidamente que las 8 están en vuelo antes que la primera bala llegue al bloque. ¿Puede usted resolver este problema sin hacer esta suposición?

Supongamos que la frontera del sistema se amplía de modo que incluya al arma, la cual se halla fija a la Tierra. ¿Cambia el ímpetu horizontal de este sistema antes y después del disparo? ¿Existe una fuerza externa horizontal?

Problema muestra 7 Como lo muestra la figura 14, un cañón cuya masa M es de 1300 kg dispara una bala de 72 kg en dirección horizontal a una velocidad de salida de $v = 55$ m/s. El cañón está montado de modo que pueda recular libremente. (a) ¿Cuál es la velocidad V del cañón al recular respecto a la Tierra? (b) ¿Cuál es la velocidad inicial v_e de la bala respecto a la Tierra?

Solución (a) Elegimos como nuestro sistema al cañón + la bala. Al hacerlo así, las fuerzas asociadas con el disparo del cañón son internas al sistema, y no tenemos que tratar con ellas. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema no tienen componentes horizontales. Así, la componente horizontal del ímpetu lineal total del sistema debe permanecer sin cambio cuando el cañón es disparado.

Elegimos un marco de referencia fijo respecto a la Tierra y suponemos que todas las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 14.

Antes de ser disparado el cañón, el sistema tiene un ímpetu inicial P_i igual a cero. Después de haber sido disparada, la bala tiene una velocidad horizontal v con respecto al cañón al recular, siendo v la velocidad de salida del cañón. Sin embargo, en el marco de referencia de la Tierra la velocidad horizontal de la bala es $v + V$. Entonces, el ímpetu lineal total del sistema después del disparo es

$$P_f = MV + m(v + V),$$

donde el primer término de la derecha es el ímpetu del cañón al recular y el segundo término el de la bala cuando va en camino.

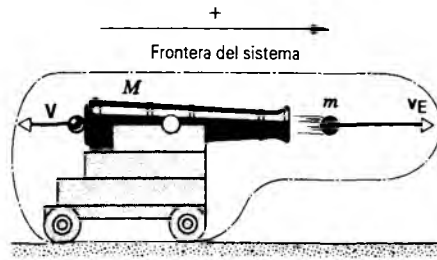


Figura 14 Problema muestra 7. Un cañón de masa M dispara una bala de masa m . Las velocidades de la bala y del cañón al recular se muestran en un marco de referencia fijo en la Tierra. Las velocidades se consideran positivas hacia la derecha.

La conservación del ímpetu lineal en la dirección horizontal requiere que $P_i = P_f$, o sea

$$0 = MV + m(v + V).$$

Resolviendo para V nos da

$$V = -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} = -2.9 \text{ m/s}.$$

El signo menos nos dice que el cañón recula hacia la izquierda en la figura 14, como esperábamos que lo haría.

(b) La velocidad de la bala respecto al cañón (al recular) es la velocidad de salida v . Con respecto a la Tierra, la velocidad de la bala es

$$\begin{aligned} v_E &= v + V \\ &= 55 \text{ m/s} + (-2.9 \text{ m/s}) = 52 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

A causa de la reculada, la bala se mueve un poco más lentamente respecto a la Tierra de lo que lo haría de no existir reculada. Nótese la importancia, en este problema, de elegir al sistema (cañón + bala) de manera acertada y siendo absolutamente claro respecto al marco de referencia (la Tierra o la reculada del cañón) al que se refieren las diversas mediciones.

Problema muestra 8 La figura 15 muestra dos bloques unidos por un resorte y libres de deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción. Los bloques, cuyas masas son m_1 y m_2 , son separados y luego soltados a partir de una situación en reposo. ¿Qué fracción de la energía cinética total del sistema tendrá cada bloque en cualquier tiempo posterior?

Solución Tomamos a los dos bloques y al resorte (supuesto sin masa) como nuestro sistema y, como marco de referencia, a la superficie horizontal sobre la que se deslizan. Suponemos que las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 15.

El ímpetu inicial P_i del sistema antes de soltar a los bloques es cero. El ímpetu final, en cualquier tiempo después de haber soltado a los bloques, es

$$P_f = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades de los bloques. La conservación del ímpetu requiere que $P_i = P_f$, o sea,

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

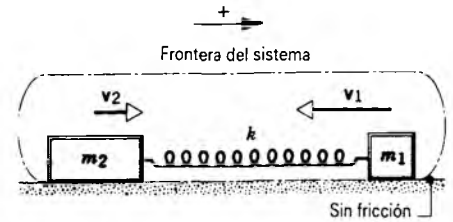


Figura 15 Problema muestra 8. Dos bloques, descansando sobre una superficie sin fricción y unidos por un resorte, han sido apartados y luego soltados desde el reposo. El ímpetu total inicial es cero, y así debe permanecer en todos los tiempos sucesivos.

Entonces, tenemos que

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \quad (29)$$

diéndonos el signo menos que las dos velocidades tienen siempre direcciones opuestas. Esto se cumple para cualquier instante después de haber soltado a los bloques, no importa cuál sea la velocidad de cada uno de ellos.

Las energías cinéticas de los bloques son $K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ y $K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$. La fracción que buscamos es, para el bloque de masa m_1 ,

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}.$$

Sustituyendo $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ nos lleva, después de un poco de álgebra, a

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

De manera similar, para el bloque de masa m_2 ,

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Entonces, aunque la energía cinética del sistema oscilante varía con el tiempo, la distribución de esta energía entre los dos bloques es una constante, independiente del tiempo, recibiendo el bloque con menor masa la mayor parte de la energía cinética disponible. Si, por ejemplo, $m_2 = 10m_1$, entonces

$$f_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.91 \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.09.$$

En este caso, el bloque menos pesado (m_1) obtiene el 91% de la energía cinética disponible y el bloque más pesado (m_2) obtiene el 9% restante. En el límite $m_2 \gg m_1$, el bloque menos pesado obtiene esencialmente toda la energía cinética.

Las expresiones para f_1 y f_2 se aplican igualmente bien a una piedra que caiga en el campo gravitatorio de la Tierra. Si m_2 representa a la masa de la Tierra y m_1 a la masa de la piedra, en el marco de referencia de sus centros de masa, la piedra toma casi toda la energía cinética ($f \approx 1$) y la Tierra toma muy poca ($f_2 \approx 0$). Las magnitudes de los ímpetus lineales de la piedra y de la Tierra son iguales, aunque la pequeña velocidad de la Tierra es compensada por su enorme masa. Este argumento justifica despreciar la energía cinética de la Tierra cuando usábamos la conservación de la energía en el capítulo 8 para analizar objetos que caen bajo la acción de la gravedad terrestre.

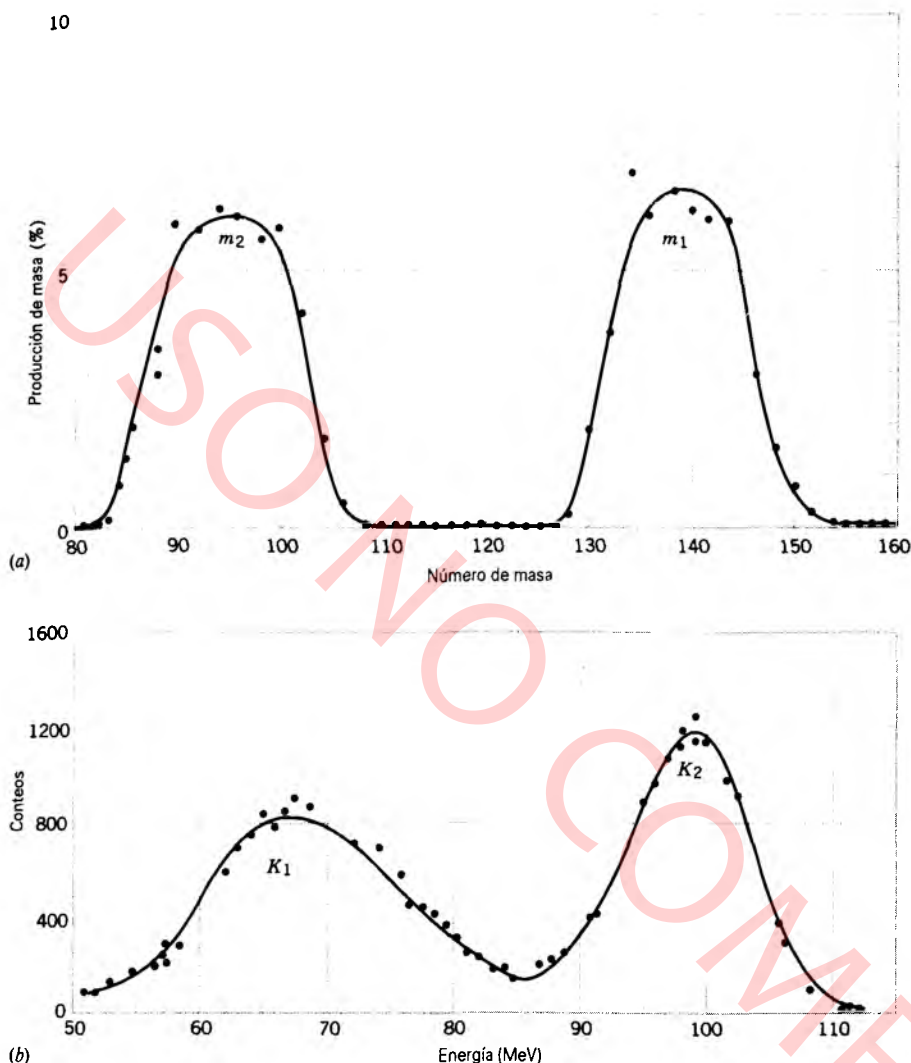


Figura 16 (a) La distribución de masa de los fragmentos emitidos en la fisión nuclear. La escala vertical da la fracción de fisiones que se producen en un fragmento con el número de masa dado por la escala horizontal. (b) La distribución de la energía de los fragmentos emitidos en la fisión.

Otro ejemplo práctico de este efecto ocurre en el caso de la fisión nuclear, en que un núcleo pesado como el ^{235}U se divide en dos fragmentos más ligeros. Los fragmentos son impulsados por su repulsión eléctrica mutua desde una posición inicial en que se encuentran muy próximos entre sí y casi en reposo. De la ecuación 29, esperamos que la razón de las energías cinéticas sea

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

Esto es, el fragmento más pesado tiene la energía cinética más pequeña.

La fisión es un proceso estadístico, en el cual existe una distribución de las masas posibles de los fragmentos y una distribución correspondiente de las energías cinéticas de los fragmentos. La figura 16a muestra la distribución de la masa y la figura 16b muestra la distribución de la energía cinética. Nótese que la fisión en fragmentos de igual masa es muy rara; un fragmento tiene usualmente un número de masa de alrededor de 138 y el otro alrededor de 94. Una razón típica de masa m_2/m_1 es, entonces, de alrededor de $94/138 = 0.68$. Una razón típica de energía cinética K_1/K_2 es de alrededor de $67 \text{ MeV}/99 \text{ MeV} = 0.68$, igual a la razón de masa típica, como era de esperarse. Entonces, el reparto de la energía cinética entre los fragmentos

de la fisión se lleva a cabo de acuerdo con la restricción de que el ímpetu se conserva.

9-7 TRABAJO Y ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS (Opcional)

La figura 17 muestra a un patinador que se impulsa desde una barandilla, ganando energía cinética en el proceso. Si le preguntamos al patinador de dónde proviene esta energía cinética, probablemente nos dirá que, a juzgar por sus esfuerzos musculares, la energía requerida debe provenir de su propia reserva de energía interna. Tratemos de verificar este argumento aplicando la conservación de la energía al sistema que consta únicamente del patinador.

Según la ecuación 28 del capítulo 8 tenemos que

$$\Delta U + \Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W. \quad (30)$$

Al derivar la ecuación 33 del capítulo 8, dividamos la energía cinética de un sistema en dos términos: ΔK_{cm} , que representa los

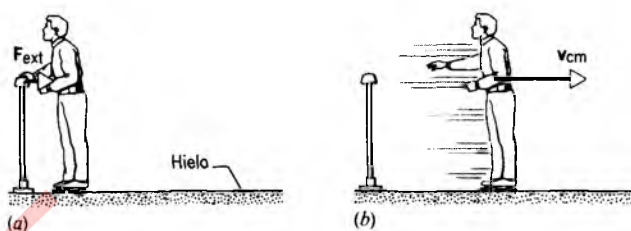


Figura 17 (a) Un patinador se empuja a sí mismo contra la barandilla. La barandilla ejerce una fuerza F_{ext} sobre el patinador. (b) Después de haberse empujado, el patinador se mueve a una velocidad v_{cm} .

movimientos internos de las partículas del sistema, y ΔK , que representaba el movimiento "global" del sistema. Aquí indicamos explícitamente que este movimiento "global" es, de hecho, el movimiento del centro de masa, y la energía cinética correspondiente es

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2, \quad (31)$$

que es la energía cinética que el sistema de masa total M tendría si se moviese como una partícula a una velocidad v_{cm} . La energía cinética interna está incluida en la ecuación 30 como una parte de ΔE_{int} . (Véase el problema 49 para una derivación de esta división de la energía cinética.)

No hay cambios en la energía potencial del patinador (el hielo es horizontal), de modo que hacemos que $\Delta U = 0$. Además, la barandilla no trabaja sobre el patinador porque el punto de aplicación de la fuerza no se mueve. Recordemos la explicación que acompañaba a la figura 13 del capítulo 8. Cuando se efectúa un trabajo externo sobre un sistema, la energía se transfiere a través de las fronteras del sistema. No se transfiere ninguna energía de la barandilla al patinador, así que la barandilla no efectúa ningún trabajo externo sobre el patinador. Entonces $W = 0$, y la ecuación 30 se reduce a

$$\Delta K_{\text{cm}} = -\Delta E_{\text{int}}. \quad (32)$$

Puesto que ΔK_{cm} es una cantidad positiva (el patinador gana energía cinética al empujarse contra la barandilla), ΔE_{int} debe ser una cantidad negativa. Esto confirma el argumento del patinador: la energía cinética que adquiere al empujarse contra la barandilla proviene de su reserva de energía interna y no de alguna fuente externa.

El análisis de la energía es útil, pero podríamos desear ir más allá y analizar el sistema en función de las fuerzas y las aceleraciones. Veamos qué podemos aprender del patinador aplicando la segunda ley de Newton. La barandilla ejerce una fuerza F_{ext} sobre el patinador (al cual continuamos viendo como nuestro sistema). Para empujarse desde la barandilla, el patinador debe estirar, necesariamente, su brazo. Como resultado, las diferentes partes de su cuerpo pueden tener desplazamientos, velocidades, y aceleraciones diferentes mientras se está empujando. Así, el patinador debe de ser tratado no como una partícula aislada sino como un sistema de partículas. En este caso, usando la ecuación 16, podemos hallar la aceleración del centro de masa del patinador si conocemos la fuerza externa ejercida sobre él por la barandilla:

$$F_{\text{ext}} = M a_{\text{cm}}. \quad (33)$$

Para una partícula aislada, hallamos que el teorema trabajo-energía ($W = \Delta K$) es un resultado útil. Está claro que no podemos

aplicar este teorema al patinador, porque éste no se mueve como una partícula única. Como ya lo habíamos deducido, $W = 0$, pero $\Delta K \neq 0$. Entonces la forma de partícula única del teorema trabajo-energía no es válida. Tratemos de hallar una relación que sea aplicable a un sistema de partículas.

Hagamos que una fuerza externa neta F_{ext} actúe sobre un sistema de partículas. Consideremos el caso general en que el punto de aplicación de esta fuerza puede moverse o que (como en el caso del patinador de la Fig. 17) puede no moverse en nuestro marco de referencia inercial elegido. Suponemos que todas las fuerzas y movimientos están en la dirección x . Puesto que estamos tratando con un sistema de partículas, enfocamos nuestra atención no al movimiento del punto de aplicación de la fuerza externa sino al movimiento del centro de masa del sistema.

Supongamos que el centro de masa del sistema se mueva una distancia dx_{cm} a lo largo del eje x . Al multiplicar cada lado de la ecuación 33 por dx_{cm} nos da

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M a_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} v_{\text{cm}} dt,$$

donde hemos reemplazado a_{cm} por dv_{cm}/dt y a dx_{cm} por $v_{\text{cm}} dt$. Esto da

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}}. \quad (34)$$

Supongamos que el centro de masa se mueve desde x_i hasta x_f cuando esta fuerza actúa. Al integrar la ecuación 34 entre estos límites tenemos que

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = \int_{v_{\text{cm},i}}^{v_{\text{cm},f}} M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm},f}^2 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm},i}^2. \quad (35)$$

El lado derecho de la ecuación 35 puede escribirse usando la ecuación 31 en la forma $K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}$. Esto representa el cambio en la energía cinética que experimentaría una partícula de masa M cuya velocidad cambiara de $v_{\text{cm},i}$ a $v_{\text{cm},f}$.

El lado izquierdo de la ecuación 35 se parece un poco a la definición del trabajo y, de hecho la integral tiene la dimensión de trabajo. Sin embargo, este trabajo no es en el sentido en que lo hemos definido, porque dx_{cm} no es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa. (En nuestra definición original del trabajo $W = \int F dx$ del capítulo 7, dx era el desplazamiento del punto de aplicación de F .) Obsérvese nuevamente que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa es cero en la figura 17, y por lo tanto $W = 0$ en ese caso, pero el lado izquierdo de la ecuación 35 no es cero.*

En muchos casos de interés para nosotros, la fuerza externa es constante y puede ser sacada fuera de la integral en la ecuación 35. El resto de la integral da el desplazamiento neto s_{cm}

* Algunos autores usan los términos *seudotrabajo* o *trabajo del centro de masa* para describir el lado izquierdo de la ecuación 35. Esta ecuación se conoce a veces como la *ecuación del centro de masa*. Nosotros preferimos no introducir un término estrechamente relacionado con el trabajo para describir una cantidad que no está relacionada con el significado aceptado de trabajo. Para un compendio general del trabajo y la energía en un sistema de partículas, véase "Developing the Energy Concepts in Introductory Physics", por A. B. Arons, *The Physics Teacher*, octubre de 1989, pág. 506).

del centro de masa del sistema. En este caso podemos reescribir la ecuación 35 así:

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{cm}}. \quad (36)$$

La ecuación 35 se parece al teorema trabajo-energía para una partícula, y de hecho se reduciría a ese resultado si nuestro sistema constara solamente de una partícula aislada (o de un cuerpo que pueda ser tratado como una partícula). Existe, sin embargo, una diferencia importante entre la ecuación 35 y el teorema trabajo-energía para una partícula. El teorema trabajo-energía para una partícula aislada es también un enunciado sobre la conservación de la energía en el movimiento de una partícula, porque la energía de traslación es la única clase de energía que una partícula puede tener. La ecuación 35, por el contrario, no es en sentido alguno una expresión de la conservación de la energía, porque un sistema de partículas puede tener energía en otras formas, incluyendo la interna, la potencial, y la de rotación, entre otras. Para un sistema de partículas, la ecuación 35 y la conservación de la energía (Ec. 30) pueden aplicarse como relaciones separadas e independientes.

Como un ejemplo de la aplicación de estos principios, consideremos el resultado de empujar una regla de un metro (inicialmente en reposo) que pueda deslizarse libremente sin fricción sobre una superficie horizontal. Ejercemos una fuerza constante de magnitud F_{ext} , la cual puede ser aplicada sobre cualquier parte de la regla. Si aplicamos la fuerza en la marca de 50 cm (Fig. 18a), la regla se mueve como una partícula con una aceleración $a_{\text{cm}} = F_{\text{ext}}/m$; cada punto de la regla se mueve con esta aceleración. El desplazamiento s del punto en el que aplicamos la fuerza es igual al desplazamiento s_{cm} del centro de masa. En este caso, efectuamos un trabajo de magnitud $F_{\text{ext}}s$ cuando toda la regla (que se mueve como una partícula) es desplazada en s_{cm} . La forma de partícula del teorema trabajo-energía puede emplearse para hallar la velocidad resultante v de cada punto de la regla. Consideremos ahora el caso en que la fuerza se ejerce en la marca de 25 cm (Fig. 18b). Si usted trata de llevar a cabo este experimento, hallará que la regla *no* se mueve como una partícula. Como veremos en el capítulo 12, podemos dividir este movimiento complejo en dos partes: el movimiento de traslación como una partícula y la rotación con respecto al centro de masa. El punto en el cual aplicamos la fuerza se mueve una distancia *mayor que* s_{cm} , como lo podemos ver en la figura 18b. El trabajo que efectuamos sobre la regla es, por tanto, *mayor que* $F_{\text{ext}}s_{\text{cm}}$. Para analizar este movimiento debemos usar ambas ecuaciones 30 y 36. El producto $F_{\text{ext}}s_{\text{cm}}$ da, usando la ecuación 36, el cambio en la energía cinética de *traslación* de la regla. El producto $F_{\text{ext}}s$, donde s es la distancia que se mueve el punto de 25 cm al cual se aplicó la fuerza, da el trabajo W que aparece en la ecuación 30, el cual es una expresión de la conservación de la energía. Como lo expondremos en el capítulo 12, podemos asignar parte de la energía cinética total K al movimiento de traslación y parte al movimiento de rotación.

Problema muestra 9 Un patinador de 72 kg se empuja desde una barandilla, como se muestra en la figura 17, ejerciendo una fuerza constante $F = 55 \text{ N}$ sobre la barandilla al hacerlo. Su centro de masa se mueve a lo largo de una distancia $s_{\text{cm}} = 32 \text{ cm}$ hasta que pierde contacto con la barandilla. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador cuando se separa de la barandilla? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

Solución (a) Una vez más el patinador es nuestro sistema. Según la tercera ley de Newton, la barandilla ejerce sobre el

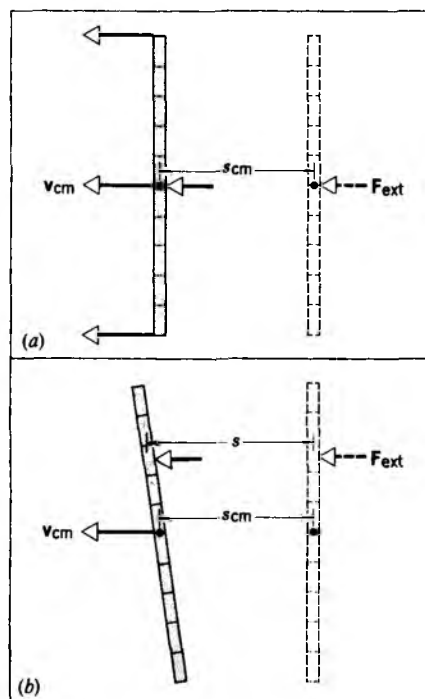


Figura 18 (a) Una regla de un metro es empujada a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por una fuerza F_{ext} . La fuerza se ejerce en la marca de 50 cm. Aquí la regla se mueve como una partícula. (b) La fuerza se ejerce ahora sobre la marca de 25 cm. La regla gira ahora al mismo tiempo que se traslada y ya no se mueve como una partícula. La fuerza se ejerce en un desplazamiento s que es mayor que el desplazamiento s_{cm} del centro de masa.

patinador una fuerza de 55 N hacia la derecha en la figura 17. Esta fuerza es la única fuerza externa que necesitamos considerar. Según la ecuación 36, tenemos que

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2F_{\text{ext}}s_{\text{cm}}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55 \text{ N})(0.32 \text{ m})}{72 \text{ kg}}} = 0.70 \text{ m/s}.$$

(b) Apliquemos ahora la ley de conservación de la energía, la cual, en las condiciones que corresponden a este problema, toma la forma de la ecuación 32, o sea

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= -\Delta K_{\text{cm}} = -\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = -\frac{1}{2} (72 \text{ kg})(0.70 \text{ m/s})^2 \\ &= -17.6 \text{ J}. \end{aligned}$$

Esta cantidad de energía interna podría reponerse digiriendo $\frac{1}{4}$ de cucharadita de cualquier refresco dietético.

Problema muestra 10 En este caso, nuestro patinador se empuja contra su compañera, quien está parada con la espalda contra una pared, como en la figura 19a. Ambos tienen los brazos doblados inicialmente. Cada uno empuja contra el otro estirando los brazos, hasta que se separan (Fig. 19b). La compañera ejerce una constante de fuerza $F_{\text{ext}} = 55 \text{ N}$ a lo largo de una distancia de $s = 32 \text{ cm}$; ésta es la distancia en que se mueven

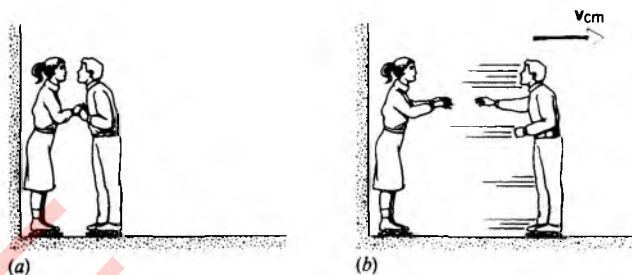


Figura 19 Problema muestra 10. (a) Un patinador y su compañera se preparan para ejercer fuerzas uno contra el otro extendiendo sus brazos. La compañera apoya la espalda contra la pared y, por lo tanto, no se mueve. (b) Después de que los brazos se han extendido, el patinador se mueve a una velocidad v_{cm} .

realmente sus manos al extender sus brazos. En el instante en cesa el contacto, el centro de masa del patinador se ha movido a lo largo de una distancia total de $s_{cm} = 58$ cm como resultado de la extensión de *ambos* pares de brazos. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador después de haber cesado el contacto? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

Solución (a) Tomamos al patinador como nuestro sistema. Nótese que en este caso existe un trabajo externo efectuado sobre el sistema, de modo que hay una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. Según la ecuación 36 tenemos que

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55 \text{ N})(0.58 \text{ m})}{72 \text{ kg}}} = 0.94 \text{ m/s}.$$

(b) Según la ecuación de la conservación de energía para nuestro sistema, tenemos que

$$\Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W,$$

donde $W (= F_{ext}s)$ es el trabajo externo efectuado sobre el patinador por su compañera. Resolviendo para el cambio de energía interna ΔE_{int} y sustituyendo el resultado $\Delta K_{cm} = F_{ext}s_{cm}$ de la parte (a), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= W - \Delta K_{cm} = F_{ext}s - F_{ext}s_{cm} \\ &= (55 \text{ N})(0.32 \text{ m}) - (55 \text{ N})(0.58 \text{ m}) \\ &= +17.6 \text{ J} - 31.9 \text{ J} \approx -14.3 \text{ J}. \end{aligned}$$

Así pues, para lograr su energía cinética final, el patinador debe proporcionar 14.3 J de energía de sus recursos internos. Su compañera proporciona 17.6 J al efectuar el trabajo sobre el patinador, trabajo que, por supuesto, proviene de la reserva interna *de ella*. Si la compañera no estuviera presente y el patinador hubiera alcanzado la misma energía cinética empujándose directamente contra la pared, necesitaría proporcionar los 31.9 J completos de energía cinética a partir de su fuente de energía interna.

Problema muestra 11 Un bloque de 5.2 kg se proyecta sobre una superficie horizontal a una velocidad horizontal inicial de 0.65 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la

superficie es de 0.12. (a) ¿Qué le pasa a la energía cinética inicial del bloque? (b) ¿Qué distancia recorre el bloque hasta llegar al reposo?

Solución (a) Al aplicar la conservación de energía, el sistema más útil a considerar es el bloque más la porción de la superficie horizontal sobre la que se desliza. Al usar la ecuación 30, tenemos que $\Delta U = 0$, porque no ocurre ningún cambio de energía potencial sobre la superficie horizontal. Además $W = 0$, porque no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema. (Hemos definido al sistema de modo que la fricción sea una fuerza *interna*.) Así, la ecuación 30 resulta

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm},$$

donde ΔK_{cm} es negativa, correspondiendo a una pérdida de energía cinética. Sustituyendo valores, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= -(0 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2) = +\frac{1}{2}(5.2 \text{ kg})(0.65 \text{ m/s})^2 \\ &= +1.1 \text{ J}. \end{aligned}$$

Este aumento en la energía interna del sistema se revela como un incremento pequeño de la temperatura del bloque y de la superficie horizontal. Es difícil de calcular cómo se distribuye esta energía entre el bloque y la superficie; en gran parte evitamos esta dificultad al considerar al sistema formado por el bloque más la superficie, en lugar de analizar el bloque solamente.

(b) En este caso, elegimos al bloque solamente como nuestro sistema. No podemos tratar al bloque como una partícula, porque aquí intervienen las transferencias de energía (específicamente, de la energía interna) distintas a la energía cinética de traslación. Aplicando la ecuación 36, tenemos que

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm},$$

donde F_{ext} es la fuerza de fricción externa ($= -\mu Mg$, tomando la dirección del movimiento como positiva) que actúa sobre el bloque y s_{cm} es el desplazamiento del centro de masa del bloque. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} (-\mu Mg)(s_{cm}) &= 0 - \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\ \text{o sea} \quad s_{cm} &= \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65 \text{ m/s})^2}{2(0.12)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.18 \text{ m}. \end{aligned}$$

9-8 SISTEMAS DE MASA VARIABLE (Opcional)

Imaginemos que la cureña que sostiene al cañón en la figura 14 sostiene también a una gran dotación de balas de cañón. Cuando el cañón se dispara repetidamente, la cureña (que suponemos se mueve sin fricción) recula hacia la izquierda, y con cada reculada aumenta su velocidad. Con la frontera del sistema representada como en la figura 14, sabemos que el ímpetu horizontal total debe ser cero y que no existe ninguna fuerza horizontal neta sobre el sistema. Sin embargo, si consideramos un sistema que incluya sólo al cañón más la cureña, entonces el planteamiento previo ya no es válido. El ímpetu del cañón aumenta cada vez que se dispara, y es apropiado que usemos el lenguaje familiar de la física newtoniana para tener en cuenta el cambio en el ímpetu por la acción de una fuerza apropiada. En este caso, la fuerza que acelera al cañón es una fuerza de reacción: el

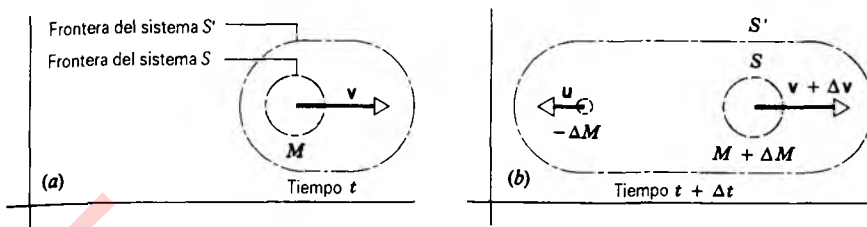


Figura 20 (a) Un sistema S' en el tiempo t consta de una masa M que se mueve a velocidad v . (b) En un tiempo Δt más tarde, la masa original M ha arrojado cierta masa $-\Delta M$. La masa restante $M + \Delta M$, a la cual llamamos subsistema S , se mueve ahora a una velocidad $v + \Delta v$.

cañón, en virtud de la explosión de su carga, empuja contra las balas de cañón que arroja, y la fuerza de reacción (las balas de cañón empujando contra el cañón) hace mover al cañón hacia la izquierda.

Cuando el cañón se dispara repetidamente, la masa total sobre la cureña disminuye según la cantidad de balas de cañón que hayan sido arrojadas. Los métodos del problema muestra 7 no pueden emplearse fácilmente para resolver este problema porque la masa M del objeto que recula es diferente cada vez que el cañón dispara.

En este ejemplo nos referiremos al sistema S , que consta del cañón más la cureña, como un sistema de "masa variable". Por supuesto, el sistema más grande S' que consta del cañón más las balas de cañón disparadas, es un sistema de masa constante y también un sistema de ímpetu constante (en ausencia de una fuerza externa). Sin embargo, el sistema S más pequeño no tiene una masa constante. Aún más, las balas de cañón arrojadas llevan consigo un ímpetu, y existe un flujo neto de ímpetu de S que es el responsable de su aceleración.

El ejemplo anterior da, razonablemente, una buena imagen mental de cómo trabaja un cohete. El combustible se quema y arroja a gran velocidad; los productos de la combustión corresponden a las balas de cañón. El cohete (menos el combustible consumido) experimenta una aceleración que depende de la cantidad de combustible que se consume y de la velocidad con que se arroja.

El objetivo del análisis de sistemas similares al cohete no es el de considerar la cinemática de todo el sistema S' . En cambio, enfocamos nuestra atención a un subsistema particular S , y nos preguntamos cómo se mueve S al redistribuirse la masa dentro del sistema entero S' de modo que cambie la masa dentro del subsistema S . La masa total dentro de S' permanece constante, pero el subsistema particular S que consideramos puede cambiar su estado de movimiento al ganar o al perder masa (e ímpetu).

La figura 20 muestra una vista esquemática de un sistema generalizado. En el tiempo t , el subsistema S tiene una masa M y se mueve a velocidad v en el marco de referencia particular desde el que lo estamos observando. En el tiempo $t + \Delta t$, la masa de S ha cambiado en una cantidad ΔM (una cantidad negativa, en el caso de una masa arrojada) a $M + \Delta M$, mientras que la masa del resto del sistema íntegro S' ha cambiado en una cantidad correspondiente $-\Delta M$. El sistema S se mueve ahora a una velocidad $v + \Delta v$, y la materia arrojada se mueve a una velocidad u , ambas medidas desde nuestro marco de referencia.

Para hacer esta situación lo más general posible, permitimos también una fuerza externa F_{ext} que pueda actuar sobre todo el sistema. Ésta no es la fuerza que impulsa al cohete (la cual es una fuerza interna para el sistema S'), sino que es más bien la

fuerza debida a algún agente externo, quizás la gravedad o el arrastre atmosférico. El ímpetu total de todo el sistema S' es P , y la segunda ley de Newton puede expresarse así:

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} \quad (37)$$

En el intervalo de tiempo Δt , el cambio de ímpetu ΔP es

$$\Delta P = P_f - P_i \quad (38)$$

donde P_f , el ímpetu final del sistema S' en el tiempo $t + \Delta t$, y P_i , el ímpetu inicial de S' en el tiempo t , están dados por

$$P_i = Mv, \quad (39a)$$

$$P_f = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u. \quad (39b)$$

El cambio en el ímpetu de S' es, entonces,

$$\Delta P = P_f - P_i = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u - Mv. \quad (40)$$

Reescribiendo la derivada de la ecuación 37 como un límite y sustituyendo esta expresión para ΔP , obtenemos

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u - Mv}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[M \frac{\Delta v}{\Delta t} + (v - u) \frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta v \frac{\Delta M}{\Delta t} \right] \\ &= M \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dM}{dt}. \end{aligned} \quad (41)$$

Nótese que, al tomar el límite, el último término dentro de los corchetes cuadrados se anula, porque $\Delta v \rightarrow 0$ según $\Delta t \rightarrow 0$. En la ecuación 41, M es la masa del subsistema S en el tiempo t , y dv/dt es su aceleración cuando arroja masa a la velocidad u (en nuestro marco de referencia) y en una cantidad $|dM/dt|$.

Podemos también expresar la ecuación 41 de una forma ligeramente más general:

$$F_{ext} = \frac{d}{dt} (Mv) - u \frac{dM}{dt} \quad (42)$$

La ecuación 42 no se parece en absoluto a $F_{ext} = Ma$ o a $F_{ext} = d(Mv)/dt$, que hemos usado previamente para analizar el movimiento de partículas o de sistemas de masa constante. Podemos reducir la ecuación 42 a la forma de partícula de la segunda ley de Newton en dos casos muy especiales solamente: (1) cuando

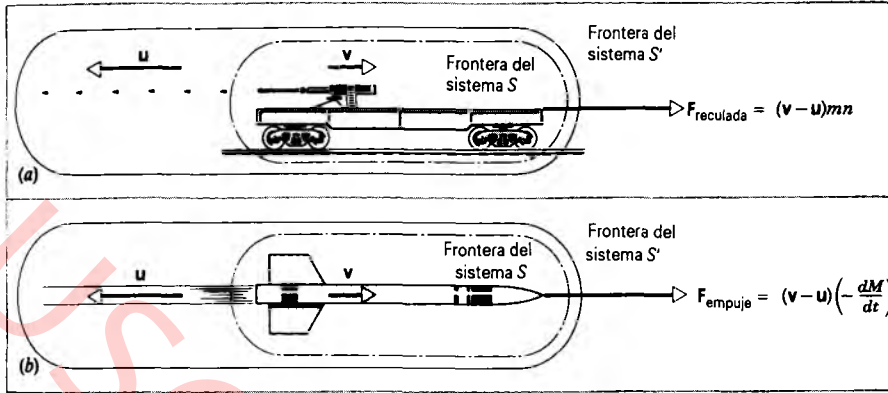


Figura 21 (a) Una ametralladora dispara una ráfaga de balas a razón de n por unidad de tiempo. El ímpetu total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta una fuerza de reculada que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo dt es exactamente igual al ímpetu opuesto $mn u dt$ transportado por las balas. (b) Un cohete expulsa un chorro de productos de combustión. El ímpetu total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta un empuje que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo dt es exactamente igual al ímpetu opuesto $u dM$ transportado por el gas expulsado.

$dM/dt = 0$ de modo que M es una constante, en cuyo caso estamos otra vez discutiendo sistemas de masa constante, o (2) cuando $u = 0$, en cuyo caso estamos viendo al sistema de masa variable desde un marco de referencia muy especial en el cual la materia arrojada está en reposo.

En general, cuando aplicamos $F_{ext} = dP/dt$ al sistema S que gana o pierde masa, debemos tener en cuenta el cambio en el ímpetu de la masa que se gana o se pierde.* Esto es, como lo sugiere la ecuación 42 y la figura 20, debemos considerar al sistema más grande S' , que incluye al sistema S y a la masa adicional. Este enfoque en la dinámica de sistemas de masa variable resalta la importancia de la ley de conservación del ímpetu, y nos da una receta relativamente sencilla para tratar sistemas complicados.

La ecuación 41 ha sido derivada en una forma especial que puede ser adaptada fácilmente al análisis del movimiento de un cohete. La cantidad $u - v$ es v_{rel} , la velocidad de los gases expulsados *con relación al cohete*. Ésta es una cantidad razonable a introducir, porque la velocidad de los gases expulsados es una característica de diseño fundamental del motor del cohete y no debe expresarse en una forma que dependa de ningún otro marco de referencia que el cohete mismo. En función de v_{rel} , podemos escribir la ecuación 41 en la forma siguiente:

$$M \frac{dv}{dt} = F_{ext} + v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (43)$$

El último término de la ecuación 43 nos da la razón a la cual el ímpetu está siendo transferido al subsistema S o quizás fuera de él. Puede ser interpretada como una fuerza ejercida sobre S por la masa que entra o sale de S . En el caso de un cohete, este

término se llama *empuje*; para hacer al empuje lo más grande posible, los diseñadores de cohetes intentan hacer tanto a v_{rel} (la velocidad de escape) como a $|dM/dt|$ (la razón a la que es arrojada la masa) lo más grande posible.

La ecuación del cohete

Consideremos un cohete en el espacio lejano, donde no está sujeto a fuerza externa alguna. Supongamos, por simplicidad, que el movimiento está confinado a una dimensión; dv/dt define la dirección positiva cuando el cohete acelera y v_{rel} , apunta, por lo tanto, en dirección negativa. La ecuación 43 puede expresarse en este caso así:

$$M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (44)$$

donde v_{rel} es la magnitud de la velocidad de escape. Nótese que dM/dt es negativa, de modo que el lado derecho de la Ec. 44 es positivo, como lo es el lado izquierdo.

La ecuación 44 es la ecuación fundamental que rige el comportamiento de un cohete. Durante la combustión estable del motor, el empuje (el lado derecho de la Ec. 44) es una constante (pero la aceleración resultante del cohete dv/dt no es una constante porque la masa M cambia mientras el combustible se quema).

Consideremos el cambio de velocidad del cohete que corresponde a la combustión de una cantidad específica de combustible m_b . La velocidad inicial es v_i , y la velocidad final después de la combustión es v_f . Replanteamos la ecuación 44 así:

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M} \quad (45)$$

La masa total M del cohete es una variable. La masa original del cohete más el combustible es M_0 , y en cualquier tiempo t , la masa remanente M del cohete más la masa m_b del combustible quemado hasta ese momento debe ser M_0 ; así $M = M_0 - m_b$.

* Véase "Force, Momentum Change, and Motion", por Martin S. Tiersten, *American Journal of Physics*, enero de 1969, pág. 82, para una excelente referencia general sobre sistemas de masa fija y variable.

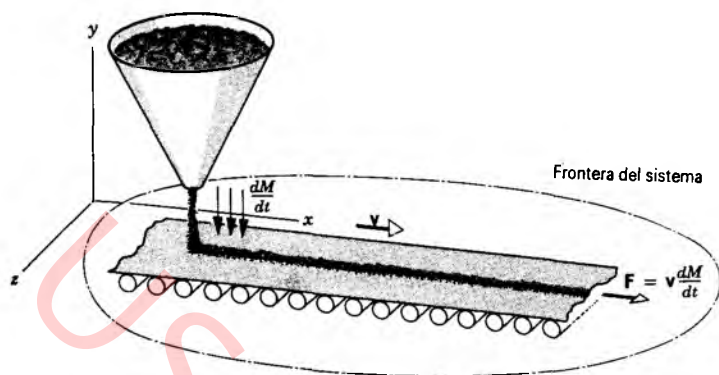


Figura 22 Problema muestra 13. De una tolva cae arena a razón de dM/dt sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad constante v en el marco de referencia del laboratorio. La fuerza necesaria para mantener a la banda moviéndose a velocidad constante es $v dM/dt$. La tolva está en reposo en el marco de referencia del laboratorio.

Integramos la ecuación 45 entre los límites v_i , cuando la masa del cohete es M_0 , y v_f , cuando la masa es $M_0 - m_b$, obteniendo

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_0}^{M_0 - m_b} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_{\text{rel}} \ln M \Big|_{M_0}^{M_0 - m_b}$$

$$= -v_{\text{rel}} [\ln (M_0 - m_b) - \ln M_0]$$

$$= -v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right). \quad (46)$$

La ecuación 46 da el cambio de velocidad del cohete que resulta de la combustión de una cantidad m_b de combustible.

Suponiendo que el cohete comienza desde el reposo ($v_i = 0$) con una masa inicial M_0 y alcanza una velocidad final v_f en combustión cuando su masa es $M_f = M_0 - m_b$, podemos escribir la ecuación 46 así:

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f/v_{\text{rel}}}. \quad (47)$$

La analogía entre el cohete y la reculada de un arma se ilustra en la figura 21. En cada caso se conserva el ímpetu de todo el sistema, que consta de la masa expulsada (balas o combustible) más el objeto que expulsa la masa. Cuando centramos nuestra atención en el arma o en el cohete dentro del sistema más grande, vemos que su masa cambia y que existe una fuerza que lo impulsa, una reculada en el caso del arma y un empuje en el caso del cohete. Si contemplamos el sistema desde el marco de referencia en el centro de masa, a medida que el tiempo transcurre hay más masa expulsada, y ha viajado más hacia la izquierda según vemos en la figura 21, lo que significa que el objeto debe viajar a la derecha para que el centro de masa se mantenga fijo.

Problema muestra 12 Un cohete tiene una masa de 13,600 kg una vez lleno con su combustible en la rampa de lanzamiento. Se dispara verticalmente hacia arriba y en la combustión ha consumido y expulsado 9100 kg de combustible. Los gases salen expulsados a razón de 146 kg/s a una velocidad de 1520 m/s, relativa al cohete, suponiendo que ambas cantidades son constantes mientras se quema el combustible. (a) ¿Cuál es el empuje? (b) Si pudiéramos despreciar todas las fuerzas

externas, incluyendo la gravedad y la resistencia del aire, ¿cuál sería la velocidad del cohete durante la combustión?

Solución (a) El empuje F es el último término de la ecuación 43, o sea

$$F = v_{\text{rel}} \left| \frac{dM}{dt} \right| = (1520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) = 2.22 \times 10^5 \text{ N}.$$

Nótese que inicialmente, cuando los tanques de combustible están llenos, la fuerza neta hacia arriba que actúa sobre el cohete (despreciando la resistencia del aire) es el empuje menos el peso inicial Mg , o sea 88,600 N. En el momento antes de la combustión la fuerza neta hacia arriba es el empuje menos el peso final, o $1.78 \times 10^5 \text{ N}$.

(b) De la ecuación 46, podemos hallar la velocidad durante la combustión:

$$v_f = -v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right)$$

$$= -(1520 \text{ m/s}) \ln \left(\frac{13,600 \text{ kg} - 9100 \text{ kg}}{13,600 \text{ kg}} \right) = 1680 \text{ m/s}.$$

Si las fuerzas externas de la gravedad y de la resistencia del aire fueran tomadas en cuenta, la velocidad final sería menor.

Problema muestra 13 De una tolva estacionaria cae arena a razón de dM/dt sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad v en el marco de referencia del laboratorio, como en la figura 22. ¿Qué potencia se necesita para mantener a la banda moviéndose a la velocidad v ?

Solución La figura 20 describe esta situación, con el sistema S representando a la banda más la arena acumulada y ΔM representando a la arena adicional que cae sobre la banda. El sistema S' incluye a la banda y a toda la provisión de arena en la tolva. Tomamos como nuestro objeto (sistema S) a la banda (incluida la arena) de masa variable M , y por la ecuación 41 debemos asentar que $dv/dt = 0$, porque la velocidad de la banda es constante, y $u = 0$, porque la arena, al caer, no tiene velocidad horizontal en nuestro marco de referencia. Obtenemos

$$F_{\text{ext}} = v \frac{dM}{dt}.$$

En este ejemplo, dM/dt es positiva porque el sistema está ganando masa con el tiempo. De aquí que, como es de esperarse, la fuerza externa necesaria debe apuntar en la dirección en que se mueve la banda. Nótese que la masa de la propia banda no

interviene en el problema, porque hemos supuesto que la banda se mueve a velocidad constante.

La potencia suministrada por la fuerza externa es

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v} \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left(\frac{dM}{dt} \right).$$

Puesto que v es una constante, podemos plantear esto como

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}.$$

Esto nos dice que la potencia externa necesaria para mantener a la banda en movimiento es el doble de la cantidad en que está aumentando la energía cinética del sistema; nótese que no necesitamos considerar la energía cinética de la propia banda porque su velocidad es constante, y, por lo tanto, su energía cinética no cambia.

Está claro que la energía mecánica no se conserva en este caso. Sólo la mitad del trabajo efectuado por el motor que impulsa a la banda aparece como energía mecánica del sistema. ¿A dónde fue la otra mitad? Para responder a esta pregunta, apliquemos la conservación de la energía, ecuación 30, a un elemento pequeño de masa dM que cae sobre la banda. Suponemos que cae desde una altura suficientemente pequeña para que su cambio en energía potencial pueda ser despreciado. En el intervalo de tiempo dt que le toma a dM comenzar a moverse

con la velocidad de la banda, el trabajo efectuado por la fuente externa es $dW = P_{\text{ext}} dt = v^2 dM$. El cambio en la energía cinética de este elemento de masa es $+\frac{1}{2}(dM)v^2$. Aplicando la ecuación 30 nos da, entonces,

$$\Delta E_{\text{int}} = v^2 dM - \frac{1}{2}(dM)v^2 = \frac{1}{2}(dM)v^2.$$

La energía interna del sistema aumenta en la misma cantidad que la energía cinética. Entonces la mitad de la potencia que entra va a la energía cinética de la arena en movimiento, mientras que la otra mitad termina como energía interna de la arena y la banda (resultando, quizás, de la fricción que existe entre la arena y la banda después de que la arena haya caído pero antes de que se mueva a la velocidad de la banda).

Este problema muestra ofrece el ejemplo de una fuerza ejercida con un cambio de masa, siendo la velocidad constante. Es también posible que la velocidad de un sistema de masa variable disminuya como resultado de la masa añadida al sistema, invirtiendo, en efecto, la operación de un cohete.* ■

* Véase, por ejemplo, "The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton", por K. S. Krane, *American Journal of Physics*, febrero de 1981, pág. 113.)

PREGUNTAS

1. ¿Está el centro de masa de un objeto sólido necesariamente dentro del objeto? Si no, dé un ejemplo.
2. La figura 23 muestra (a) un prisma triangular isósceles y (b) un cono circular recto cuyo diámetro tiene la misma longitud que la base del triángulo. El centro de masa del triángulo está a un tercio arriba de la base, pero el del cono está a sólo un cuarto. ¿Puede usted explicar la diferencia?

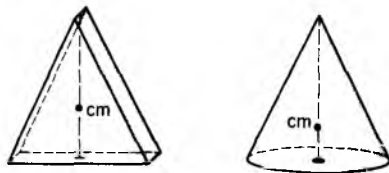


Figura 23 Pregunta 2.

3. ¿Cómo se relaciona el concepto de centro de masa con el concepto de centro geográfico de un país? ¿Con el centro de población de un país? ¿Qué puede usted concluir del hecho de que el centro geográfico difiera del centro de población?
4. ¿Dónde está el centro de masa de la atmósfera de la Tierra?
5. Un aficionado a la escultura decide modelar un pájaro (Fig. 24). Por fortuna, el modelo final puede en realidad mantenerse enhiesto. El modelo está formado de una



Figura 24 Pregunta 5.

simple lámina gruesa de metal de espesor uniforme. De los puntos mostrados, ¿cuál es más probable que sea el centro de masa?

6. Hay quien sostiene que cuando un saltador de altura experimentado salva la barra, el centro de masa del atleta está realmente *abajo* de la barra. ¿Es esto posible?
7. Una bailarina de ballet que ejecuta un *grand jeté* (gran brinco; véase la Fig. 25) parece flotar horizontalmente en la parte central de su brinco. Demuestre cómo puede la bailarina maniobrar sus piernas durante el brinco de modo que, aunque el centro de masa siga en realidad la trayectoria parabólica esperada, su cabeza se mueva más o menos horizontalmente. (Véase "The Physics of Dance", por Kenneth Laws, *Physics Today*, febrero de 1985, pág. 24.)
8. Un objeto ligero y un objeto pesado tienen energías cinéticas de traslación iguales. ¿Cuál tiene el ímpetu más grande?



Figura 25 Pregunta 7.

9. Un pájaro está en una jaula de alambre que cuelga de una báscula de resorte. ¿Es la lectura de la báscula, cuando el pájaro está volando, mayor, menor, o la misma que cuando el pájaro está quieto sobre la jaula?
10. ¿Puede un bote de vela propulsarse por el aire de un ventilador que esté unido al bote y soplando en las velas? Explique su respuesta.
11. ¿Puede un cuerpo tener energía sin que tenga ímpetu? Explique. ¿Puede un cuerpo tener ímpetu sin que tenga energía? Explíquelo.
12. Un canoero que está en un lago tranquilo puede alcanzar la orilla tirando bruscamente de la cuerda unida a la proa de la canoa. ¿Cómo explicaría usted esto? (En realidad, esto es posible.)
13. ¿Cómo podría una persona que está sentada y en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción salirse de esa superficie?
14. Un hombre está de pie y quieto sobre una gran lámina de hielo resbaladizo; en su mano sostiene un petardo encendido. Arroja el petardo al aire a un cierto ángulo (es decir, no verticalmente). Describa brevemente, pero lo más exacto posible, el movimiento del centro de masa del petardo y el movimiento del centro de masa del sistema consistente en hombre y petardo. Conviene describir cada movimiento durante cada uno de los periodos siguientes: (a) después de haber arrojado el petardo, pero antes de que explote; (b) entre la explosión y el primer trozo del petardo que caiga sobre el hielo; (c) entre el primer fragmento que caiga al hielo y el último fragmento al caer, y (d) durante el tiempo en que todos los fragmentos han caído pero ninguno ha llegado al hielo.
15. Justifique que la afirmación siguiente: "La ley de conservación del ímpetu lineal, aplicada a una partícula aislada, es equivalente a la primera ley del movimiento de Newton."
16. Usted arroja un cubo de hielo a una velocidad \mathbf{v} dentro de un espacio caliente, con vacío y carente de gravedad. El cubo se funde gradualmente convirtiéndose en líquido y luego hierve para convertirse en vapor de agua. (a) ¿Es el cubo un sistema de partículas en todo momento? (b) Si es así, ¿es el mismo sistema de partículas? (c) ¿Sufre el movimiento del centro de masa algún cambio abrupto? (d) ¿Cambia el ímpetu lineal total?
17. Una partícula de masa $m = 0$ (un neutrino, posiblemente) transporta un ímpetu. ¿Cómo puede ser esto así a la vista de la ecuación 22, en la cual vemos que el ímpetu es directamente proporcional a la masa?
18. Si sólo una fuerza externa puede cambiar el estado de movimiento del centro de masa de un cuerpo, ¿cómo sucede que la fuerza interna de los frenos puede llevar a un automóvil al reposo?
19. Decimos que un automóvil no es acelerado por fuerzas internas sino más bien por las fuerzas externas que actúan sobre él por la carretera. ¿Por qué necesita el motor un automóvil?
20. ¿Puede el trabajo efectuado por fuerzas internas disminuir la energía cinética de un cuerpo? ... ¿aumentarlo?
21. (a) Si usted efectúa trabajo sobre un sistema, ¿adquiere el sistema necesariamente energía cinética? (b) Si el sistema adquiere energía cinética, ¿significa esto necesariamente que algún agente externo efectuó trabajo sobre él? Dé ejemplos. (Por "energía cinética" nos referimos aquí a la energía cinética media asociada con el movimiento del centro de masa.)
22. En el problema muestra 9 vimos un ejemplo (un patinador) en el que existía energía cinética pero no se efectuaba ningún trabajo externo. Consideremos el caso contrario. Un desarmador se mantiene con fuerza contra una rueda amoladora que está girando. Aquí se efectúa trabajo externo pero la energía cinética del desarmador no cambia. Explique esta aparente contradicción.
23. ¿Puede usted pensar en sistemas de masa variable distintos de los ejemplos dados en el texto?
24. Como ya dijimos en el texto, no podemos usar la ecuación $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ para un sistema de masa variable. Para demostrar esto (a) exprese la ecuación en la forma $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ y (b) demuestre que un lado de esta ecuación tiene el mismo valor en todos los marcos inerciales, mientras que el otro lado no lo tiene. De aquí que la ecuación generalmente no pueda ser válida. (c) Demuestre que la ecuación 42 no conduce a tal contradicción.
25. En 1920 un periódico destacado publicó el editorial siguiente acerca de los experimentos pioneros con cohetes de Robert H. Goddard, desechando la idea de que un cohete pudiera funcionar en el vacío: "Ese profesor Goddard, con su 'cátedra' en el Clark College y el favoritismo de la Smithsonian Institution, no conoce la relación de la acción a la reacción, ni tiene idea de la necesidad de poseer algo mejor que un vacío contra el cual reaccionar, cosa que sería absurda. Claro que a todas luces parece carecer del conocimiento que se da diariamente de cajón en cualquier secundaria." ¿Qué está mal en este argumento?
26. La velocidad final de la última fase de un cohete de fases múltiples es mucho mayor que la velocidad final de un cohete de una sola fase de igual masa total e igual dotación de combustible. Explique este hecho.
27. ¿Puede un cohete alcanzar una velocidad mayor que la velocidad de los gases de escape que lo impulsan? Explique por qué o por qué no.

28. ¿Existe algún otro método de propulsión en el espacio exterior que no sean los cohetes? De ser así, ¿de qué se trata, y por qué no se usa?
29. La ecuación 46 sugiere que la velocidad de un cohete puede aumentar sin límite si se quema el suficiente combustible. ¿Es esto razonable? ¿Cuál es el límite de apli-

cabilidad de la ecuación 46? ¿En qué paso, en la derivación de la ecuación 46, introdujimos este límite? (Véase "The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with Variable Rest Mass", por Kalman B. Pomeranz, *American Journal of Physics*, diciembre de 1964, pág. 955.)

PROBLEMAS

Sección 9-1 Sistemas de dos partículas

1. (a) Resuelva la ecuación 4 para x_1 y la ecuación 5 para v_1 , y sustituya ambos resultados junto con la ecuación 3 en la ecuación 2 para obtener

$$m_1^2 k d_1^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2,$$

donde $u = Mx_2 - Mx_{cm} - m_1L$ y $\mu = m_1m_2/M$. (b) Demuestre que este resultado puede resolverse para $u(t)$ usando las técnicas presentadas en la sección 8-4 para dar

$$u(t) = m_1 d_1 \cos \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/\mu}$. (c) Resuelva para $x_1(t)$, $x_2(t)$, $v_1(t)$ y $v_2(t)$. Este problema demuestra que las ecuaciones del centro de masa nos permiten resolver para los movimientos de m_1 y m_2 en la situación mostrada en la figura 1.

Sección 9-2 Sistemas de muchas partículas

2. ¿Dónde está el centro de masa de las tres partículas mostradas en la figura 26?

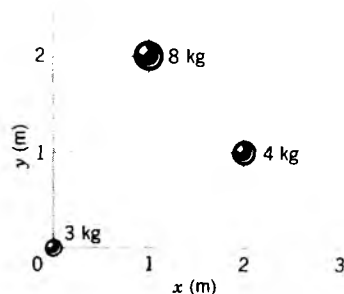


Figura 26 Problema 2.

3. ¿Qué tan lejos está el centro de masa del sistema Tierra-Luna del centro de la Tierra? (Del apéndice C obtenga las masas de la Tierra y de la Luna, y la distancia entre los centros de ellas. Es interesante comparar la respuesta con el radio de la Tierra.)

4. Demuestre que la razón entre las distancias x_1 y x_2 de dos partículas respecto a su centro de masa es la razón inversa de sus masas, esto es, $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
5. Un Chrysler con una masa de 2210 kg se está moviendo a lo largo de un tramo recto de carretera a 105 km/h. Es seguido por un Ford de 2080 kg de masa que se mueve a 43.5 km/h. ¿Qué velocidad tiene el centro de masa de los dos carros en movimiento?
6. Dos patinadores, uno con 65 kg de masa y el otro con 42 kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una pértiga de 9.7 m de longitud y de masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la pértiga, los patinadores se jalan a sí mismos a lo largo de la pértiga hasta que se encuentran. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?
7. Un hombre de masa m se halla asido a una escalera de cuerda suspendida de un globo de masa M ; véase la figura 27. El globo se halla estático respecto al terreno. (a) Si el hombre comienza a trepar por la escalera a una velocidad v (con respecto a la escalera), ¿en qué dirección y a qué velocidad (respecto a la Tierra) se moverá el globo? (b) ¿Cuál es el estado de movimiento después de que el hombre deja de trepar?
8. Dos partículas P y Q están inicialmente en reposo y separadas por una distancia 1.64 m. P tiene una masa de

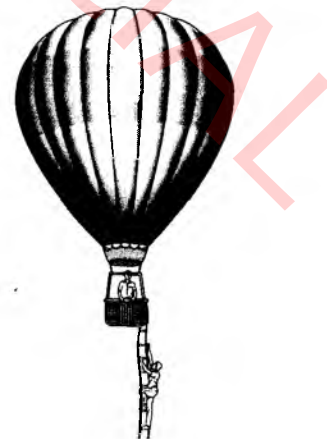


Figura 27 Problema 7.

1.43 kg y Q una masa de 4.29 kg. P y Q se atraen entre sí con una constante de fuerza de 1.79×10^{-2} N. No actúan sobre el sistema fuerzas externas. (a) Describa el movimiento del centro de masa. (b) ¿A qué distancia de la posición original de P chocan las partículas?

9. Un cañón y un aprovisionamiento de balas de cañón están dentro de un carro de ferrocarril sellado de longitud L , como se muestra en la figura 28. El cañón dispara hacia la derecha; el carro recula hacia la izquierda. Las balas de cañón permanecen en el carro después de chocar contra la pared más alejada. (a) Después de que hayan sido disparadas todas las balas, ¿cuál es la distancia más grande a la que puede moverse el carro a partir de su posición original? (b) ¿Cuál es la velocidad del carro después de que todas las balas han sido disparadas?

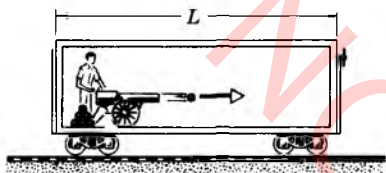


Figura 28 Problema 9.

10. En una molécula de amoníaco (NH_3), los tres átomos de hidrógeno (H) forman un triángulo equilátero, siendo la distancia entre los centros de los átomos 16.28×10^{-11} m, de modo que el centro del triángulo está a 9.40×10^{-11} m de cada átomo de hidrógeno. El átomo de nitrógeno (N) está en la cúspide de la pirámide, estando la base constituida por los tres átomos de hidrógeno (véase la Fig. 29). La distancia nitrógeno-hidrógeno es de 10.14×10^{-11} m y la relación de masa atómica nitrógeno/hidrógeno es 13.9. Localice el centro de masa con relación al átomo de nitrógeno.

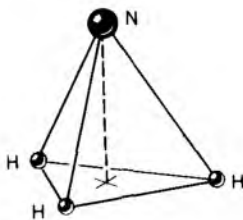


Figura 29 Problema 10.

11. Dos cuerpos, cada uno hecho con juego de pesas, están unidos por un cordón ligero que pasa por una polea ligera, sin fricción, un diámetro de 56.0 mm. Los dos cuerpos están al mismo nivel. Cada uno tiene originalmente una masa de 850 g. (a) Ubique su centro de masa. (b) Se transfieren 34 g de un cuerpo al otro, pero se impide que los cuerpos se muevan. Localice el centro de masa. (c) Ahora los dos cuerpos se dejan caer. Describa el movimiento del centro de masa y determine su aceleración.

12. Se dispara una bala de un arma a una velocidad de salida de 466 m/s, a un ángulo de 57.4° con la horizontal. En la parte más alta de la trayectoria, la bala explota en dos fragmentos de igual masa. Uno de los fragmentos, cuya velocidad inmediatamente después de la explosión es cero, cae verticalmente. ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento, suponiendo un terreno llano?
13. Una cadena flexible, uniforme, de longitud L , con un peso por unidad de longitud λ , pasa sobre una clavija pequeña, sin fricción; véase la figura 30. Se deja caer desde una posición de reposo de modo que una longitud de cadena x cuelga de un lado, y una longitud $L - x$ cuelga del otro lado. Halle la aceleración a en función de x .

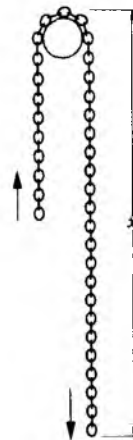


Figura 30 Problema 13.

14. Un perro que pesa 10.8 lb está parado sobre un bote de fondo plano de modo tal que el animal se encuentra a 21.4 ft de la orilla. Camina 8.50 ft por el bote hacia la orilla y luego se detiene. El bote pesa 46.4 lb, y podemos suponer que no existe fricción entre el bote y el agua. ¿A qué distancia está el perro de la orilla al final de este tiempo? (Sugerencia: El centro de masa del bote + el perro no se mueve. ¿Por qué?). También hay orilla hacia la izquierda en la figura 31.
15. Ricardo, que tiene una masa de 78.4 kg, y Judith, quien pesa menos, se divierten al anochecer en un lago dentro de una canoa de 31.6 kg. Cuando la canoa está en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, los cuales se hallan separados a una distancia de 2.93 m y simétricamente situados con respecto al centro de la canoa. Ricardo observa que la canoa se movió 41.2 cm con relación a un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es esta masa?
16. Una persona de 84.4 kg está parada en la parte posterior de un trineo de vela que se mueve sobre el hielo; el trineo pesa 425 kg y avanza a 4.16 m/s por el hielo, que puede considerarse sin fricción. Decide caminar hacia el frente del bote, de 18.2 m de longitud y lo hace a una velocidad de 2.08 m/s respecto al bote. ¿Qué distancia recorrió el bote sobre el hielo mientras él estuvo caminando?



Figura 31 Problema 14.

Sección 9-3 Centro de masa de objetos sólidos

17. Tres varillas delgadas, cada una de longitud L , están dispuestas en forma de \mathbf{U} invertida, como se muestra en la figura 32. Cada una de las dos varillas que están en los brazos de la \mathbf{U} tienen una masa M ; la tercera varilla tiene una masa de $3M$. ¿Dónde está el centro de masa del conjunto?

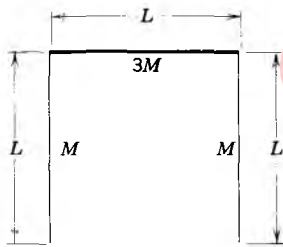


Figura 32 Problema 17.

18. La figura 33 muestra una placa compuesta con dimensiones de $22.0 \text{ cm} \times 13.0 \text{ cm} \times 2.80 \text{ cm}$. La mitad de la placa está hecha de aluminio (densidad = 2.70 g/cm^3) y la mitad de hierro (densidad = 7.85 g/cm^3), como se muestra. ¿Dónde está el centro de masa de la placa?

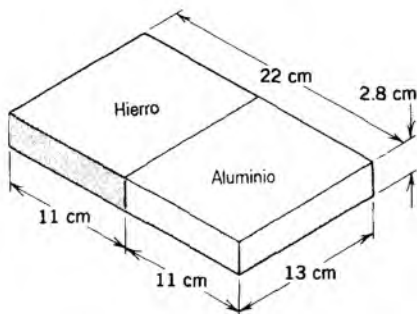


Figura 33 Problema 18.

19. Una caja, abierta por arriba, que tiene la forma de un cubo de 40 cm de lado está construida de lámina de metal. Halle

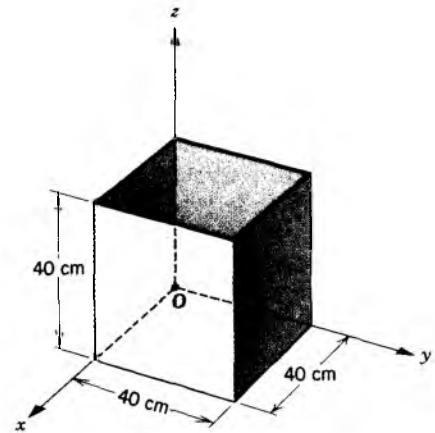


Figura 34 Problema 19.

las coordenadas del centro de masa de la caja respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la figura 34.

20. Un tanque de almacenamiento cilíndrico está inicialmente lleno de aerogasolina. El tanque se vacía luego mediante una válvula situada en el fondo; véase la figura 35. (a) Describa cualitativamente el movimiento del centro de masa del tanque y del contenido restante mientras se extrae la gasolina. (b) ¿Cuál es la profundidad x a la cual está lleno el tanque cuando el centro de masa del tanque y del contenido restante alcanza su punto más bajo? Expresar la respuesta en términos de H , la altura del tanque; M , su masa, y m , la masa de la gasolina que cabe en él.

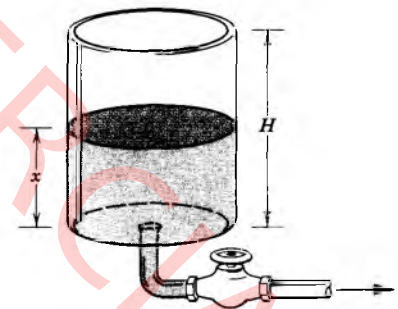


Figura 35 Problema 20.

21. Halle el centro de masa de una placa semicircular homogénea, siendo R el radio del círculo.

Sección 9-4 Impetu lineal de una partícula

22. ¿A qué velocidad debe avanzar un Volkswagen de 816 kg (a) para tener el mismo ímpetu que un Cadillac de 2650 kg que va a 16.0 km/h y (b) para tener la misma energía cinética? (c) Haga los mismos cálculos acerca de un camión de 9080 kg en lugar del Cadillac.
23. Un camión de 2000 kg que viaja hacia el norte a razón de 40.0 km/h da la vuelta hacia el este y acelera hasta los

50.0 km/h. (a) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del camión? (b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del cambio de ímpetu del camión?

24. Un objeto de 4.88 kg a una velocidad de 31.4 m/s golpea una placa de acero a un ángulo de 42.0° y rebota a igual velocidad y ángulo (Fig. 36). ¿Cuál es el cambio (magnitud y dirección) del ímpetu lineal del objeto?

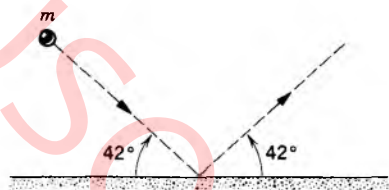


Figura 36 Problema 24.

25. Una pelota de 52.4 g es arrojada desde el suelo al aire, a una velocidad inicial de 16.3 m/s y a un ángulo de 27.4° sobre la horizontal. (a) ¿Cuáles son los valores de la energía cinética de la pelota inicialmente y en el momento antes de que toque el suelo? (b) Halle los valores correspondientes del ímpetu (magnitud y dirección) y del cambio de ímpetu. (c) Demuestre que el cambio de ímpetu es igual al peso de la pelota multiplicado por el tiempo de vuelo, y de allí halle el tiempo de vuelo.
26. Una partícula de masa m tiene un ímpetu lineal p igual a mc . ¿Cuál es su velocidad en función de c , la velocidad de la luz?
27. Demuestre que la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades $v \ll c$. *Sugerencia:* Demuestre que la ecuación 23 puede expresarse así:

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

28. Un electrón tiene una velocidad de $0.990c$. (a) Halle su ímpetu lineal, en $\text{kg} \cdot \text{m/s}$. (b) Exprese este ímpetu en las unidades MeV/c .

Sección 9-6 Conservación del ímpetu lineal

29. Una persona de 195 lb que está de pie sobre una superficie de fricción despreciable patea hacia adelante una piedra de 0.158 lb que está a sus pies de modo que ésta adquiere una velocidad de 12.7 ft/s. ¿Qué velocidad adquiere la persona como resultado?
30. Un hombre de 75.2 kg está subido a un carro de 38.6 kg que está en marcha a una velocidad de 2.33 m/s. El hombre salta del carro de modo que toca el suelo a una velocidad horizontal de cero. Halle el cambio resultante en la velocidad del carro.
31. Una plataforma de ferrocarril de peso W puede rodar sin fricción a lo largo de una vía horizontal recta. Inicialmente un hombre de peso w está parado sobre la plataforma que avanza hacia la derecha a velocidad v_0 . ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la plataforma si el hombre corre hacia

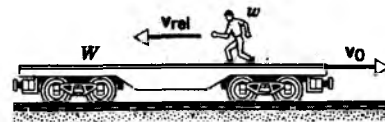


Figura 37 Problema 31.

- la izquierda (Fig. 37), de modo que su velocidad con relación a la plataforma es de v_{rel} en el momento antes de que salte hacia afuera en el extremo izquierdo?
32. El trineo de un cohete con una masa de 2870 kg se mueve a razón de 252 m/s sobre unos rieles. En cierto punto, un canchón del trineo se hunde en un depósito de agua situado entre los rieles y saca agua para echarla dentro de un tanque vacío del trineo. Determine la velocidad del trineo después de que el tanque se ha llenado con 917 kg de agua.
33. La ametralladora especial de un guardabosque dispara al minuto 220 balas de hule de 12.6 g de peso a una velocidad de salida de 975 m/s. ¿Cuántas balas debe disparar contra un animal de 84.7 kg que carga hacia el guardabosque a 3.87 m/s con objeto de detener al animal en su marcha? (Suponga que las balas viajan horizontalmente y caen al suelo después de dar en el blanco.)
34. Un vehículo espacial viaja a 3860 km/h con respecto a la Tierra cuando el motor vacío del cohete se desprende y es enviado de regreso a una velocidad de 125 km/h con respecto al módulo de mando. La masa del motor es el cuádruple de la masa del módulo. ¿Cuál es la velocidad del módulo de mando después de la separación?
35. La última fase de un cohete viaja a una velocidad de 7600 m/s. Esta última fase está hecha de dos partes acopladas entre sí, que comprenden, una caja del cohete con una masa de 290.0 kg y una cápsula de carga útil con una masa de 150.0 kg. Cuando se sueltan las grapas que unen a las dos partes, un resorte comprimido hace que éstas se separen a una velocidad relativa de 910.0 m/s. (a) ¿Cuáles son las velocidades de las dos partes después de que se han separado? Suponga que todas las velocidades son a lo largo de la misma línea. (b) Halle la energía cinética total de las dos partes antes y después de haberse separado y explique la diferencia, si la hay.
36. Una vasija en reposo explota, rompiéndose en tres partes. Dos partes, una con el doble de masa de la otra, se desprenden, de modo que una es perpendicular a la otra, a la misma velocidad de 31.4 m/s. La tercera parte tiene el triple de masa de la parte más liviana. Halle la magnitud y la dirección de su velocidad inmediatamente después de la explosión. (Especifique la dirección dando el ángulo desde la línea de recorrido de la parte menos pesada.)
37. Un núcleo radiactivo, inicialmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón y un neutrino en ángulos rectos entre sí. El ímpetu del electrón es de $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ y el del neutrino es de $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. (a) Halle la dirección y la magnitud del ímpetu del núcleo al recular. (b) La masa del núcleo residual es de $5.8 \times 10^{-26} \text{ kg}$. ¿Cuál es su energía cinética de reculada? El *neutrino* es una de las partículas fundamentales de la naturaleza.

38. Un carro-plataforma de ferrocarril de 1930 kg, que puede moverse sobre los rieles virtualmente sin fricción, está detenido sin movimiento cerca de una plataforma de la estación. Un jugador de fútbol de 108 kg corre a lo largo de la plataforma paralelamente a las vías a razón de 9.74 m/s. El jugador salta sobre la parte trasera del carro-plataforma. (a) ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma después de que el jugador está a bordo y en reposo sobre él? (b) Ahora el jugador comienza a caminar, a razón de 0.520 m/s con relación al carro-plataforma, hacia el frente del carro. ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma al caminar el jugador?
39. Una bala de 3.54 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción, como se muestra en la figura 38a. La bala atraviesa el primer bloque, que tiene una masa de 1.22 kg y se empotra en el segundo, que tiene una masa de 1.78 kg. Al hacerlo, se imprimen en los bloques velocidades de 0.630 m/s y 1.48 m/s, respectivamente, como se muestra en la figura 38b. Despreciando la masa extraída del primer bloque por la bala, halle (a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque y (b) la velocidad original de la bala.

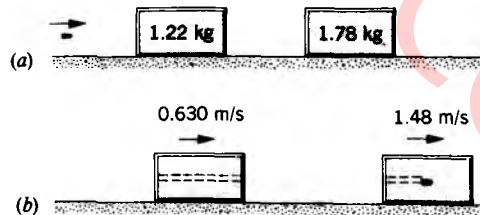


Figura 38 Problema 39.

40. Un cuerpo de 8.0 kg de masa avanza a 2.0 m/s sin la influencia de fuerza externa alguna. En cierto instante ocurre una explosión interna, que divide al cuerpo en dos trozos de 4.0 kg de masa cada uno; la explosión transmite al sistema de dos trozos una energía cinética de traslación de 16 J. Ninguno de los trozos abandona la línea de movimiento original. Determine la velocidad y la dirección del movimiento de cada uno de los trozos después de la explosión.
41. Supóngase que el carro del problema 31 está inicialmente en reposo y sostiene a n personas de peso w cada una. Si cada persona corre sucesivamente a una velocidad relativa v_{rel} y salta desde el extremo del carro, ¿imprimen en el carro una velocidad mayor que si todos corrieran y saltaran al mismo tiempo?
42. Un cañón de 1400 kg que dispara un proyectil de 70.0 kg a una velocidad de salida de 556 m/s se halla fijo a un ángulo de elevación de 39.0° sobre la horizontal. El cañón está montado sobre rieles sin fricción, con el fin de que pueda recular libremente. (a) ¿Cuál es la velocidad del proyectil respecto a la Tierra? (b) ¿A qué ángulo con respecto al terreno es lanzado el proyectil? (Sugerencia: La componente horizontal del ímpetu del sistema permanece sin cambio al disparar el arma.)
43. Un bloque de masa m reposa sobre una cuña de masa M la cual, a su vez, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la Fig. 39. Todas las superficies carecen de fricción. Si el sistema parte del reposo estando el punto P del bloque a una distancia h sobre la mesa, halle la velocidad de la cuña en el instante en que el punto P toca la mesa.

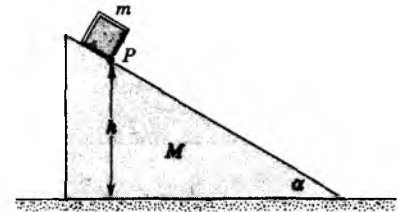


Figura 39 Problema 43.

Sección 9-7 Trabajo y energía en un sistema de partículas

44. Un automóvil con pasajeros tiene un peso de 3680 lb (= 16,400 N) y se mueve a 70.0 mi/h (= 113 km/h) cuando el conductor frena hasta el alto. La carretera ejerce una fuerza de 1850 lb (= 8230 N) sobre las ruedas y éstas no patinan. Calcule la distancia a la que se detiene.
45. Usted se agacha desde una posición erecta, bajando su centro de masa 18.0 cm durante el proceso. Luego salta verticalmente en el aire. La fuerza que el suelo ejerce sobre usted cuando salta es el triple de su peso. ¿Cuál es su velocidad hacia arriba cuando después de la posición erecta se separa del suelo?
46. Una mujer de 55.0 kg brinca verticalmente en el aire desde una posición en cuclillas en que su centro de masa está a 40.0 cm sobre el suelo. Cuando sus pies dejan el suelo su centro de masa está a 90.0 cm sobre el suelo y se eleva a 120 cm cuando alcanza la parte más alta de su brinco. (a) ¿Qué fuerza hacia arriba, supuesta constante, ejerce el suelo sobre ella? (b) ¿Qué velocidad máxima alcanza?
47. Un jugador de hockey sobre hielo, de 116 kg, patina a razón de 3.24 m/s hacia un barandal situado al extremo de la pista y se detiene asiendo el barandal con los brazos extendidos. Durante este proceso de detención su centro de masa se mueve 34.0 cm hacia el barandal. (a) Halle la fuerza promedio que debe ejercer sobre el barandal. (b) ¿Cuánta energía interna pierde?
48. La National Transportation Safety Board (Oficina Nacional para la Seguridad en el Transporte) está probando la eficiencia en el choque de un auto nuevo. El vehículo de 2340 kg se dirige a 12.6 km/h contra un parapeto. Durante el impacto, el centro de masa del auto se mueve hacia adelante 64.0 cm; el parapeto se comprime 8.30 cm. Desprecie la fricción entre el auto y la carretera. (a) Halle la fuerza, supuesta constante, ejercida por el parapeto sobre el auto. (b) ¿En cuánto aumenta la energía interna del auto?

49. Midamos la energía total de un sistema de N partículas en un marco de referencia arbitrario, de modo que $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$. En el marco de referencia del centro de masa, las velocidades son $v_i' = v_i - v_{cm}$, donde v_{cm} es la velocidad del centro de masa con relación al marco de referencia original. Recordando que $v_i^2 = v_i \cdot v_i$, demuestre que la energía cinética puede expresarse así:

$$K = K_{int} + K_{cm}$$

donde $K_{int} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ y $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. Esto demuestra que la energía cinética de un sistema de partículas puede dividirse en un término interno y un término del centro de masa, como apuntábamos en la sección 9-7. La energía cinética interna se mide en un marco de referencia en el cual el centro de masa está en reposo; por ejemplo, los movimientos al azar de las moléculas de gas en un recipiente en reposo son responsables de su energía cinética de traslación interna.

Sección 9-8 Sistemas de masa variable

50. Un cohete en reposo en el espacio, donde no existe virtualmente gravedad, tiene una masa de 2.55×10^3 kg, de los cuales 1.81×10^3 kg son de combustible. El motor consume combustible a razón de 480 kg/s, y la velocidad de eyección es de 3.27 km/s. El motor se enciende durante 250 s. (a) Halle el empuje del motor del cohete. (b) ¿Cuál es la masa del cohete después de la combustión del motor? (c) ¿Cuál es la velocidad final alcanzada?
51. Consideremos un cohete en reposo en el espacio vacío. ¿Cuál debe ser la razón de masa (razón de la masa inicial a la masa final) con objeto de que, después de haberse encendido el motor, la velocidad del cohete sea (a) igual a la velocidad de los gases expulsados y (b) igual al doble de la velocidad de los gases expulsados?
52. Durante una misión lunar es necesario hacer una corrección a medio camino de 22.6 m/s en la velocidad de la nave espacial, la cual se mueve a razón de 388 m/s. La velocidad de los gases de escape del motor del cohete es de 1230 m/s. ¿Qué fracción de la masa inicial de la nave espacial debe ser lanzada como gases de escape?
53. Un cohete de 1.11×10^5 kg de masa total, de los cuales 8.70×10^4 kg son de combustible, va a ser disparado verticalmente. El combustible se quemará en una cantidad constante de 820 kg/s. Con relación al cohete, ¿cuál es la velocidad mínima de los gases de escape que permite el ascenso en el disparo?
54. Un tobogán de 5.4 kg que transporta 35 kg de arena se desliza desde el reposo por una pendiente helada de 93 m de longitud, inclinada a 26° abajo de la horizontal. La arena se fuga de la parte trasera del tobogán a razón de 2.3 kg/s. ¿Cuánto tiempo le tomará al tobogán alcanzar el fondo de la pendiente?
55. Para mantener en movimiento una banda transportadora cuando transporta equipaje se requiere una fuerza de impulsión mayor que con la banda vacía. ¿Qué fuerza de impulsión adicional se necesita si la banda se mueve a una velocidad constante de 1.5 m/s y la tasa a la cual se coloca el equipaje en un extremo de la banda y se retira en el otro

extremo es de 20 kg/s? Supóngase que el equipaje se deja caer verticalmente sobre la banda; quienes retiran el equipaje lo sujetan y lo llevan al reposo con relación a ellos mismos antes de levantarlo de la banda.

56. Un carro de carga, abierto en la parte superior, que pesa 9.75 tons métricas, corre a lo largo de una vía nivelada con fricción despreciable a razón de 1.36 m/s cuando comienza a llover fuertemente. Las gotas de lluvia caen verticalmente con respecto al suelo. ¿Cuál es la velocidad del carro cuando ha reunido 0.50 tons métricas de lluvia? ¿Qué supuestos, en caso de haber alguno, debe usted asumir para dar su respuesta?
57. Un cohete de 5860 kg se prepara para el disparo vertical. La velocidad de los gases de escape es de 1.17 km/s. ¿Cuánto gas por segundo deberá ser expelido para proporcionar el empuje necesario (a) para superar el peso del cohete y (b) para darle al cohete una aceleración inicial hacia arriba de 18.3 m/s^2 ? Nótese que, al contrario de la situación descrita en el problema muestra 12, la gravedad está presente aquí como una fuerza externa.
58. Dos barcasas largas avanzan en la misma dirección en aguas tranquilas, una a velocidad de 9.65 km/h y la otra a 21.2 km/h. Cuando están una junto a la otra, se traspalea carbón desde la más lenta a la más rápida a razón de 925 kg/min; véase la figura 40. ¿Cuánta fuerza adicional deberá abastecerse por los motores que impulsan a cada barcaza si ninguna va a cambiar su velocidad? Supóngase que el traspaleo se hace siempre perfectamente hacia el lado y que las fuerzas de fricción entre las barcasas y el agua no dependen del peso de las barcasas.

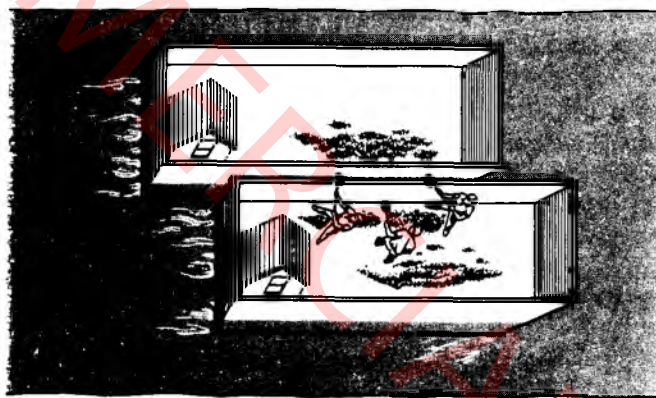


Figura 40 Problema 58.

59. Un avión de propulsión a chorro vuela a 184 m/s (= 604 ft/s). El motor absorbe 68.2 m^3 (= 2410 ft³) de aire, que representa una masa de 70.2 kg (= 4.81 slugs) por segundo. El aire se emplea para quemar 2.92 kg (= 0.200 slug) de combustible por segundo. La energía se emplea para comprimir los productos de combustión y expulsarlos en la parte posterior del motor a 497 m/s (= 1630 ft/s) en relación al avión. Halle (a) el empuje del motor a propulsión y (b) la potencia desarrollada (en hp).
60. Un cordón flexible, inextensible, de longitud L está arrollado en un tubo liso, al cual está bien aparejado. El tubo

contiene una curva en ángulo recto y está colocado en el plano vertical de modo que un brazo es vertical y el otro horizontal. Desde el comienzo, en $t = 0$, una longitud y_0 del cordón cuelga suspendida del brazo vertical. El cordón se suelta y se desliza a través del tubo, de modo que en cualquier tiempo t posterior, se mueve a una velocidad dy/dt , donde $y(t)$ es la longitud del cordón que está entonces colgando verticalmente. (a) Explique en función del

problema de masa variable, $v_{rel} = 0$, de modo que la ecuación del movimiento tiene la forma $m dv/dt = F_{ext}$. (b) Demuestre que la ecuación específica del movimiento es $d^2y/dt^2 = gy$. (c) Demuestre que la conservación de la energía mecánica conduce a $(dy/dt)^2 - gy^2 = a$ constante, y que esto es consistente con (b). (d) Demuestre que $y = (y_0/2) (e^{\sqrt{g}t} + e^{-\sqrt{g}t})$ es una solución a la ecuación del movimiento [(sustituyendo en (b))] y explique la solución.