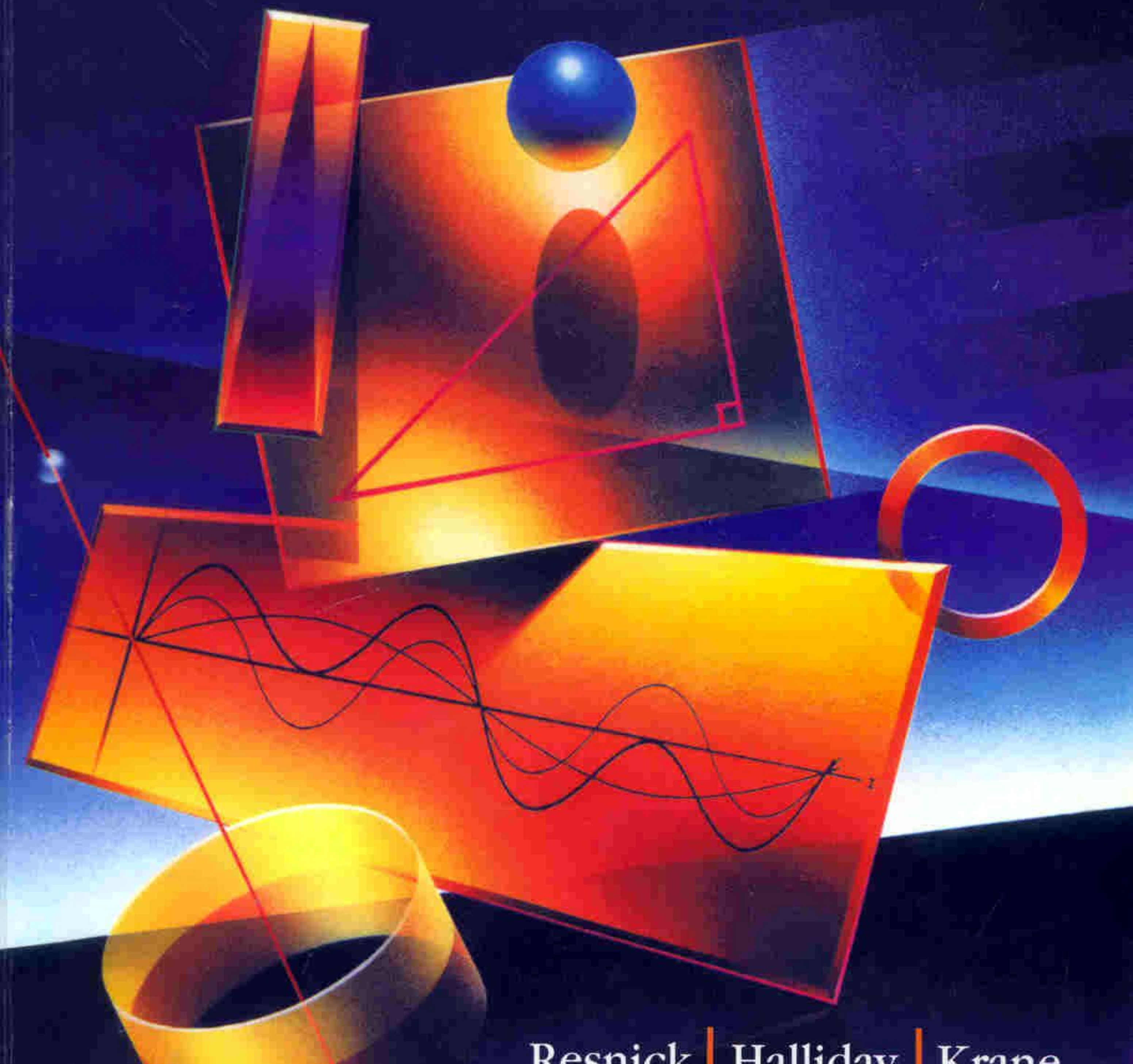
FÍSICA 1

4ª Edicion



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

Física / Robert Resnick ; David Halliday ; Kenneth Krane. 3a. ed. español. México : Compania Editorial Continental, 2001

CAPÍTULO 7

TRABAJO Y ENERGÍA

Un problema fundamental de la dinámica de las partículas es hallar cómo se mueve una partícula, dadas las fuerzas que actúan sobre ella. Por "cómo se mueve una particula" queremos referirnos a cómo varía su posición con el tiempo. En los dos capítulos anteriores hemos resuelto este problema para el caso especial de una fuerza constante, en que pueden usarse las fórmulas de la aceleración constante para hallar $\mathbf{r}(t)$*, completando la solución del problema.*

Sin embargo, el problema es, más difícil cuando la fuerza que actúa sobre una partícula y, por lo tanto, su aceleración, no son constantes. Podemos resolver estos problemas por métodos de integración, como se ilustró en las secciones 6-5 y 6-7, respectivamente, para fuerzas que dependen del tiempo y de la velocidad. En este capítulo extendemos el análisis a fuerzas que dependen de la posición de la partícula, como la fuerza de gravitación ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto cercano y la fuerza ejercida por un resorte estirado sobre un cuerpo al cual esté unido. Este análisis nos conduce a los conceptos de trabajo *y* energía cinética *y al desarrollo del* teorema trabajo-energía*, que es el tema central de este capítulo. En el capítulo 8 consideraremos una visión más amplia de la energía, incorporada a la ley de conservación de la energía, concepto éste que ha desempeñado un papel importante en el desarrollo de la física.*

7-1 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Consideremos una partícula sobre la que actúe una fuerza constante **F**, y supongamos el caso más sencillo en el que el movimiento tiene lugar en línea recta en dirección de la fuerza. En tal situación definimos al *trabajo W efectuado por la fuerza sobre la partícula* como el producto de la magnitud de la fuerza F y la magnitud del desplazamiento s a través del cual actúa la fuerza. Escribiremos esto así:

$$W = Fs. \tag{1}$$

En un caso más general, la fuerza constante que actúa sobre una partícula puede no actuar en la dirección en que se mueve la partícula. En este caso definimos al trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula como el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento y la magnitud del desplazamiento s. En la figura 1, una partícula experimenta una fuerza constante **F** que forma un ángulo ϕ con la dirección del desplazamiento **s** de la partícula. El trabajo W efectuado por **F** durante este desplazamiento es, de acuerdo con nuestra definición,

$$W = (F \cos \phi)s. \tag{2}$$

Por supuesto, pueden también actuar otras fuerzas sobre la partícula. La ecuación 2 se refiere solamente al trabajo efectuado sobre la partícula por una fuerza **F** determinada. El trabajo efectuado sobre la partícula por otras fuerzas debe calcularse por separado. Para hallar el trabajo total efectuado sobre la partícula, sumamos los valores del trabajo efectuado por todas las fuerzas por separado. (Alternativamente, como discutiremos en la sección 7-4, podemos primero hallar la fuerza neta sobre

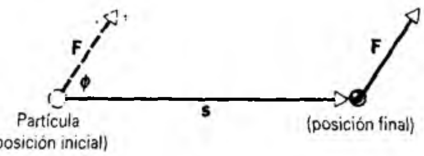


Figura 1 Una fuerza **F** actúa sobre una partícula cuando experimenta un desplazamiento s. La componente de **F** que efectúa el trabajo sobre la partícula es F cos . El trabajo efectuado por la fuerza **F** sobre la partícula es Fs cos ϕ, lo cual puede también escribirse como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.

la partícula y luego calcular el trabajo que efectuaría una sola fuerza igual a la fuerza neta. Los dos métodos de hallar el trabajo efectuado sobre una partícula son equivalentes, y siempre arrojan el mismo resultado para el trabajo efectuado sobre la partícula.)

Cuando ϕ es cero, el trabajo efectuado por **F** es, simplemente, Fs, de acuerdo con la ecuación 1. Entonces, cuando una fuerza horizontal mueve a un cuerpo horizontalmente, o cuando una fuerza vertical levante a un cuerpo verticalmente, el trabajo efectuado por la fuerza es el producto de la magnitud de la fuerza por la distancia que recorrió. Cuando ϕ es 90°, la fuerza no tiene componente en la dirección del movimiento. Esa fuerza no efectúa, entonces, ningún trabajo sobre el cuerpo. Por ejemplo, un levantador de pesas (Fig. 2) efectúa un trabajo para levantar las pesas desde el suelo, pero no efectúa ningún trabajo cuando las mantiene en alto (porque no existe desplazamiento). Si transportara las pesas sobre su cabeza cuando camina, nuevamente no efectuaría ningún trabajo sobre ellas conforme a nuestra definición de trabajo, suponiendo que no exista un desplazamiento

Figura 2 El levantador de pesas ejerce una gran fuerza sobre las pesas, pero en el instante mostrado no está efectuando ningún trabajo porque las está manteniendo fijas. Existe una fuerza pero no un desplazamiento. Por supuesto, él ha efectuado ya cierto trabajo para haberlas levantado desde el suelo hasta esa altura.

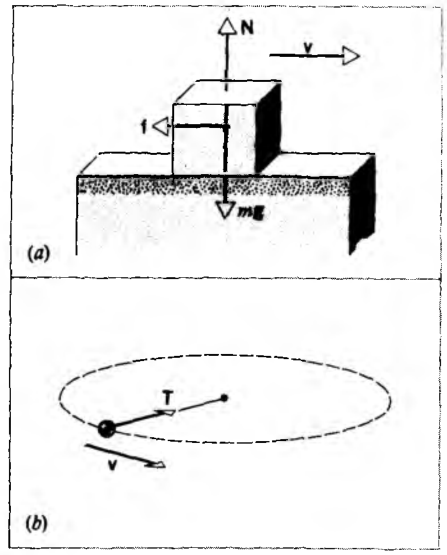


Figura 3 No todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo efectúan necesariamente un trabajo, aun cuando el cuerpo esté en movimiento. En (*a*), el peso y la fuerza normal no trabajan, porque son perpendiculares al desplazamiento (que está en la dirección de la velocidad **v**). El trabajo lo efectúa la fuerza de fricción. En (*b*), donde se muestra un cuerpo unido a un cordón mientras gira en un círculo horizontal, la tensión **T** en el cordón no efectúa ningún trabajo sobre el cuerpo, porque no tiene una componente en la dirección del desplazamiento.

vertical, porque la fuerza vertical que ejerce sería perpendicular al desplazamiento horizontal. La figura 3 muestra otros ejemplos de fuerzas aplicadas a un cuerpo y que realizan trabajo sobre él.

Nótese que podemos escribir la ecuación 2 ya sea como (F cos ϕ)s o como F(s cos ϕ). Esto sugiere que el trabajo puede calcularse de dos maneras diferentes, que dan el mismo resultado: ya sea que multipliquemos la magnitud del desplazamiento por la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento, o que multipliquemos la magnitud de la fuerza por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza. Cualquiera de las formas nos recuerda una parte importante de la definición de trabajo: debe existir una componente de **s** en la dirección de **F**, y debe existir una componente de **F** en la dirección de **s** (Fig. 4).

El trabajo es una cantidad *escalar*, aunque las dos cantidades involucradas en su definición, fuerza y desplazamiento, sean vectores. En la sección 3-5 definimos al *produoto escalar* de dos vectores como la cantidad escalar que hallamos cuando multiplicamos la magnitud de un vector por la componente de un segundo vector a lo largo de la dirección del primero. La ecuación 2 muestra que el trabajo se calcula exactamente de esta manera, de modo que el trabajo debe de ser expresable como un producto

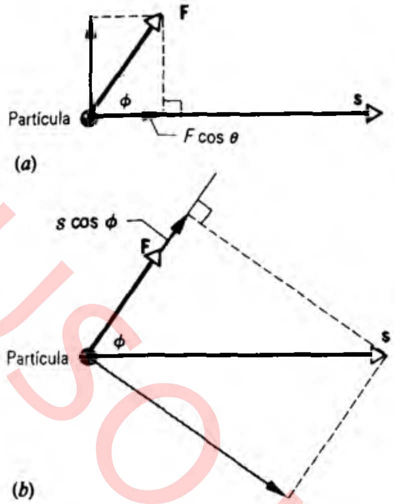


Figura 4 (*a*) El trabajo W interpretado como $W = (s)(F \cos \phi)$. (*b*) El trabajo W interpretado como $W = (F)(s \cos \phi)$.

escalar. Comparando la ecuación 2 con la ecuación 13 del capítulo 3, hallamos que podemos expresar el trabajo como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}, \tag{3}$$

donde el punto indica un producto escalar (o producto punto).

El trabajo puede ser positivo o negativo. Si una fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del movimiento, el trabajo efectuado por esa fuerza es negativo. Esto corresponde a un ángulo obtuso entre los vectores de fuerza y de desplazamiento. Por ejemplo, cuando bajamos un objeto al suelo, el trabajo efectuado sobre el objeto por la fuerza que la mano ejerce hacia arriba al sostener al objeto, es negativo. En este caso ϕ es 180°, ya que **F** apunta hacia arriba y **s** apunta hacia abajo. (La fuerza gravitatoria, en este caso, efectúa un trabajo positivo cuando el objeto se mueve hacia abajo.)

Aun cuando la fuerza **F** es una invariante, independiente tanto en magnitud como en dirección de nuestra elección de marcos inerciales, el desplazamiento **s** *no lo es*. Dependiendo del marco inercial desde el que se efectúe la medición, un observador podría medir en esencia cualquier magnitud y dirección para el desplazamiento **s**. Entonces, observadores en marcos inerciales diferentes, que estuvieran de acuerdo sobre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, no lo estarían en la evaluación del trabajo efectuado por esas mismas fuerzas. Diferentes observadores podrían encontrar que el trabajo es positivo, negativo, e incluso cero. Exploramos este punto más adelante, en la sección 7-6.

El trabajo, como lo hemos definido por la ecuación 3, prueba ser un concepto muy útil en física. Nuestra definición especial de la palabra "trabajo" no corresponde al uso coloquial del término. Esto puede prestarse a confusión. Una persona que sostiene una pesa pesada en reposo en el aire puede estar trabajando arduamente en el sentido fisiológico, pero desde el punto de vista de la física esa persona no está realizando trabajo alguno sobre las pesas. Y decimos así porque la fuerza aplicada no causa ningún desplazamiento de las pesas.

Si, por otra parte, consideramos que el levantador de pesas es un sistema de partículas (lo cual trataremos en el capítulo 9), hallamos que, microscópicamente, se está efectuando en verdad un trabajo. Un músculo no es un soporte sólido y no puede sostener una carga de manera estática. Cada una de las fibras musculares se relajan y contraen repetidamente y, si analizamos la situación de esta manera, hallamos que realmente se está efectuando un trabajo en cada contracción. Ello se debe a que el levantador de pesas se llega a cansar al soportar las pesas. En este capítulo no consideraremos este trabajo "interno". La palabra *trabajo* es usada sólo en el sentido estricto de la ecuación 3, de modo que verdaderamente se anula en el caso de que no exista un desplazamiento de la partícula sobre la que actúa la fuerza.

La unidad de trabajo se determina a partir del trabajo efectuado por una fuerza unitaria al mover a un cuerpo a través de una distancia unitaria en dirección de la fuerza. La unidad de trabajo en el SI es 1 *newton-metro*, llamado también 1 *joule* (abreviado **J**). En el sistema inglés la unidad de trabajo es la libra-pie. En el sistema cgs la unidad de trabajo es 1 dina-centímetro, llamada también 1 erg. Usando las relaciones entre el newton, la dina y la libra, y entre el metro, el centímetro, y el pie, obtenemos que 1 joule = 10^7 ergs = 0.7376 ft · lb.

Una unidad de trabajo conveniente al tratar con partículas atómicas o subatómicas es el *electronvolt* (abreviado eV), donde 1 eV = 1.60×10^{-19} **J**. El trabajo necesario para retirar un electrón exterior de un átomo tiene una magnitud típica de varios eV. El trabajo necesario para remover un protón o un neutrón de un núcleo tiene una magnitud típica de varios MeV (10^6 eV).

Problema muestra 1 Un bloque de masa m = 11.7 kg va a ser empujado una distancia s = 4.65 m a lo largo de un plano inclinado de modo tal que en el proceso se eleva una distancia h = 2.86 m (Fig. 5*a*). Suponiendo superficies sin fricción, calcule cuánto trabajo tendría que llevarse a cabo si se aplica una fuerza paralela al plano inclinado para empujar al bloque hacia arriba a velocidad constante.

Solución En la figura 5*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del bloque. Debemos primero hallar P, la magnitud de la fuerza que empuja al bloque hacia arriba en el plano inclinado. Ya que el movimiento no es acelerado (se nos dice que la velocidad es constante), la fuerza neta paralela al plano debe ser cero. Si elegimos al eje x paralelo al plano, con la dirección positiva hacia arriba, tendremos, según la segunda ley de Newton,

$$\text{componente } x: \quad P - mg \operatorname{sen} \theta = 0,$$

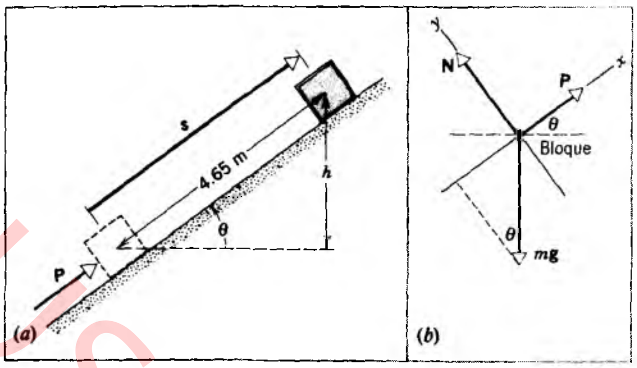


Figura 5 Problema muestra 1. (*a*) Una fuerza **P** mueve a un bloque hacia arriba en un plano inclinado, siendo s el desplazamiento. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre para el bloque.

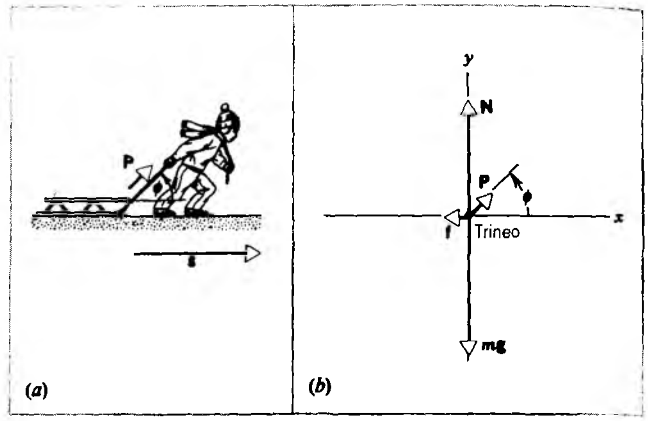


Figura 6 Problema muestra 2. (*a*) Un niño desplaza un trineo una cantidad s jalando de él con una fuerza **P** por medio de una cuerda que forma un ángulo ϕ con la horizontal. (*b*) Un diagrama de cuerpo libre para el trineo.

o sea

$$P = mg \operatorname{sen} \theta = (11.7\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)\left(\frac{2.86\ \text{m}}{4.65\ \text{m}}\right) = 70.5\ \text{N}.$$

Entonces, el trabajo efectuado por **P**, según la ecuación 3 con $\phi = 0^\circ$, es

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps\cos 0^\circ = Ps = (70.5\ \text{N})(4.65\ \text{m}) = 328\ \text{J}.$$

Nótese que el ángulo ϕ ($= 0^\circ$) usado en esta expresión es el ángulo entre la fuerza aplicada y el desplazamiento del bloque, siendo ambos paralelos al plano inclinado. El ángulo ϕ no debe ser confundido con el ángulo θ del plano inclinado.

Si fuésemos a elevar el bloque verticalmente a velocidad constante sin usar el plano inclinado, el trabajo que haríamos sería la fuerza vertical, la cual es igual a mg multiplicado por la distancia vertical h, o sea

$$W = mgh = (11.7\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(2.86\ \text{m}) = 328\ \text{J},$$

lo mismo que antes. La única diferencia es que el plano inclinado permite utilizar una fuerza más pequeña ($P = 70.5$ N) que la que se necesitaría sin el plano ($mg = 115$ N). Por otra parte, debemos empujar el bloque por el plano inclinado una *distancia* mayor (4.65 m) de lo que lo haríamos al elevarlo directamente (2.86 m).

Problema muestra 2 Un niño arrastra un trineo de 5.6 kg una distancia de $s = 12$ m a velocidad constante a lo largo de una superficie horizontal. ¿Qué trabajo hace el niño sobre el trineo si el coeficiente de fricción cinética μ_k es 0.20 y la cuerda forma un ángulo de $\phi = 45^\circ$ con la horizontal?

Solución En la figura 6*a* se muestra la situación y en la figura 6*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que actúan sobre el trineo. **P** es el jalón del niño, mg es el peso del trineo, **f** es la fuerza de fricción, y **N** es la fuerza normal ejercida por la superficie contra el trineo. El trabajo efectuado por el niño sobre el trineo es

$$W = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s} = Ps\cos\phi.$$

Para evaluar esto debemos primero determinar P, cuyo valor no se nos ha dado. Para obtener P nos referimos al diagrama de cuerpo libre de la figura 6*b*.

El trineo no es acelerado, de modo que de la segunda ley de Newton obtendremos lo siguiente:

$$\text{componente } x\text{:} \qquad P\cos\phi - f = 0,$$

$$\text{componente } y\text{:} \qquad P\operatorname{sen}\phi + N - mg = 0.$$

Sabemos que f y N están relacionadas por

$$f = \mu_k N.$$

Estas tres ecuaciones contienen tres incógnitas: $P, f,$ y N. Para hallar P eliminamos a f y N de estas ecuaciones y resolvemos la ecuación restante para P. Verifique que

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos\phi + \mu_k \operatorname{sen}\phi}.$$

Con $\mu_k = 0.20$, $mg = (5.6\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 55$ N, y $\phi = 45^\circ$ obtenemos

$$P = \frac{(0.20)(55\ \text{N})}{\cos 45^\circ + (0.20)(\operatorname{sen} 45^\circ)} = 13\ \text{N}.$$

Entonces con $s = 12$ m, el trabajo efectuado por el niño sobre el trineo es

$$W = Ps\cos\phi = (13\ \text{N})(12\ \text{m})(\cos 45^\circ) = 110\ \text{J}.$$

La componente vertical del jalón **P** no realiza trabajo sobre el trineo. Sin embargo, nótese que reduce la fuerza normal entre el trineo y la superficie ($N = mg - P\operatorname{sen}\phi$) y, por lo tanto, reduce la magnitud de la fuerza de fricción ($f = \mu_k N$).

¿Realizaría el niño más trabajo, menos trabajo, o la misma cantidad de trabajo sobre el trineo si P se aplicara horizontalmente en lugar de a 45° con la horizontal? Alguna de las demás fuerzas sobre el trineo efectúa trabajo sobre él?

-2 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA VARIABLE: CASO UNIDIMENSIONAL

Consideremos ahora el trabajo efectuado por una fuerza que no sea constante. Hagamos que la fuerza actúe solamente en una dirección, la cual tomaremos como la dirección x, y hagamos que varíe su magnitud con x de acuerdo con la función $F(x)$. Supongamos que un cuerpo que se mueve en la dirección x reciba la acción de esta fuerza. ¿Cuál es el trabajo efectuado por esta fuerza variable si el cuerpo se mueve desde la posición inicial x_i a la posición final x_f?

En la figura 7 trazamos la gráfica de F contra x. Dividamos el desplazamiento total en un número N de intervalos pequeños de anchura igual δx (Fig. 7*a*). Consideremos el primer intervalo, en el cual existe un pequeño desplazamiento δx desde x_i hasta $x_i + \delta x$. Durante este pequeño desplazamiento la fuerza $F(x)$ tiene un valor F_1 casi constante, y la pequeña cantidad de trabajo δW_1 que se efectúa en ese intervalo es, aproximadamente,

$$\delta W_1 = F_1\, \delta x. \tag{4}$$

De igual manera, durante el segundo intervalo existe un pequeño desplazamiento desde $x_i + \delta x$ hasta $x_i + 2\delta x$, y la fuerza $F(x)$ tiene un valor F_2 casi constante. El trabajo efectuado por la fuerza en el segundo intervalo es, aproximadamente, $\delta W_2 = F_2 \delta_x$. El trabajo total W efectuado por $F(x)$ para desplazar al cuerpo desde x_i hasta x_f es, aproximadamente, la suma de un gran número de términos como los de la ecuación 4, donde F tiene un valor diferente para cada término. De aquí que

$$\begin{aligned} W &= \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots \\ &= F_1\, \delta x + F_2\, \delta x + F_3\, \delta x + \cdots \end{aligned}$$

o sea

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n\, \delta x, \tag{5}$$

donde la letra griega sigma (Σ) significa la suma de todos los intervalos N desde x_i hasta x_f.

Para llevar a cabo una aproximación mejor podemos dividir el desplazamiento total desde x_i hasta x_f en un número mayor de intervalos, como en la figura 7*b*, de modo que δx sea más pequeña y el valor de F_n en cada intervalo sea más típico de la fuerza dentro del intervalo. Está claro que podemos obtener cada vez mejores aproximaciones tomando δx más pequeño cada vez, con el fin de tener un mayor número de intervalos. Podemos obtener un resultado exacto para el trabajo efectuado por F si hacemos que δx tienda a cero y el número N de intervalos tienda al infinito. De aquí que el resultado exacto sea

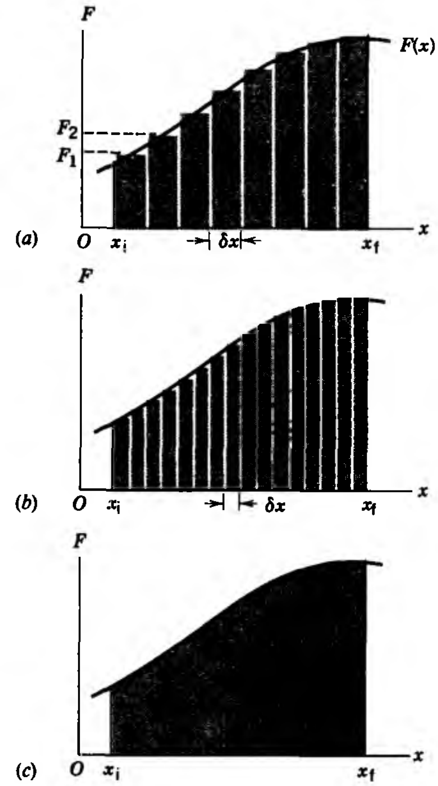


Figura 7 (*a*) El área bajo la curva de la fuerza variable unidimensional $F(x)$ es aproximada al dividir la región entre los límites x_i y x_f en un número de intervalos de anchura δx. La suma de las áreas de las fajas rectangulares es aproximadamente igual al área bajo la curva. (*b*) Una aproximación mejor se obtiene usando un número mayor de fajas más angostas. (*c*) El área real se obtiene en el límite $\delta x \to 0$.

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n\, \delta x. \tag{6}$$

La relación

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum F_n\, \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx,$$

según lo habrá usted aprendido en su curso de cálculo, define a la integral de F con respecto a x desde x_i hasta x_f. Numéricamente, esta cantidad es exactamente igual al área entre la curva de la fuerza y el eje x entre los límites x_i y x_f (Fig. 7*c*). De aquí que una integral pueda ser interpretada gráficamente como un área. El símbolo $\int$ es una S (de suma) distorsionada y simboliza el proceso de la integración. Podemos escribir el trabajo total efectuado por F al desplazar un cuerpo desde x_i hasta x_f así:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx. \tag{7}$$

Puesto que hemos eliminado la notación vectorial de esta ecuación unidimensional, debemos tener sumo cuidado al poner el signo de F, que es positivo si F está en la dirección de x creciente y negativo si F está en la dirección de x decreciente.

Como un ejemplo de una fuerza variable, consideremos un resorte que actúe sobre una partícula de masa m (Fig. 8). La partícula se mueve en dirección horizontal, la cual tomamos que sea la dirección x, con el origen ($x = 0$) representando la posición de la partícula cuando el resorte está relajado (Fig. 8*a*). Sobre la partícula actúa una fuerza externa F_{ext} en dirección opuesta a la fuerza del resorte. Suponemos que la fuerza externa es siempre aproximadamente igual a la fuerza del resorte, de modo que la partícula esté en equilibrio en todo momento ($a = 0$).

Sea desplazada la partícula una distancia x desde su posición original en $x = 0$ (Fig. 8*b*). Si el agente externo ejerce una fuerza F_{ext} sobre la partícula, el resorte ejercerá una fuerza opuesta F_s . Esta fuerza está dada con bastante aproximación por

$$F_s = -kx, \tag{8}$$

donde k es una constante positiva, llamada la *constante de fuerza* del resorte. La constante k es una medida de la fuerza necesaria para producir un estiramiento determinado del resorte; los resortes más rígidos tienen los valores de k mayores. La ecuación 8 es la *ley de la fuerza* para los resortes, y se la conoce como *ley de Hooke*. El signo menos en la ecuación 8 nos advierte que la dirección de la fuerza ejercida por el resorte se opone siempre a la dirección del desplazamiento de la partícula. Cuando el resorte se estira, $x > 0$ y F_s es negativa; cuando el resorte se comprime, $x < 0$ y F_s es positiva. La fuerza ejercida por el resorte es una *fuerza de restitución*: tiende siempre a *restablecer* a la partícula a su posición en $x = 0$. Los resortes más reales obedecen a la ecuación 8 razonablemente bien siempre y cuando no los estiremos más allá de una cantidad límite.

Consideremos primero el trabajo efectuado *sobre* la partícula *por* el resorte cuando la partícula se mueve desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f. Usamos la ecuación 7 con la fuerza F_s:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2. \tag{9}$$

El signo del trabajo efectuado por el resorte sobre la partícula es positivo si $x_i^2 > x_f^2$ (esto es, si la magnitud del desplazamiento inicial de la partícula es mayor que la de su desplazamiento final). Nótese que el resorte efectúa trabajo *positivo* cuando actúa para restablecer a la partícula en su posición en $x = 0$. Si la magnitud del desplazamiento inicial es más pequeña que la del desplazamiento final, el resorte efectúa trabajo *negativo* sobre la partícula.

Si estamos interesados en conocer el trabajo efectuado por el resorte sobre la partícula cuando la partícula se mueve

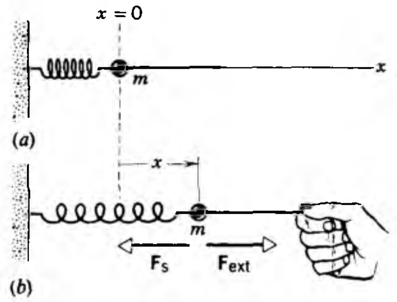


Figura 8 (*a*) Una partícula de masa m está unida a un resorte, el cual está en la posición relajada. (*b*) La partícula se desplaza una distancia x, donde hay dos fuerzas que actúan sobre ella, la fuerza de restitución del resorte y el jalón de un agente externo.

desde su posición original en $x = 0$ a lo largo de un desplazamiento x, hacemos que $x_i = 0$ y $x_f = x$ y obtendremos

$$W_s = \int_0^x (-kx)\, dx = -\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{10}$$

Nótese que el trabajo efectuado por el resorte cuando se halla comprimido a lo largo de un desplazamiento x es el mismo que el efectuado en la posición de extendido a lo largo de x, porque el desplazamiento x está elevado al cuadrado en la ecuación 10; cualquier signo de x dará un valor positivo para x^2 y un valor negativo para W_s.

¿Qué tanto trabajo efectúa el *agente externo* cuando la partícula se mueve desde $x_i = 0$ hasta $x_f = x$? Para mantener a la partícula en equilibrio, la fuerza externa F_{ext} debe ser de igual magnitud que la fuerza del resorte pero de signo opuesto, de modo que $F_{ext} = +kx$. Repitiendo el cálculo como en la ecuación 10 para el trabajo efectuado por el agente externo nos da

$$W_{ext} = +\tfrac{1}{2}kx^2. \tag{11}$$

Nótese que ésta es, exactamente, la negativa de la ecuación 10.

Podemos también hallar W_s y W_{ext} calculando el área entre la curva fuerza-desplazamiento apropiada y el eje x desde $x = 0$ hasta un valor arbitrario de x. En la figura 9 las dos rectas con pendiente que pasan a través del origen son gráficas de la fuerza externa contra el desplazamiento ($F_{ext} = +kx$) y la fuerza del resorte contra el desplazamiento ($F_s = -kx$). El lado derecho de la gráfica ($x > 0$) corresponde al estiramiento del resorte y el lado izquierdo ($x < 0$) a la compresión.

Al *estirar* el resorte, el trabajo efectuado por la fuerza externa es positivo y está representado por el triángulo superior de la derecha en la figura 9, marcado W_{ext}. La base de este triángulo es $+x$ y su altura es $+kx$; por lo tanto, su área es

$$\tfrac{1}{2}(+x)(+kx) = +\tfrac{1}{2}kx^2$$

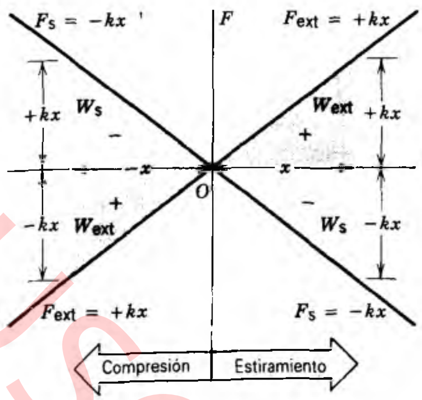


Figura 9 El trabajo W_s efectuado por la fuerza del resorte está representado por las áreas negativas (de sombreado suave), y el trabajo W_{ext} efectuado por la fuerza externa, que está en equilibrio con la fuerza del resorte, está representado por las áreas positivas (de sombreado intenso). Ya sea que el resorte esté estirado ($x > 0$), o comprimido ($x < 0$), W_s es negativo y W_{ext} es positivo.

de acuerdo con la ecuación 11. Cuando el resorte es estirado, el trabajo efectuado por la fuerza del resorte es negativo y está representado por el triángulo inferior marcado W_s en el lado derecho de la figura 9; puede demostrarse por medio de un argumento geométrico similar que este triángulo tiene un área de $-\frac{1}{2}kx^2$, de acuerdo con la ecuación 10

Al *comprimir* el resorte, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 9, el trabajo W_{ext} efectuado por el agente externo es todavía positivo, y el trabajo W_s efectuado por el resorte es todavía negativo, justo como lo esperamos de los signos de las fuerzas y del desplazamiento.

Problema muestra 3 Un resorte cuelga verticalmente en equilibrio. Un bloque de masa $m = 6.40$ kg está unido al resorte, pero el bloque es sostenido en su lugar de modo que al principio el resorte no se estire. Ahora la mano que sostiene al bloque desciende lentamente, permitiendo que el bloque descienda a velocidad constante hasta que alcance el equilibrio, en cuyo punto se retira la mano. Una medición demuestra que el resorte se ha estirado una distancia $s = 0.124$ m respecto a su longitud de equilibrio previa. Halle el trabajo efectuado sobre el bloque en este proceso por (*a*) la gravedad, (*b*) el resorte, y (*c*) la mano.

Solución No se nos da la constante de fuerza del resorte, pero podemos hallarla porque sabemos que en la posición estirada el bloque está en equilibrio por la fuerza hacia arriba del resorte y la fuerza hacia abajo de la gravedad:

$$\sum F = mg - ks = 0.$$

Aquí hemos elegido la dirección hacia abajo como positiva. Resolviendo para k hallamos que

$$k = mg/s = (6.40\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)/(0.124\ \text{m}) = 506\ \text{N/m}.$$

Para hallar el trabajo efectuado por la gravedad, W_g, advertimos que la fuerza de la gravedad es una fuerza constante, y que la fuerza y el desplazamiento son paralelos, de modo que podemos usar la ecuación 1:

$$W_g = Fs = mgs = (6.40\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.124\ \text{m}) = +7.78\ \text{J}.$$

Éste es positivo, porque la fuerza y el desplazamiento están en la misma dirección. Para hallar el trabajo W_s efectuado por el resorte, usamos la ecuación 10 con $x = s$:

$$W_s = -\tfrac{1}{2}ks^2 = -\tfrac{1}{2}(506\ \text{N/m})(0.124\ \text{m})^2 = -3.89\ \text{J}.$$

Éste es negativo, porque la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas.

Una manera de hallar el trabajo W_h efectuado por la mano es hallar la fuerza ejercida por la mano cuando el bloque desciende. Si el bloque está en equilibrio durante todo el proceso, entonces puede hallarse la fuerza F_h hacia arriba ejercida por la mano a partir de la segunda ley de Newton con $a = 0$:

$$\sum F = -kx - F_h + mg = 0,$$

o sea

$$F_h = mg - kx.$$

El trabajo puede ser hallado a partir de una integral de la forma de la ecuación 7, con un signo negativo introducido para indicar que la fuerza se opone al desplazamiento:

$$W_h = -\int_0^s F_h\, dx = -\int_0^s (mg - kx)\, dx = -mgs + \tfrac{1}{2}ks^2$$
$$= -mgs + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{s}\right)s^2 = -\tfrac{1}{2}mgs = -3.89\ \text{J}.$$

Una manera más sencilla de obtener este resultado es reconocer que si el bloque (al que tratamos como partícula) desciende lenta y uniformemente, entonces la fuerza neta es cero, y, por lo tanto, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser cero:

$$W_{neto} = W_s + W_g + W_h = 0,$$
$$W_h = -W_s - W_g = -(-3.89\ \text{J}) - 7.78\ \text{J} = -3.89\ \text{J}.$$

Nótese que el trabajo efectuado por la mano es igual al trabajo efectuado por el resorte.

7-3 TRABAJO EFECTUADO POR UNA FUERZA VARIABLE: CASO BIDIMENSIONAL *(Opcional)*

La fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede variar tanto en dirección como en magnitud, y la partícula puede moverse a lo largo de una trayectoria curva. Para calcular el trabajo en este caso general dividimos la trayectoria en un número grande de desplazamientos pequeños $\delta\mathbf{s}$, cada uno tangente a la trayectoria en dirección del movimiento. La figura 10 muestra dos desplazamientos escogidos para una situación particular; muestra también a la fuerza **F** y al ángulo ϕ entre **F** y $\delta\mathbf{s}$ en cada ubicación. Podemos hallar la cantidad de trabajo δW efectuado sobre la partícula durante un desplazamiento $\delta\mathbf{s}$ de

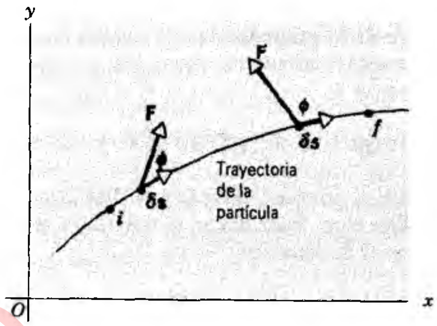


Figura 10 Una partícula se mueve desde el punto i hasta el punto f a lo largo de la trayectoria mostrada. Durante este movimiento actúa sobre ella una fuerza **F** que varía tanto en magnitud como en dirección. Cuando $\delta s \to 0$, sustituimos al intervalo por ds, la cual está en la dirección de la velocidad instantánea y, por lo tanto, tangente a la trayectoria.

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = F \cos \phi \, \delta s. \tag{12}$$

Aquí **F** es la fuerza en el punto donde se inicia δs. El trabajo efectuado por la fuerza variable **F** sobre la partícula cuando ésta se mueve desde i hasta f en la figura 10 se halla aproximadamente sumando los elementos del trabajo sobre cada uno de los segmentos lineales que forman la trayectoria desde i hasta f. Si los segmentos lineales δs resultan infinitesimalmente pequeños, pueden ser sustituidos por diferenciales ds y la suma de todos los segmentos lineales puede ser sustituida por una integral, como en la ecuación 7. El trabajo efectuado se halla, entonces, de

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F \cos \phi \, ds. \tag{13}$$

No podemos evaluar esta integral hasta que podamos decir cómo varían en la ecuación 13 F y ϕ entre punto y punto a lo largo de la trayectoria; ambos son funciones de las coordenadas x y y de la partícula en la figura 10.

Podemos obtener una expresión equivalente a la ecuación 13 escribiendo **F** y $d\mathbf{s}$ en términos de sus componentes. Entonces $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ y $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, de modo que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x\,dx + F_y\,dy$. En esta evaluación recordemos que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ y que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ (véase la Ec. 14, capítulo 3). Sustituyendo este resultado en la ecuación 13, obtenemos

$$W = \int_i^f (F_x\,dx + F_y\,dy). \tag{14}$$

Las integrales como éstas de las ecuaciones 13 y 14 se llaman *integrales de línea*; para evaluarlas debemos saber cómo varían $F \cos \phi$ o F_x y F_y cuando la partícula se va moviendo a lo largo de una línea determinada. La extensión de la ecuación 14 al caso tridimensional es sencilla.

Problema muestra 4 Un objeto pequeño de masa m está suspendido de un cordón de longitud L. El objeto es jalado lateralmente por una fuerza P siempre horizontal, hasta que el cordón forma un ángulo ϕ_m con la vertical (Fig. 11a). El desplazamiento se lleva a cabo de forma tan lenta que podemos ver al sistema como si estuviera en equilibrio durante el proceso. Halle

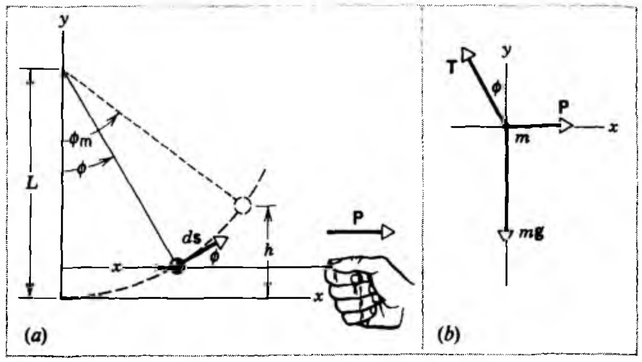


Figura 11 Problema muestra 4. (a) Una partícula está suspendida de un cordón de longitud L y es jalada lateralmente por una fuerza horizontal P. El ángulo máximo alcanzado es ϕ_m. (b) Un diagrama de cuerpo libre de la partícula.

el trabajo efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

Solución El movimiento tiene lugar a lo largo de un arco de radio L, y el desplazamiento ds se da siempre a lo largo del arco. En un punto intermedio del movimiento, el cordón forma un ángulo ϕ con la vertical, y según el diagrama de cuerpo libre de la figura 11b vemos que, aplicando la segunda ley de Newton,

$$\text{componente } x\text{:} \qquad P - T \operatorname{sen} \phi = 0,$$

$$\text{componente } y\text{:} \qquad T \cos \phi - mg = 0.$$

Combinando estas dos ecuaciones para eliminar a T, hallamos que

$$P = mg \tan \phi.$$

Puesto que P actúa solamente en dirección x, podemos usar la Ec. 14 con $F_x = P$ y $F_y = 0$ para hallar el trabajo efectuado por P. Entonces

$$W_P = \int P\,dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi \, dx.$$

Para efectuar la integral sobre ϕ, debemos tener una sola variable en la integración; elegimos definir a x en términos de ϕ. En una posición intermedia arbitraria, cuando la coordenada horizontal es x, vemos que $x = L \operatorname{sen} \phi$ y entonces $dx = L \cos \phi \, d\phi$. Sustituyendo por dx, podremos ahora llevar a cabo la integración:

$$\begin{aligned} W_P &= \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi \, (L \cos \phi \, d\phi) \\ &= mgL \int_0^{\phi_m} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = mgL(-\cos \phi)\Big|_0^{\phi_m} \\ &= mgL(1 - \cos \phi_m). \end{aligned}$$

En la figura 11a podemos ver que $h = L(1 - \cos \phi_m)$, y entonces

$$W_P = mgh.$$

El trabajo W_g efectuado por la fuerza de la gravedad (constante) mg puede ser evaluado usando una técnica similar basada en la ecuación 14 (tomando $F_x = 0$, $F_y = -mg$) para dar $W_g = -mgh$ (véase el problema 16). El signo menos se debe a que la dirección del desplazamiento vertical es en sentido opuesto a la dirección de la fuerza de la gravedad. El trabajo W_T efectuado por la tensión del cordón es cero, porque **T** es perpendicular al desplazamiento $d\mathbf{s}$ en cada punto del movimiento. Ahora podemos ver que el trabajo total es cero: $W_{neto} = W_p + W_g + W_T = mgh - mgh + 0 = 0$, consistente con el hecho de que la fuerza neta sobre la partícula es siempre cero durante el movimiento.

Nótese que en este problema el trabajo (positivo) efectuado por la fuerza horizontal **P** cancela, en efecto, el trabajo (negativo) efectuado por la fuerza vertical mg. Esto puede ocurrir porque el trabajo es una cantidad *escalar*: no tiene dirección ni componentes. El movimiento de la partícula depende del trabajo *total* efectuado sobre ella, el cual es la suma escalar de los valores del trabajo asociados con cada una de las fuerzas individuales. ■

7-4 ENERGÍA CINÉTICA Y EL TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

En esta sección consideraremos el efecto del trabajo sobre el movimiento de una partícula. Una fuerza no equilibrada aplicada a una partícula cambiará ciertamente el estado del movimiento de la partícula. La segunda ley de Newton nos proporciona un modo de analizar este cambio de movimiento. Consideraremos ahora un enfoque diferente que, finalmente, nos dé el mismo resultado que las leyes de Newton pero que a menudo es más sencillo de aplicar. Nos conduce también a una de las muchas e importantes *leyes de conservación* que desempeñan un papel tan importante en la interpretación de los procesos físicos.

En esta discusión consideraremos no el trabajo efectuado sobre una partícula por una sola fuerza sino el trabajo neto W_{neto} efectuado por todas las fuerzas que actúen sobre la partícula. Existen dos maneras de hallar el trabajo neto. La primera es hallar la fuerza neta, esto es, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula,

$$\mathbf{F}_{net} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots, \qquad (15)$$

y tratar esta fuerza neta como una única fuerza al calcular el trabajo según la ecuación 7 en una dimensión o según la ecuación 13 en más de una dimensión. Por el segundo método, calculamos el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan en la partícula,

$$W_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}, \qquad W_2 = \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s},$$
$$W_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}, \cdots,$$

y luego, puesto que el trabajo es un escalar, podemos sumar el trabajo hecho por cada fuerza para hallar el trabajo neto:

$$W_{neto} = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots. \qquad (16)$$

Ambos métodos arrojan iguales resultados y por cuál de ellos nos inclinemos, constituye una cuestión de mera convención.

Sabemos que una fuerza neta desequilibrada aplicada a una partícula cambiará su estado de movimiento al acelerarla, digamos de una velocidad inicial v_i a una velocidad final v_f. ¿Cuál es el efecto del trabajo hecho sobre la partícula por esta fuerza neta desequilibrada?

Veremos primero la respuesta a esta pregunta en el caso de una fuerza constante en una dimensión. Bajo la influencia de esta fuerza, la partícula se mueve de x_i a x_f, y acelera de manera uniforme de v_i hasta v_f. El trabajo hecho es

$$W_{neto} = F_{neto}(x_f - x_i) = ma(x_f - x_i).$$

Puesto que la aceleración a es constante, podemos usar la ecuación 20 del capítulo 2, expresada como $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ para obtener

$$W_{neto} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \qquad (17)$$

Es decir, el resultado del trabajo neto en la partícula ha consistido en producir un cambio en el valor de la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ desde el punto i al punto f. Esta cantidad se denomina *energía cinética K* de la partícula, con la definición

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \qquad (18)$$

En términos de la energía cinética K, podemos reescribir la ecuación 17 así:

$$W_{neto} = K_f - K_i = \Delta K. \qquad (19)$$

La ecuación 19 es la representación matemática de un importante resultado llamado *teorema trabajo-energía*, el cual, en palabras, puede enunciarse como sigue:

> *El trabajo neto efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.*

Aun cuando lo hemos derivado para el caso de una fuerza resultante constante, el teorema trabajo-energía es válido en general también para fuerzas no constantes. Posteriormente en esta misma sección, daremos una demostración general para fuerzas no constantes.

Al igual que el trabajo, la energía cinética es una cantidad escalar; a diferencia del trabajo, la energía cinética nunca es negativa. Ya hemos mencionado que el trabajo depende de la elección del marco de referencia y, por lo tanto, no debe sorprendernos que la energía cinética lo sea también. Por supuesto, ya sabemos que observadores en marcos inerciales diferentes diferirán en sus mediciones de la velocidad, y, por lo tanto, diferirán también en la asignación de las energías cinéticas a las partículas. Aunque los observadores no concuerden en los números que asignen al trabajo y a la energía cinética, sin embargo, hallarán que la misma relación se mantiene entre estas cantidades, es decir, $W_{neto} = \Delta K$.

Para que la ecuación 19 sea dimensionalmente consistente, la energía cinética debe tener las mismas unidades que el trabajo, es decir, joules, ergs, pie-libras, electronvolts, etc.

Cuando la magnitud de la velocidad de una partícula es constante, no existe un cambio en la energía cinética, y, por lo tanto, la fuerza resultante no realiza trabajo. En el movimiento circular uniforme, por ejemplo, la fuerza resultante actúa hacia el centro del círculo y forma siempre ángulos rectos con la dirección del movimiento. Tal fuerza no realiza trabajo sobre la partícula: cambia la dirección de la velocidad de la partícula pero no su magnitud. Se efectuará un trabajo sobre la partícula y cambiará su energía cinética sólo cuando la fuerza resultante tenga una componente en dirección del movimiento.

El teorema trabajo-energía *no* representa una ley nueva, independiente de la mecánica clásica. Simplemente hemos *definido* al trabajo (Ec. 7, por ejemplo) y a la energía cinética (Ec. 18) y *derivado* la relación entre ellos a partir de la segunda ley de Newton. El teorema trabajo-energía es útil, sin embargo, para resolver problemas en los que el trabajo neto efectuado sobre una partícula por fuerzas externas se calcula fácilmente y también en aquellos problemas en los cuales nos interesa hallar la velocidad de la partícula en ciertas posiciones. El teorema trabajo-energía es de mayor importancia, incluso, como un punto de partida para una generalización amplia del concepto de energía y de cómo la energía puede ser almacenada o utilizada entre partes de un sistema complejo. El principio de conservación de la energía es el tema del capítulo siguiente.

Prueba general del teorema trabajo-energía

El cálculo siguiente nos ofrece una prueba de la ecuación 19 en el caso de fuerzas no constantes en una dimensión. El cálculo equivalente en dos o tres dimensiones se deja como ejercicio (véase el problema 34). Hagamos que F_{neto} represente la fuerza neta que actúa sobre la partícula. El trabajo neto efectuado por todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula es precisamente $W_{neto} = \int F_{neto}\, dx$. Con un poco de manipulación matemática podemos llevar a cabo un cambio de la variable de integración y poner esto de una manera más útil:

$$F_{neto} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v = mv\frac{dv}{dx}.$$

Entonces

$$W_{neto} = \int F_{net}\, dx = \int mv\frac{dv}{dx}\, dx = \int mv\, dv.$$

La variable de integración es ahora la velocidad v. Integremos desde la velocidad inicial v_i hasta la velocidad final v_f:

$$W_{neto} = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv = m\int_{v_i}^{v_f} v\, dv = \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2.$$

Ésta es idéntica a la ecuación 19 y demuestra que el teorema trabajo-energía se mantiene incluso para fuerzas no constantes.

Problema muestra 5 Un método para determinar la energía cinética de los neutrones contenidos en un haz, tal como el de un reactor nuclear, es medir cuánto tiempo le toma a una partícula del haz pasar por dos puntos fijos separados por una distancia conocida. Esta técnica se conoce como el método del *tiempo de vuelo*. Supongamos a un neutrón que viaje una distancia d = 6.2 m en un tiempo t = 160 μs. ¿Cuál es su energía cinética? La masa de un neutrón es de 1.67×10^{-27} kg.

Solución Hallamos la velocidad de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6.2\ \text{m}}{160 \times 10^{-6}\ \text{s}} = 3.88 \times 10^4\ \text{m/s}.$$

De la ecuación 18, la energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.88 \times 10^4\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.26 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.9\ \text{eV}.$$

En los reactores nucleares, los neutrones se producen en la fisión nuclear con energías cinéticas típicas de unos cuantos MeV. En este ejemplo ha sido efectuado trabajo negativo sobre los neutrones por un agente externo (llamado moderador), reduciendo por lo tanto sus energías cinéticas por un factor considerable desde unos cuantos MeV a unos cuantos eV.

Problema muestra 6 Un cuerpo de masa m = 4.5 g se deja caer desde el reposo desde una altura h = 10.5 m sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál será su velocidad inmediatamente antes de que toque el suelo?

Solución Suponemos que el cuerpo puede ser tratado como una partícula. Podríamos resolver este problema usando un método basado en las leyes de Newton, tal como lo consideramos en el capítulo 5. En lugar de ello, aquí elegimos resolverlo usando el teorema trabajo-energía. La ganancia en energía cinética es igual al trabajo efectuado por la fuerza resultante, que es aquí la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es constante y dirigida a lo largo de la línea del movimiento, de modo que el trabajo efectuado por la gravedad es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = mgh.$$

Al principio, el cuerpo tiene una velocidad $v_0 = 0$ y, por último, una velocidad v. La ganancia en energía cinética del cuerpo es

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0.$$

De acuerdo con el teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, por lo tanto,

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

La velocidad del cuerpo es, entonces,

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80 \text{ m/s}^2)(10.5 \text{ m})} = 14.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que este resultado es independiente de la masa del objeto, como lo habíamos deducido previamente al usar las leyes de Newton.

Problema muestra 7 Un bloque de masa $m = 3.63$ kg se desliza sobre una mesa horizontal sin fricción a una velocidad de $v = 1.22$ m/s. Queda en reposo al comprimir un resorte en su trayectoria. ¿En cuánto se comprime el resorte si su constante de fuerza k es de 135 N/m?

Solución El cambio en la energía cinética del bloque es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

El trabajo W efectuado por el resorte sobre el bloque cuando el resorte se comprime desde su longitud relajada a través de una distancia d es, de acuerdo con la ecuación 10,

$$W = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Usando el teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, obtenemos

$$-\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2$$

o sea

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.22 \text{ m/s})\sqrt{\frac{3.63 \text{ kg}}{135 \text{ N/m}}} = 0.200 \text{ m}.$$

Limitación del teorema trabajo-energía

Derivamos el teorema trabajo-energía, ecuación 19, directamente de la segunda ley de Newton, la cual, en la forma en que la hemos enunciado, se aplica *solamente a partículas*. De aquí que el teorema trabajo-energía, tal como lo hemos presentado hasta ahora, se aplique igualmente sólo a partículas. Podemos aplicar este importante teorema a objetos reales, siempre que tales objetos se comporten como partículas. Previamente hemos considerado que un objeto se comporta como una partícula *si* todas las partes del objeto se mueven exactamente de la misma manera. En el uso del teorema trabajo-energía, podemos tratar a un objeto extenso como una partícula si la única clase de energía que tiene es la energía cinética direccional (o traslacional).

Consideremos, por ejemplo, a un automóvil de prueba que es impactado de frente contra una barrera de concreto gruesa y rígida. La energía cinética direccional del automóvil ciertamente disminuye cuando el auto alcanza la barrera, se comprime, y llega al reposo. Sin embargo, existen otras formas de energía diferentes a la energía cinética direccional que intervienen en esta situación. Existe la energía interna asociada con el doblamiento y la compresión del cuerpo del auto; parte de esta energía interna puede aparecer, por ejemplo, como un aumento en la temperatura del auto, y parte puede ser transferida como calor al entorno. Nótese que, aun cuando la barrera pueda ejercer una fuerza grande sobre el auto durante el choque, la fuerza no realiza trabajo porque *el punto de aplicación de la fuerza sobre el auto no se mueve*. (Recordemos nuestra definición original del trabajo, dada por la ecuación 1 e ilustrada en la figura 1, que dice: la fuerza debe actuar a través de cierta distancia para que se efectúe un trabajo.) Entonces, en este caso $\Delta K \neq 0$, pero $W = 0$; claramente, la ecuación 19 no se cumple. El auto *no* se comporta como una partícula; *no todas* las piezas de él se mueven exactamente de la misma manera.

Por razones similares, desde el punto de vista del trabajo-energía, no podemos tratar como una partícula a un bloque que se desliza recibiendo la acción de una fuerza de fricción (si bien *podemos*, no obstante, continuar tratándolo como una partícula, como lo hicimos en el capítulo 6, cuando analizamos su comportamiento haciendo uso de las leyes de Newton). La fuerza de fricción, que representamos como una fuerza constante **f**, es en realidad bastante complicada, involucrando en ella la formación y rotura de muchas soldaduras microscópicas (véase la sección 6-2), que deforman las superficies y dan por resultado cambios en la energía interna de las superficies (lo cual puede en parte repercutir como un aumento en la temperatura de las superficies). A causa de la dificultad de comprender a fondo otras formas de la energía, debido a que los objetos no se comportan como partículas, generalmente no es correcto aplicar la forma de una partícula del teorema trabajo-energía a objetos sujetos a fuerzas de fricción.

En estos ejemplos debemos ver al auto que se estrella y al bloque que se desliza no como partículas sino como sistemas que contienen un gran número de partículas. Aunque sería correcto aplicar el teorema trabajo-energía a cada partícula por separado del sistema, resultaría tremendamente complicado hacerlo así. En el capítulo 9 comenzaremos a desarrollar un método más sencillo para tratar a sistemas complejos de partículas, y demostraremos cómo ampliar el teorema trabajo-energía de modo que podamos aplicarlo en tales casos.

7-5 POTENCIA

Al diseñar un sistema mecánico es a menudo necesario considerar no solamente cuánto trabajo debe efectuarse sino también a qué velocidad se efectuará éste. Se efectúa la misma cantidad de trabajo para levantar a un cuerpo dado a una altura dada si el hacerlo toma 1 segundo o 1 año. Sin embargo, la *razón a la que se efectúa dicho trabajo* es muy diferente en los dos casos.

Definimos a la *potencia* como la razón a la que se efectúa el trabajo. (Aquí consideramos solamente la potencia *mecánica*, la cual es una consecuencia del trabajo mecánico. Una visión más general de la potencia como la energía liberada por unidad de tiempo nos permite ampliar el concepto de potencia para incluir a la potencia eléctrica, la potencia solar, y así sucesivamente.) La potencia promedio $\overline{P}$ desarrollada por un agente que ejerza una fuerza particular sobre un cuerpo es el trabajo total efectuado por esa fuerza sobre el cuerpo dividido por el intervalo de tiempo total, o sea

$$\overline{P} = \frac{W}{t} \tag{20}$$

La potencia instantánea P producida por un agente es

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{21}$$

donde dW es la pequeña cantidad de trabajo efectuada en el intervalo infinitesimal de tiempo dt. Si la potencia es constante en el tiempo, entonces $P = \overline{P}$ y

$$W = Pt. \tag{22}$$

La unidad de potencia en el SI es el joule por segundo, llamado *watt* (abreviado W). Esta unidad recibe su nombre en honor a James Watt (1736-1819), quien hizo grandes mejoras en las máquinas de vapor de su tiempo y señaló el camino hacia las máquinas más eficientes de hoy día. En el sistema inglés, la unidad de potencia es 1 ft · lb/s, aunque generalmente se usa una unidad más práctica, el *caballo de fuerza* (hp), para describir la potencia de aparatos tales como los motores eléctricos o los motores de automóviles. Un caballo de fuerza (horsepower) es, por definición, igual a 550 ft · lb/s, que equivale a unos 746 W.

El trabajo puede también expresarse en unidades de potencia × tiempo. Éste es el origen del término *kilowatt-hora*, que la compañía de electricidad usa para medir cuánto trabajo (en forma de energía eléctrica) se consume en las casas. Un kilowatt-hora es el trabajo efectuado en 1 hora por un agente que trabaje a una razón constante de 1 kW.

Podemos también expresar la potencia suministrada a un cuerpo en función de la velocidad del cuerpo y de la fuerza que actúa sobre él. En general, podemos reescribir la ecuación 21 así:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

lo cual, después de sustituir $d\mathbf{s}/dt$ por la velocidad $\mathbf{v}$, se convierte en

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{23}$$

Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$ son paralelas entre sí, esto podemos expresarlo como sigue:

$$P = Fv. \tag{24}$$

Nótese que la potencia puede ser negativa si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelas. Suministrar una potencia negativa a un cuerpo significa hacer un trabajo negativo sobre él: la fuerza ejercida sobre el cuerpo por el agente externo está en dirección opuesta a su desplazamiento $d\mathbf{s}$ y, por lo tanto, opuesta a $\mathbf{v}$.

Problema muestra 8 Un elevador vacío tiene un peso, de 5160 N (1160 lb). Está diseñado para transportar una carga máxima de 20 pasajeros desde la plata baja que se halla al nivel de la calle, hasta el 25º piso de un edificio en un tiempo de 18 s. Suponiendo que el peso promedio de un pasajero sea de 710 N (160 lb) y la distancia entre pisos sea de 3.5 m (11 ft), ¿cuál es la potencia constante mínima necesaria del motor del elevador? (Suponga que todo el trabajo que hace que el elevador se levante procede del motor y que el elevador no tiene contrapesos.)

Solución La fuerza total mínima que debe ejercerse es el peso total del elevador y los pasajeros, F = 5160 N + 20(710) N = 19,400 N. El trabajo que debe ser efectuado es

$$W = Fs = (19{,}400\ \text{N})(25 \times 3.5\ \text{m}) = 1.7 \times 10^6\ \text{J}.$$

La potencia mínima es, por lo tanto,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1.7 \times 10^6\ \text{J}}{18\ \text{s}} = 94\ \text{kW}.$$

Esto es lo mismo que 126 hp, aproximadamente la potencia liberada por el motor de un automóvil. Por supuesto, las pérdidas por fricción y otras ineficiencias aumentarán la potencia que el motor debe proporcionar para levantar al elevador.

En la práctica, un elevador tiene usualmente un contrapeso que baja cuando la cabina del elevador sube. El motor suministra una potencia positiva a la cabina mientras sube y una potencia negativa al contrapeso mientras éste baja. Así, la potencia *neta* que el motor debe suministrar se reduce notablemente.

7-6 MARCOS DE REFERENCIA *(Opcional)*

Las leyes de Newton se cumplen sólo en marcos de referencia inerciales (véase la sección 6-8) y si se cumplen en un marco inercial particular entonces se cumplen en todos los marcos de referencia que se muevan a velocidad constante en relación a ese marco. Ciertas cantidades físicas, si se observan en marcos inerciales diferentes, arrojan siempre la misma medida. En la mecánica newtoniana, estas cantidades *invariantes* incluyen la fuerza, la masa, la aceleración, y el tiempo. Otras cantidades, como el desplazamiento o la velocidad, no son invariantes cuando se miden desde marcos inerciales diferentes. Por ejemplo, en la sección 4-6 estudiamos cómo relacionar las velocidades medidas en dos marcos de referencia en movimiento relativo a una velocidad constante.

Dos observadores en marcos inerciales diferentes medirán la misma aceleración de una partícula y, por tanto, deben deducir el mismo valor del cambio en su velocidad, Δv; pero en general

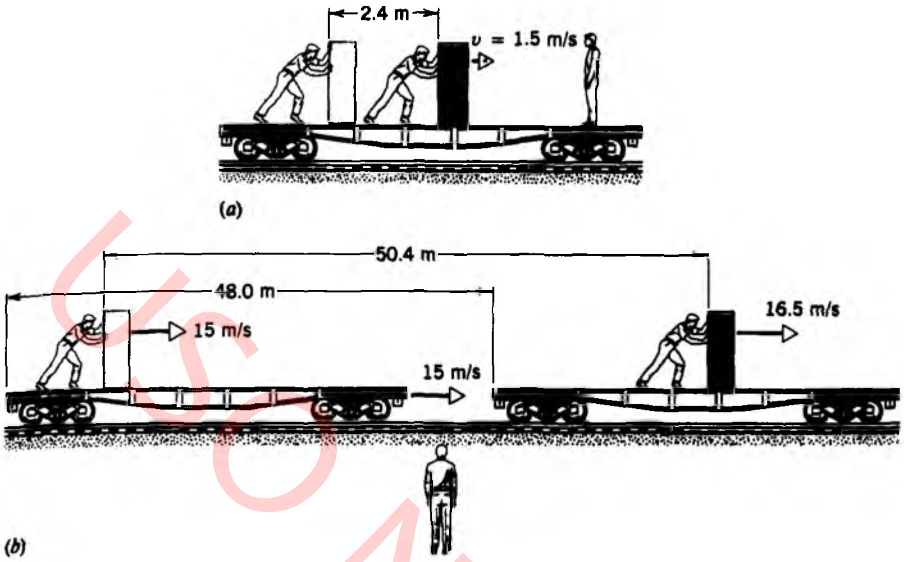


Figura 12 Un obrero que viaja en una plataforma de ferrocarril empuja una caja hacia adelante, como puede verse por (*a*) un observador sobre el tren y (*b*) un observador en tierra.

no medirán el mismo cambio en su energía cinética. Los observadores en movimiento relativo medirán también valores diferentes para el desplazamiento de una partícula, de modo que (aunque midan los mismos valores de las fuerzas que actúen sobre la partícula, siendo la fuerza invariante) deducirán valores diferentes para el trabajo efectuado sobre la partícula. En esta sección aclararemos estas afirmaciones con un ejemplo numérico específico que demuestra la validez del teorema trabajo-energía desde los puntos de vista de observadores en marcos inerciales diferentes.

Consideremos el ejemplo siguiente: un obrero está empujando una caja sobre la plataforma de un carro de ferrocarril. El tren se mueve a la velocidad constante de 15.0 m/s. La caja tiene una masa de 12 kg, y al ser empujado hacia adelante sobre una distancia de 2.4 m su velocidad aumenta (con relación a la plataforma) con aceleración constante desde el reposo hasta 1.5 m/s. La figura 12*a* muestra las posiciones inicial y final según lo aprecia un observador que está viajando en la plataforma. Este observador determina que el cambio en la energía cinética es

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}(12\ \text{kg})(1.5\ \text{m/s})^2 - 0 = 13.5\ \text{J}.$$

La aceleración constante supuesta para la caja puede hallarse de la ecuación 20 del capítulo 2, que nos da

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{(1.5\ \text{m/s})^2 - 0}{2(2.4\ \text{m})} = 0.469\ \text{m/s}^2.$$

Esta aceleración resulta de una correspondiente fuerza neta constante dada por $F = ma = (12\ \text{kg})(0.469\ \text{m/s}^2) = 5.63\ \text{N}$. Al moverse la caja a través de un desplazamiento Δx de 2.4 m, el trabajo efectuado sobre la caja por esta fuerza es

$$W = F\,\Delta x = (5.63\ \text{N})(2.4\ \text{m}) = 13.5\ \text{J}.$$

El observador que viaja en la plataforma concluye felizmente que $W = \Delta K$ y que el teorema trabajo-energía se satisface.

¿Cómo interpreta una medición similar un observador situado en tierra? (Usamos coordenadas primadas para representar las mediciones del observador en tierra.) Cuando la caja está en reposo sobre la plataforma, se está moviendo hacia adelante a razón de $v_i' = 15.0$ m/s de acuerdo con el observador situado en tierra. Después de que la caja es empujada, el mismo observador concluye que su velocidad es de $v_f' = 15.0\ \text{m/s} + 1.5\ \text{m/s} = 16.5$ m/s, y entonces deduce que el cambio en la energía cinética es

$$\begin{aligned}\Delta K' &= K_f' - K_i' = \tfrac{1}{2}mv_f'^2 - \tfrac{1}{2}mv_i'^2\\ &= \tfrac{1}{2}(12\ \text{kg})(16.5\ \text{m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(12\ \text{kg})(15.0\ \text{m/s})^2\\ &= 284\ \text{J}.\end{aligned}$$

Esto es muy diferente de lo que el observador que viaja en la plataforma midió para el cambio en la energía cinética ($\Delta K = 13.5$ J).

Antes de que comencemos a dudar de la aplicabilidad del teorema trabajo-energía, hagamos rápidamente un cálculo del trabajo efectuado sobre la caja de acuerdo con el observador situado en tierra. El desplazamiento total de la caja depende también del marco de referencia del observador, como lo muestra la figura 12*b*. Para el observador parado en tierra, la fuerza se ejerce no sobre una distancia de 2.4 m sino sobre una distancia mayor, de 50.4 m, porque a una velocidad de 15.0 m/s el tren viaja 48.0 m en los 3.2 s ($= \Delta v/a$ o $\Delta v'/a'$, (siendo la aceleración y el tiempo invariantes en la mecánica newtoniana) que toma mover la caja; el desplazamiento total $\Delta x'$ de la caja en este tiempo es de 48.0 m + 2.4 m = 50.4 m. Por otra parte, la fuerza es una invariante; para el observador situado en tierra, $F' = F = 5.63$ N. El observador situado en tierra concluye que el trabajo es

$$W' = F'\,\Delta x' = (5.63\ \text{N})(50.4\ \text{m}) = 284\ \text{J}.$$

El teorema trabajo-energía se cumple también ¡para el observador situado en tierra! Aun cuando los dos observadores usen valores numéricos diferentes para los desplazamientos y las velocidades, y no estén de acuerdo con los valores numéricos que asignan al trabajo y a la energía cinética, cada uno, sin embargo, concluye que existe la misma igualdad numérica entre el trabajo y el cambio en la energía cinética.

En física, una ley ***invariante*** es aquella que tiene la misma *forma* en todos los marcos de referencia inerciales. Un buen ejemplo es el teorema trabajo-energía, como lo hemos visto. En el marco de referencia inercial del observador *S*, quien midió el trabajo W y el cambio en la energía cinética ΔK para un proceso particular, el teorema trabajo-energía es $W = \Delta K$. El observador S', quien estaba en movimiento a velocidad constante en relación a S, midió el trabajo W' y el cambio en la energía cinética $\Delta K'$ para el mismo proceso; en tanto que, en general, será cierto que $W \neq W'$ y que $\Delta K \neq K'$, el observador S' determina que $W' = \Delta K'$. Para otro observador inercial S'', $W'' = \Delta K''$. Para cualquier observador en un marco inercial, el teorema trabajo-energía tiene la misma forma. Los principios de invariancia nos dan a menudo la clave del funcionamiento del mundo natural; nos señalan que una relación particular no es un mero accidente de la posición preferida del observador sino que, en su lugar, es la consecuencia de cierta simetría profunda subyacente en la naturaleza.

Problema muestra 9 Dos aeroplanos idénticos, cada uno de masa m, vuelan juntos sobre aguas tranquilas a una velocidad constante v medida con relación al agua. El aeroplano 1 aterriza sobre un portaviones, que está en reposo en el agua. Un gancho que porta el aeroplano engancha un cable en la cubierta de aterrizaje, y el cable ejerce una fuerza similar a la de un resorte que lleva al aeroplano al reposo. Un observador sobre el portaaviones mide una distancia d entre el punto en que el aeroplano enganchó al cable y el punto en que finalmente llegó al reposo. Despreciando las demás fuerzas sobre el aeroplano (la fricción, por ejemplo), discutir la validez del teorema trabajo-energía desde el punto de vista (*a*) de un observador que viaje en el portaaviones y (*b*) del piloto del aeroplano 2, que continúa volando a la velocidad inicial y en la dirección inicial.

Solución (*a*) El observador que va en el portaviones mide un cambio en la energía cinética de

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Es razonable que este observador, que ve al aeroplano llegar al reposo, mida un cambio *negativo* en la energía cinética.

La fuerza externa a modo de resorte actúa sobre el aeroplano por el cable; si suponemos una constante de fuerza efectiva k, esta fuerza trabaja sobre el aeroplano, y puede expresarse como:

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Este trabajo es claramente negativo para este observador, porque la fuerza del resorte y el desplazamiento están en direcciones opuestas al aterrizar el aeroplano. Si despreciamos las demás fuerzas (incluyendo la fricción), podemos ciertamente tratar al aeroplano como una partícula, y el teorema trabajo-energía sería válido para el observador. En particular, en este marco de referencia, tanto W como K son negativos.

(*b*) De acuerdo con el piloto del aeroplano 2, la energía cinética inicial del aeroplano 1 es cero: los aeroplanos están volando uno al lado del otro, y no existe movimiento relativo entre ellos. Cuando el aeroplano 1 llega finalmente al reposo sobre el portaviones, su velocidad con relación al aeroplano 2 es $-v$, y su cambio en la energía cinética es, por lo tanto,

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = +\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Puede parecer sorprendente que el piloto del aeroplano 2 observe un *aumento* en la energía cinética del aeroplano 1. Sin embargo, en el marco de referencia del aeroplano 2, el aeroplano 1 estaba inicialmente en reposo y finalmente está en movimiento a una velocidad v.

El cable efectúa un trabajo *positivo* en este marco de referencia. Para el piloto del aeroplano 2, la fuerza del resorte está en dirección opuesta a la que el aeroplano 2 está encarando, y el desplazamiento del aeroplano 1 bajo la influencia de esa fuerza está en la misma dirección que la fuerza. En el marco de referencia del aeroplano 2, el teorema trabajo-energía es aplicable, y tanto W como ΔK son positivos.

De este ejemplo concluimos que, tanto el signo del trabajo efectuado por una fuerza dada *como* el signo del cambio en la energía cinética de una partícula dada pueden depender del marco de referencia del observador. A pesar de esta diferencia en la interpretación, sin embargo, ambos observadores estarán de acuerdo en la validez del teorema trabajo-energía. (Véase también la pregunta 22, que considera la interpretación de acuerdo con el piloto del aeroplano 1). ■

7-7 ENERGÍA CINÉTICA A ALTAS VELOCIDADES* *(Opcional)*

En la sección anterior usamos la fórmula galileo-newtoniana para transformar velocidades desde un marco de referencia a otro: $v = v' + u$. Derivamos esta fórmula en la sección 4-6 y dijimos que no funciona a altas velocidades, en las que debemos usar la relación correcta partiendo de la relatividad especial, ecuación 46 del capítulo 4. Si usted ha llegado a sospechar ahora que la fórmula $\frac{1}{2}mv^2$ de la energía cinética tampoco sirve para altas velocidades, está en lo correcto.

La fórmula general de la energía cinética, aplicable a cualquier velocidad, es

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right]. \tag{25}$$

(En el capítulo 21 derivaremos este resultado.) ¿Significa esto que $\frac{1}{2}mv^2$ no es correcta? Ciertamente no lo es para los casos de alta velocidad, pero no es demasiado difícil demostrar que la ecuación 25 se reduce realmente a $\frac{1}{2}mv^2$ para una velocidad baja. Para ello necesitamos el desarrollo binomial de las expresiones de la forma $(1 + x)^p$:

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

donde $n!$ (léase "factorial de n") significa el producto de todos los enteros desde 1 hasta n. Así pues, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

El desarrollo binomial es un resultado útil, pero es de particular valor cuando x es pequeña comparada con 1. Por ejemplo, supongamos que x es de alrededor de 0.01. Entonces el segundo término del desarrollo, px, es (si p no es demasiado grande) mucho más pequeño que el primer término, el tercer término es aún más pequeño que el segundo, y así sucesivamente. Al tornarse los términos más y más pequeños, podemos decidir que en ciertos cálculos es importante mantener sólo unos cuantos términos y despreciar el resto.

En la ecuación 25 para la energía cinética, los corchetes contienen el factor $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Este factor puede ser desarrollado por la fórmula del binomio, siendo $x = -v^2/c^2$ y $p = -\frac{1}{2}$. Tratemos de mantener tres términos en el desarrollo:

* Esta sección puede omitirse o diferirse hasta que se estudie la relatividad en el capítulo 21.

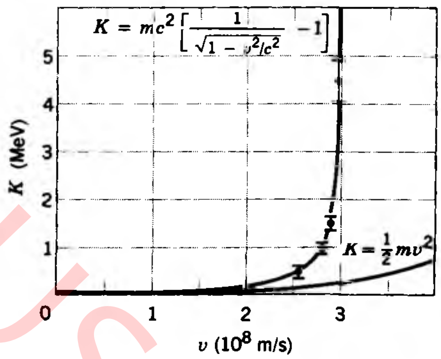


Figura 13 Una comparación de las fórmulas clásica y relativista de la energía cinética de los electrones. A bajas velocidades, las dos fórmulas dan resultados idénticos, pero a altas velocidades cercanas a la de la luz los datos muestran claramente que la fórmula relativista es correcta.

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2$$

$$= 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}. \qquad (26)$$

Ahora sustituimos la ecuación 26 en la ecuación 25:

$$K \approx mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}-1\right] = \tfrac{1}{2}mv^2\left[1+\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right]. \qquad (27)$$

Podemos ver que el error fraccionario que cometemos al usar $\frac{1}{2}mv^2$ es de alrededor de $\frac{3}{4}(v^2/c^2)$. Incluso a una velocidad del 1% de la velocidad de la luz, este error es menos de 1 parte en 10^4. En nuestras velocidades de laboratorio ordinarias, las cuales rara vez van más allá de 10^{-6} de la velocidad de la luz, el error en el uso de $\frac{1}{2}mv^2$ es mucho más pequeño que la precisión de nuestra posibilidad de medir energías, y $\frac{1}{2}mv^2$ es una excelente aproximación.

Si la ecuación 25 es siempre correcta, lo mismo para altas velocidades que para bajas, ¿por qué no usarla siempre y dejar de lado que $\frac{1}{2}mv^2$? Aquí nos enfrentamos a un problema práctico. Tratemos de usar la ecuación 25 cuando $v = 300$ m/s, realmente una velocidad respetable bajo cualquier aspecto (aproximadamente la velocidad del sonido en el aire), pero mucho menor que la velocidad de la luz ($v/c = 10^{-6}$ y $v^2/c^2 = 10^{-12}$). Usando una calculadora de bolsillo para evaluar el término entre corchetes de la ecuación 25, probablemente hallaremos un resultado de cero. La razón es que la calculadora usa sólo 8 ó 9 dígitos y, por lo tanto, obtenemos "exactamente" 1 cuando se trata de evaluar $1 - 10^{-12}$. En la práctica usamos $\frac{1}{2}mv^2$ porque es lo suficientemente precisa y mucho más fácil de calcular cuando v es alrededor del 1% menor que la velocidad de la luz, y nos reservamos la ecuación 25 para las velocidades más elevadas.

La figura 13 muestra los resultados de una prueba experimental de la ecuación 25. Esta prueba fue realizada mediante la aceleración de electrones a una energía cinética conocida y midiendo luego su velocidad, tomándoles el tiempo dentro de una distancia conocida. Obviamente, los datos favorecen el resultado de la teoría de la relatividad para altas velocidades. Nótese también que las dos curvas no pueden ser distinguidas para una velocidad baja.

Problema muestra 10 El acelerador Tevatron del Fermi National Accelerator Laboratory acelera protones a una energía cinética de alrededor de 1 TeV (= 10^{12} eV, donde 1 eV = 1.6×10^{-19} J). ¿Cuál es la velocidad de un protón de 1-TeV? La masa de un protón es de 1.67×10^{-27} kg.

Solución En unidades SI, la energía cinética de un protón de 1 TeV es de

$$K = 1\ \text{TeV} = 1.6 \times 10^{-7}\ \text{J}.$$

Entonces, usando la ecuación 25,

$$1.6 \times 10^{-7}\ \text{J} = (1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right].$$

Resolviendo, hallamos que

$$v/c = 0.99999956,$$

de modo que v, aunque menor que c, es muy cercana a ella, difiriendo de c en sólo 132 m/s. ■

PREGUNTAS

1. ¿Puede usted pensar en otras palabras, como trabajo, cuyos significados en términos coloquiales son a menudo diferentes de sus significados científicos?
2. Explique por qué nos cansamos físicamente cuando empujamos contra una pared, no podemos moverla y, por lo tanto, no efectuamos ningún trabajo sobre la pared.
3. Supongamos que actúan tres fuerzas constantes sobre una partícula al moverse de una posición a otra. Demuestre que el trabajo efectuado sobre la partícula por la resultante de estas tres fuerzas es igual a la suma de los trabajos efectuados por cada una de las tres fuerzas calculadas por separado.
4. El plano inclinado (problema muestra 1) es una "máquina" simple que nos permite efectuar un trabajo con la utilización de una fuerza más pequeña de lo que sería necesario de otro modo. La misma afirmación es aplicable a una

cuña, una palanca, un tornillo, una rueda dentada, y una combinación de poleas (problema 9). Pero lejos de ahorrarnos trabajo, en la práctica, tales máquinas requieren que efectuemos un trabajo ligeramente mayor con ellas que sin ellas. ¿Por qué es así? Por qué empleamos tales máquinas?

5. En una contienda de tirar de una cuerda, un equipo está cediendo lentamente al otro. ¿Qué trabajo se realiza, y por quién?
6. ¿Por qué puede usted con mucha más facilidad ir en bicicleta una milla en terreno plano que correr esa misma distancia? En cada caso, usted transporta su propio peso una milla y, en el primer caso, usted debe también de transportar la bicicleta y, además, hacerlo ¡en mucho menos tiempo! (Véase *The Physics Teacher*, Marzo de 1981, pág. 194).
7. Suponga que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita perfectamente circular. ¿Efectúa el Sol algún trabajo sobre la Tierra?
8. Usted levanta lentamente una bola de boliche (en el juego de bolos) desde el piso y la pone sobre una mesa. Sobre la bola actúan dos fuerzas: su peso, mg, y la fuerza para levantarla, $-mg$. Estas dos fuerzas se cancelan entre sí de modo que parecería que no ha habido trabajo alguno. Por otro lado, usted sabe que ha llevado a cabo algún trabajo. ¿Qué es lo que falla?
9. Usted corta un resorte a la mitad. ¿Cuál es la relación de la constante de fuerza k del resorte original a la de cualquiera de las dos mitades del resorte?
10. Los resortes A y B son idénticos excepto que A es más rígido que B; esto es, $k_A > k_B$. ¿Sobre cuál resorte se realiza más trabajo si son estirados (*a*) en la misma cantidad y (*b*) por la misma fuerza?
11. ¿Depende la energía cinética de la dirección del movimiento? ¿Puede ser negativa? ¿Depende su valor del marco de referencia del observador?
12. Al levantar un libro desde el piso y ponerlo sobre una mesa, usted efectúa un trabajo. Sin embargo, la energía cinética del libro no cambia. ¿Existe aquí una violación al teorema trabajo-energía? Explique por qué o por qué no.
13. ¿Se cumple el teorema trabajo-energía si actúa la fricción sobre un objeto? Explique su respuesta.
14. El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética. ¿Puede suceder que el trabajo efectuado por una de las fuerzas componentes de manera aislada sea mayor que el cambio en la energía cinética? De ser así, dé ejemplos.
15. ¿Por qué un automóvil rebasa tan fácilmente a un camión cuando ambos viajan cuesta arriba? El camión es más pesado, por supuesto, pero su motor es más potente en proporción (¿lo es?). ¿Qué consideraciones intervienen al elegir la potencia de diseño de un motor de camión y de un motor de automóvil?
16. ¿Depende la potencia necesaria para elevar una caja sobre una plataforma de la rapidez con que sea levantada?
17. Usted levanta algunos libros en la biblioteca desde un estante más bajo a otro más elevado en un tiempo Δt. ¿Depende el trabajo que usted efectuó de (*a*) la masa de los libros, (*b*) el peso de los libros, (*c*) la altura del estante superior sobre el piso, (*d*) el tiempo Δt, y (*e*) si usted levanta los libros lateralmente o directamente hacia arriba?
18. El récord mundial del salto con pértiga es de alrededor 5.5 m. ¿Podría éste ser superado a, digamos, 8 m usando una pértiga suficientemente larga? Si no, ¿por qué no? ¿Qué altura puede conseguir un atleta?
19. Oímos con frecuencia hablar de la "crisis de energía". ¿Sería más preciso hablar de "crisis de potencia"?
20. ¿Depende el trabajo efectuado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula del marco de referencia (inercial) del observador? ¿Depende entonces del cambio en la energía cinética? De ser así, dé ejemplos.
21. Un hombre que rema corriente arriba en un bote está en reposo respecto a la orilla. (*a*) ¿Está efectuando algún trabajo? (*b*) Si deja de remar y se mueve hacia abajo con la corriente, se efectúa algún trabajo sobre él?
22. Consideremos el teorema trabajo-energía desde el marco de referencia del piloto del aeroplano 1 en el problema muestra 9. ¿Falla en este caso el teorema? Explique.
23. Decimos que un electrón de 1 keV es una partícula "clásica", que un electrón de 1 MeV es una partícula "relativista", y que un electrón de 1 GeV es una partícula "extremadamente relativista". ¿Qué significa cada uno de estos términos?

PROBLEMAS

Sección 7-1 Trabajo efectuado por una fuerza constante

1. Para empujar una caja de 52 kg por el suelo, un obrero ejerce una fuerza de 190 N, dirigida 22° abajo de la horizontal. Cuando la caja se ha movido 3.3 m, ¿cuánto trabajo se ha realizado sobre la caja por (*a*) el obrero, (*b*) la fuerza de la gravedad, y (*c*) la fuerza normal del piso sobre la caja?
2. Un objeto de 106 kg se mueve inicialmente en línea recta a una velocidad de 51.3 m/s. (*a*) Si se le detiene con una deceleración de 1.97 m/s^2, ¿qué fuerza se requiere, qué distancia recorre el objeto, y cuánto trabajo ejerció la fuerza? (*b*) Responda las mismas preguntas si la deceleración del objeto fuera de 4.82 m/s^2.
3. Para empujar un caja de 25 kg por un plano inclinado a 27°, un obrero ejerce una fuerza de 120 N, paralela al plano. Cuando la caja se ha deslizado 3.6 m, ¿cuánto trabajo se efectuó sobre la caja por (*a*) el obrero, (*b*) la fuerza de gravedad, y (*c*) la fuerza normal del plano inclinado?

4. Pueden emplearse campos eléctricos para liberar electrones de los metales. Para liberar un electrón del tungsteno, el campo eléctrico debe efectuar un trabajo de 4.5 eV. Supongamos que la distancia sobre la que actúa el campo eléctrico es de 3.4 nm. Calcule la fuerza mínima que debe ejercer el campo sobre el electrón removido.

5. Se usa una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa M a una distancia d con una aceleración constante hacia abajo de $g/4$. (*a*) Halle el trabajo efectuado por la cuerda sobre el bloque. (*b*) Halle el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad.

6. Un obrero empuja un bloque de 58.7 lb (m = 26.6 kg) una distancia de 31.3 ft (= 9.54 m) a lo largo del suelo con una velocidad constante y una fuerza dirigida a 32.0° abajo de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es de 0.21. ¿Qué tanto trabajo efectuó el obrero sobre el bloque?

7. Un baúl de 52.3 kg se empuja hacia arriba 5.95 m a una velocidad constante por un plano inclinado a 28.0°; actúa sobre él una fuerza horizontal constante. El coeficiente de fricción cinética entre el baúl y el plano inclinado es de 0.19. Calcule el trabajo efectuado por (*a*) la fuerza aplicada y (*b*) la fuerza de gravedad.

8. Un bloque de hielo de 47.2 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado de 1.62 m de longitud y 0.902 m de altura. Un obrero lo empuja paralelo al plano inclinado de modo que se deslice hacia abajo a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado es de 0.110. Halle (*a*) la fuerza ejercida por el obrero, (*b*) el trabajo efectuado por el obrero sobre el bloque de hielo, y (*c*) el trabajo efectuado por la gravedad sobre el hielo.

9. La figura 14 muestra un tren de poleas diseñado para facilitar el levantamiento de una carga pesada L. Supongamos que la fricción puede ser despreciada y que las poleas a las cuales está unida la carga pesan un total de 20.0 lb. La carga de 840 lb va a ser elevada 12.0 ft. (*a*) ¿Cuál es la fuerza mínima F aplicada que puede levantar la carga? (*b*) ¿Qué tanto trabajo debe de efectuarse contra la gravedad para levantar la carga de 840 lb a una altura de 12.0 ft? (*c*) ¿A través de qué distancia debe aplicarse la fuerza para levantar la carga de 12.0 ft? (*d*) ¿Cuál es el trabajo que debe efectuar la fuerza F aplicada para cumplir esta tarea?

Sección 7-2 Trabajo efectuado por una fuerza variable: caso unidimensional

10. Un bloque de 5.0 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la figura 15. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza cuando el bloque se mueve desde el origen hasta x = 8.0 m?

11. Un objeto de 10 kg se mueve a lo largo del eje x. En la figura 16 se muestra su aceleración en función de su posición. ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el objeto al moverse desde x = 0 hasta x = 8.0 m?

12. Un resorte tiene una constante de fuerza de 15.0 N/cm. (*a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 7.60 mm desde su posición relajada? (*b*) ¿Cuánto trabajo es necesario para estirar el resorte 7.60 mm más?

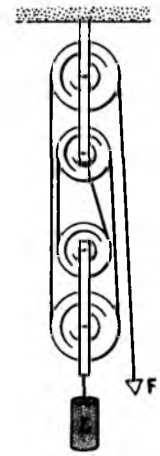


Figura 14 Problema 9.

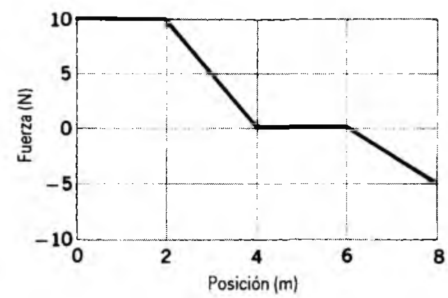


Figura 15 Problema 10.

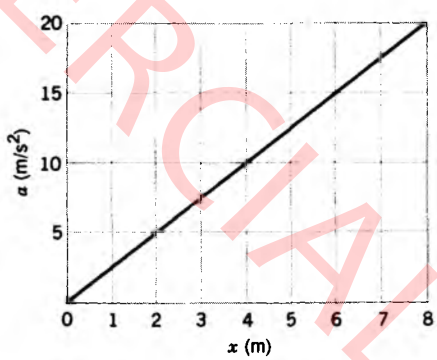


Figura 16 Problema 11.

13. La fuerza ejercida sobre un objeto es $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Halle el trabajo efectuado para mover al objeto desde $x = 0$ hasta $x = 3x_0$ (*a*) trazando una gráfica de $F(x)$ y hallando el área bajo la curva, y (*b*) evaluando la integral analíticamente.

14. (*a*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza que se muestra en la gráfica (Fig. 17) al desplazar una partícula desde x = 1 m hasta x = 3 m. Perfeccione el método para

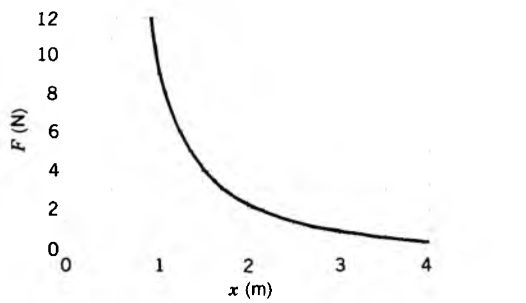


Figura 17 Problema 14.

ver qué tan cerca puede llegar de la respuesta exacta de 6 J. (*b*) La curva está dada analíticamente por $F = A/x^2$, donde $A = 9\ \mathrm{N \cdot m^2}$. Demuestre cómo calcular el trabajo según las reglas de la integración.

15. La figura 18 muestra un resorte con un puntero acoplado, que cuelga al lado de una escala graduada en milímetros. Tres pesos diferentes son colgados, a su vez, del resorte, como se muestra. (*a*) Si se retira del resorte todo el peso, ¿qué marca indicará el puntero en la escala? (*b*) Halle el peso *W*.

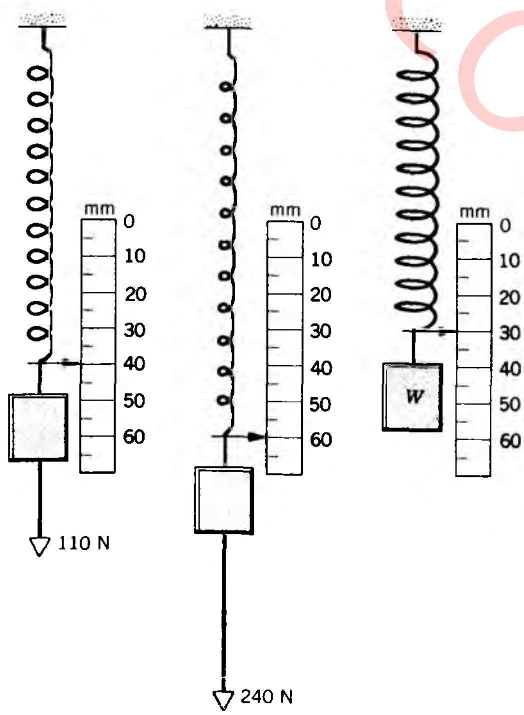


Figura 18 Problema 15.

Sección 7-3 Trabajo efectuado por una fuerza variable: caso bidimensional

16. Por integración a lo largo del arco, demuestre que el trabajo efectuado por la gravedad en el problema muestra 4 es igual a $-mgh$.

17. Un objeto de masa 0.675 kg que está sobre una mesa sin fricción está unido a un cordón que pasa por un orificio hecho en la mesa en el centro del círculo horizontal en el que se mueve el objeto a velocidad constante. (*a*) Si el radio del círculo es de 0.500 m y la velocidad es de 10.0 m/s, calcule la tensión en el cordón. (*b*) Se comprueba que jalar hacia abajo 0.200 m más del cordón a través del orificio, reduciendo por lo tanto el radio del círculo a 0.300 m, tiene el efecto de multiplicar la tensión original en el resorte por 4.63. Calcule el trabajo total efectuado por el cordón sobre el objeto en giro durante la reducción del radio.

Sección 7-4 Energía cinética y el teorema trabajo-energía

18. Calcule las energías cinéticas de los siguientes objetos que se mueven a las siguientes velocidades: (*a*) un jugador de fútbol americano de 110 kg que corre a 8.1 m/s; (*b*) una bala de 4.2 g a 950 m/s; (*c*) el portaviones *Nimitz* de 91,400 tons a 32.0 nudos.

19. Un electrón de conducción en cobre a una temperatura cercana al cero absoluto tiene una energía cinética de 4.2 eV. ¿Cuál es la velocidad del electrón?

20. Un protón (el núcleo de un átomo de hidrógeno) es acelerado en un acelerador lineal. En cada etapa del acelerador el protón es acelerado a lo largo de una línea recta a razón de $3.60 \times 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}$. Si un protón entra en tal etapa moviéndose inicialmente a una velocidad de 2.40×10^7 m/s y la etapa es de una longitud de 3.50 cm, calcule (*a*) su velocidad al final de la etapa y (*b*) la ganancia de energía cinética resultante de la aceleración. La masa del protón es de 1.67×10^{-27} kg. Exprese la energía en electrón-volts.

21. Una fuerza única actúa sobre una partícula con movimiento rectilíneo. En la figura 19 se muestra una gráfica de la velocidad contra el tiempo para la partícula. Halle el signo (positivo o negativo) del trabajo efectuado *por* la fuerza *sobre* la partícula en cada uno de los intervalos *AB*, *BC*, *CD*, y *DE*.

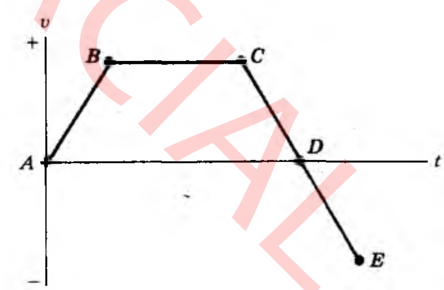


Figura 19 Problema 21.

22. Para viajar a la Luna, un cohete Saturno V de 2.9×10^5 kg, con una cápsula espacial Apolo adosada, debe alcanzar una velocidad de escape de 11.2 km/s (≈ 25,000 mi/h) cerca de la superficie de la Tierra. ¿Cuánta energía debe contener el combustible? ¿Necesitaría realmente el sistema tanta energía; necesitaría más, o menos? ¿Por qué?

23. ¿Desde qué altura debería caer un automóvil de 2800 lb para ganar la energía cinética equivalente a la que tendría viajando a razón de 55 mi/h? ¿Depende la respuesta del peso del automóvil?

24. Un automóvil de 1110 kg viaja a 46 km/h por una carretera llana. Se accionan los frenos para disminuir 51 kJ de energía cinética. (*a*) ¿Cuál es la velocidad final del automóvil? (*b*) ¿Cuánta más cantidad de energía cinética deberá eliminarse por los frenos para detener el automóvil?

25. Un jardinero arroja una bola de béisbol a una velocidad inicial de 120 ft/s (=36.6 m/s). Precisamente antes de que un jugador dentro del cuadro recoja la bola al mismo nivel, su velocidad se reduce a 110 ft/s (= 33.5 m/s). ¿Cuánta energía se ha desperdiciado a causa del arrastre del aire? El peso de una bola de béisbol es de 9.0 oz. (m = 255 g).

26. La Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol en un año. ¿Cuánto trabajo tendría que efectuarse sobre la Tierra para llevarla al reposo en relación con el Sol? Véase el apéndice C para los datos numéricos y desprecie la rotación de la Tierra sobre su propio eje.

27. Un hombre que corre tiene la mitad de la energía cinética de un niño de la mitad de la masa que él posee. El hombre aumenta su velocidad a razón de 1.00 m/s y luego tiene la misma energía cinética que el niño. ¿Cuáles eran las velocidades originales del hombre y del niño?

28. Un proyectil de 0.550 kg se dispara desde el borde de un acantilado con una energía cinética inicial de 1550 J y en su punto más alto está a 140 m sobre el punto de disparo. (*a*) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad? (*b*) ¿Cuál era la componente vertical de su velocidad en el momento inmediato después del disparo? (*c*) En un instante durante su trayecto se encuentra que la componente vertical de su velocidad es de 65.0 m/s. En ese momento, ¿a qué distancia está arriba o abajo del punto de disparo?

29. Un cometa que tiene una masa de 8.38×10^{11} kg choca con la Tierra a una velocidad relativa de 30 km/s. (*a*) Calcule la energía cinética del cometa en "megatones de TNT"; la detonación de 1 millón de toneladas de TNT libera 4.2×10^{15} J de energía. (*b*) El diámetro del cráter formado por una gran explosión es proporcional a un tercio de la potencia de la energía explosiva liberada, y un megatón de TNT produce un cráter de alrededor 1 km de diámetro. ¿Cuál será el diámetro del cráter producido por el impacto del cometa? (En el pasado, los efectos atmosféricos producidos por los impactos de los cometas pueden haber sido la causa de extinciones masivas de muchas especies de animales y plantas; muchos creen que los dinosaurios se extinguieron a causa de este mecanismo.)

30. Un disco de 125 g es arrojado desde una altura de 1.06 m sobre el suelo a una velocidad de 12.3 m/s. Cuando ha alcanzado una altura de 2.32 m, su velocidad es de 9.57 m/s. (*a*) ¿Cuánto trabajo efectuó la gravedad sobre el disco? (*b*) ¿Cuánta energía cinética se perdió debido a la resistencia del aire? Desprecie el giro del disco.

31. Una pelota pierde el 15.0% de su energía cinética cuando rebota en una acera de concreto. ¿A qué velocidad deberá usted de arrojarla hacia abajo verticalmente desde una altura de 12.4 m para que rebote a esa misma altura? Desprecie la resistencia del aire.

32. Una pelota de hule soltada desde una altura de exactamente 6 ft (ft) rebota (choca contra el suelo) varias veces, perdiendo 10% de su energía cinética en cada rebote. ¿Al cabo de cuántos rebotes la pelota no se elevará a más de 3 ft?

33. Un bloque de 263 g se deja caer sobre un resorte vertical con una constante de fuerza k = 2.52 N/cm (Fig. 20). El bloque se pega al resorte, y el resorte se comprime 11.8 cm antes de alcanzar el reposo momentáneamente. Mientras el resorte está siendo comprimido, ¿cuánto trabajo efectúan (*a*) la fuerza de gravedad y (*b*) el resorte? (*c*) ¿Cuál era la velocidad del bloque inmediatamente antes de que alcanzara al resorte? (*d*) Si esta velocidad inicial del bloque se duplica, ¿cuál es la compresión máxima del resorte? Desprecie la fricción.

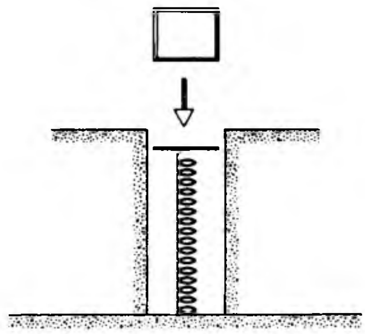


Figura 20 Problema 33.

34. Demuestre que la ecuación 19 se cumple para el caso del movimiento en dos o en tres dimensiones, extendiendo la demostración para el movimiento unidimensional.

Sección 7-5 Potencia

35. Una mujer de 57 kg asciende por un tramo de escalones que tiene una pendiente de 4.5 m en 3.5 s. ¿Qué potencia promedio deberá emplear?

36. En un teleférico para esquiadores con cabida para 100 personas, una máquina eleva a los 100 pasajeros, que promedian 667 N de peso, a una altura de 152 m en 55.0 s, a velocidad constante. Halle la potencia suministrada por el motor, suponiendo que no existan pérdidas por fricción.

37. Un nadador se mueve en el agua a una velocidad de 0.22 m/s. La fuerza de arrastre que se opone a este movimiento es de 110 N. ¿Cuál es la potencia desarrollada por el nadador?

38. Al comenzar una carrera, un corredor de 68.2 kg corre los primeros 7.04 m en 1.60 s, comenzando desde el reposo y acelerando uniformemente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del corredor al final de 1.60 s? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del corredor? (*c*) ¿Qué potencia promedio genera el corredor durante el intervalo de 1.60 s?

39. Un caballo jala de una carreta con una fuerza de 42.0 lb (libras) a un ángulo de 27.0° con la horizontal y se mueve con una velocidad de 6.20 mi/h. (*a*) ¿Cuánto trabajo efectúa el caballo en 12.0 min? Halle la potencia desarrollada por el caballo, en hp, por supuesto.

40. Un fabricante de autos reporta que la potencia máxima desarrollada por el motor de un automóvil de 1230 kg de masa es de 92.4 kW. Halle el tiempo mínimo en el cual el automóvil podría acelerar desde el reposo hasta 29.1 m/s (= 65 mi/h). Se encontró en una prueba que el tiempo para hacerlo fue de 12.3 s. Explique la diferencia en estos tiempos.

41. El zepelín *Hindenburg* (véase la Fig. 21) podía hacer una travesía a razón de 77 nudos con motores a un rendimiento de 4800 hp. Calcule la fuerza de arrastre, en newtons, sobre la nave aérea a esta velocidad.

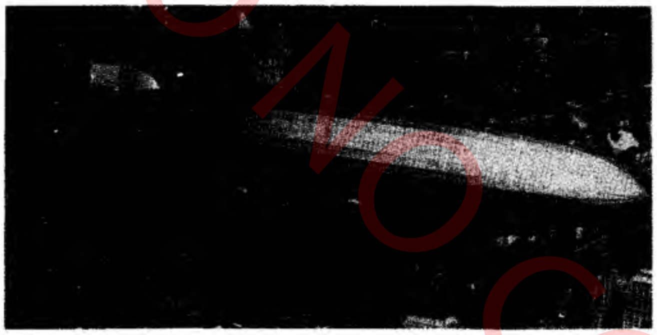


Figura 21 Problema 41.

42. El trasatlántico de lujo *Queen Elizabeth 2* (véase la Fig. 22) es propulsado por una nueva planta de fuerza diesel-eléctrica, la cual reemplazó a las máquinas de vapor originales. La potencia de salida máxima es de 92 MW a una velocidad de crucero de 32.5 nudos. ¿Qué fuerza ejercen las hélices sobre el agua a esta máxima velocidad alcanzable?

43. ¿Cuánta potencia, en hp, debe ser desarrollada por el motor de un automóvil de 1600 kg que avanza a 26 m/s (= 94 km/h) en una carretera llana si las fuerzas de resistencia totalizan 720 N?

44. En una cascada de 96.3 m de altura pasan 73,800 m^3 de agua por minuto. Suponiendo que el 58.0% de la energía cinética ganada por el agua al caer sea convertida a energía eléctrica por un generador hidroeléctrico, calcule la potencia de salida del generador. (La densidad del agua es de 1000 kg/m^3.)

45. Supongamos que su automóvil desarrolla un promedio de 30 mi/gal (millas por galón) de gasolina. (*a*) ¿A qué distancia puede viajar con un consumo de 1 kW · h? (*b*) Si usted conduce a razón de 55 mi/h, ¿a qué razón realiza usted el gasto de energía? El calor de combustión de la gasolina es de 140 MJ/gal.

46. El motor de una bomba de agua está especificado a 6.6 hp. ¿Desde qué profundidad puede ser bombeada el agua del pozo a razón de 220 gal/min?

47. Un bloque de granito de 1380 kg es arrastrado hacia arriba por un plano inclinado a una velocidad constante de

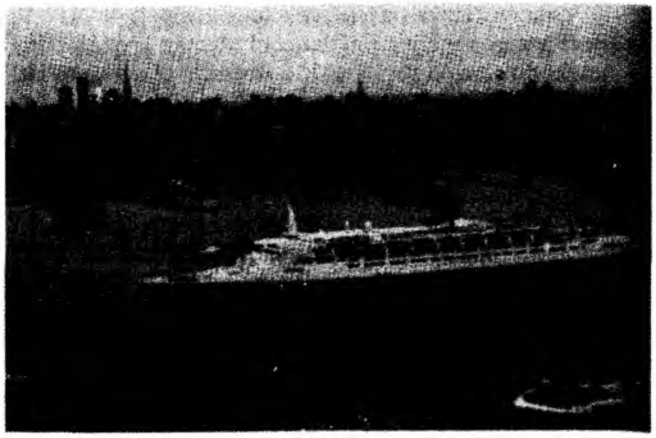


Figura 22 Problema 42.

1.34 m/s por un malacate de vapor (Fig. 23). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es de 0.41. ¿Qué potencia debe suministrar el malacate?

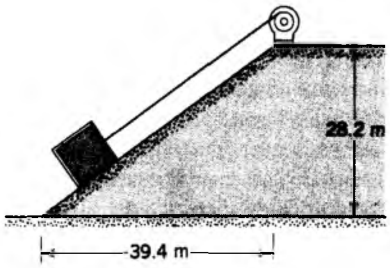


Figura 23 Problema 47.

48. Un automóvil de 3700 lb (m = 1680 kg) parte del reposo en una carretera llana y logra una velocidad de 45 mi/h (= 72 km/h) en 33 s. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética del automóvil al final de los 33 s? (*b*) ¿Cuál es la potencia neta promedio desarrollada por el automóvil durante el intervalo de 33 s? (*c*) ¿Cuál es la potencia instantánea al final del intervalo de 33 s suponiendo que la aceleración fue constante?

49. Un objeto de masa m acelera uniformemente desde el reposo hasta una velocidad v_f en el tiempo t_f. (*a*) Demuestre que el trabajo efectuado sobre el objeto como una función del tiempo t, en términos de v_f y de t_f, es

$$W = \tfrac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2.$$

(*b*) Como una función del tiempo t, ¿cuál es la potencia instantánea dada al objeto?

50. Una fuerza actúa sobre una partícula de 2.80 kg de modo tal que la posición de la partícula como función del tiempo esté dada por $x = 3t - 4t^2 + t^3$, donde x está en metros y t en segundos. (*a*) Halle el trabajo efectuado por la fuerza durante los primeros 4.0 s. (*b*)¿A qué razón instantánea efectúa la fuerza trabajo sobre la partícula en el instante en que $t = 3.0$ s?

51. Un elevador de carga totalmente lleno tiene una masa total de 1220 kg. Debe descender 54.5 m en 43.0 s. El contrapeso tiene una masa de 1380 kg. Halle la potencia de salida, en hp, del motor del elevador. Desprecie el trabajo requerido para arrancar y detener al elevador; esto es, suponga que viaja a velocidad constante.

52. Demuestre que la velocidad v alcanzada por un automóvil de masa m que es impulsado con una potencia constante P está dada por

$$v = \left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3},$$

donde x es la distancia recorrida desde el reposo.

53. (*a*) Demuestre que la potencia desarrollada por un avión que viaja a velocidad constante v en un vuelo a nivel es proporcional a v^3. Suponga que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv^2$. (*b*) ¿En qué factor deberán aumentar su potencia los motores para aumentar la velocidad en el aire en 25.0%?

54. ¿Qué potencia desarrolla una máquina de esmerilar cuya muela tiene un radio de 20.7 cm y gira a 2.53 rev/s cuando la herramienta que va a ser afilada es sostenida contra la muela con una fuerza de 180 N? El coeficiente de fricción entre la herramienta y la muela es de 0.32.

55. Una escalera mecánica une a un piso con otro situado a 8.20 m sobre aquél. La escalera tiene 13.3 m de longitud y se mueve a todo lo largo a 62.0 cm/s. (*a*) ¿Qué potencia debe tener su motor si se requiere que transporte a un máximo de 100 personas por minuto, de 75.0 kg de masa promedio? (*b*) Un hombre de 83.5 kg asciende caminando por la escalera en 9.50 s. ¿Cuánto trabajo efectúa el motor sobre él? (*c*) Si este hombre se da la vuelta a la mitad del trayecto y desciende otra vez por la escalera de modo tal que se quede en el mismo lugar del espacio, ¿efectuaría el motor algún trabajo sobre él? De ser así, ¿qué potencia libera para ese propósito? (*d*) ¿Existe alguna manera de que el hombre pudiera caminar por la escalera sin consumir potencia del motor?

56. Una locomotora de ferrocarril, de 1.5 MW, acelera a un tren desde una velocidad de 10 hasta 25 m/s en 6.0 min, a plena potencia. (*a*) Despreciando la fricción, calcule la masa del tren. (*b*) Halle la velocidad del tren en función del tiempo en segundos durante el intervalo. (*c*) Halle la fuerza que acelera al tren en función del tiempo durante el intervalo. (*d*) Halle la distancia recorrida por el tren durante el intervalo.

57. La resistencia al movimiento de un automóvil depende de la fricción con la carretera, la cual es casi independiente de su velocidad v, y del arrastre aerodinámico, el cual es proporcional a v^2. Para un automóvil en particular, de 12,000 N, la fuerza resistente total F está dada por $F = 300 + 1.8v^2$, donde F está en newtons y v está en metros por segundo. Calcule la potencia necesaria para que el motor acelere al automóvil a 0.92 m/s^2 cuando la velocidad es de 80 km/h.

58. Un *regulador* consta de dos esferas de 200 g unidas por varillas ligeras, pero rígidas, de 10.0 cm, a un eje vertical giratorio. Las varillas están embisagradas de modo que las esferas puedan oscilar desde el eje al girar con él. Sin embargo, cuando el ángulo θ es de 45.0°, las esferas tocan la pared del cilindro dentro del que está girando el regulador (véase la Fig. 24). (*a*) ¿Cuál es la razón mínima de rotación, en revoluciones por minuto, necesaria para que las esferas toquen la pared? (*b*) Si el coeficiente de fricción cinética entre las esferas y la pared es de 0.35, ¿qué potencia se disipa como resultado de que las esferas frotan contra la pared cuando el mecanismo está girando a 300 rev/min?

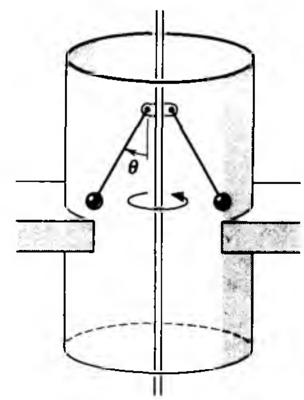


Figura 24 Problema 58.

Sección 7-6 Marcos de referencia

59. Considérense dos observadores, uno cuyo marco se halla unido al suelo y el otro en un marco unido, digamos, a un tren que se mueve a velocidad uniforme **u** respecto al suelo. Cada uno de ellos observa que una partícula, inicialmente en reposo respecto al tren, es acelerada por una fuerza constante aplicada a él durante un tiempo t en dirección hacia adelante. (*a*) Demuestre que, para cada observador, el trabajo efectuado por la fuerza es igual a la ganancia en energía cinética de la partícula, pero que un observador mide que las cantidades son $\frac{1}{2}ma^2t^2$, mientras que el otro observador las mide como $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. Aquí a es la aceleración común de la partícula de masa m. (*b*) Explique las diferencias en el trabajo efectuado por la misma fuerza en función de las diferentes distancias a través de las que los observadores miden la fuerza que actúa durante el tiempo t. Explique las diferentes energías cinéticas finales medidas por cada observador en función del trabajo que la partícula podría hacer al ser llevada al reposo con relación al marco de cada observador.

Sección 7-7 Energía cinética a altas velocidades

60. Calcule la energía cinética de un protón que se mueve a una velocidad de 2.94×10^8 m/s. Dé la respuesta tanto en joules como en MeV.

61. Un electrón se mueve a una velocidad tal que podría rodear a la Tierra en el ecuador en 1.0 s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad en función de la velocidad de la luz? (*b*) ¿Cuál es su energía cinética en electrón-volts? (*c*) ¿Qué porcentaje de error se tendría al usar la fórmula clásica para calcular la energía cinética?

62. Un electrón tiene una velocidad de $0.999c$. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética? (*b*) Si su velocidad aumenta en 0.05%, ¿en qué porcentaje aumentaría su energía cinética?

63. El teorema trabajo-energía tiene validez para las partículas a cualquier velocidad. ¿Cuánto trabajo debe ser efectuado para aumentar la velocidad de un electrón desde el reposo (*a*) hasta $0.50c$, (*b*) hasta $0.99c$, y (*c*) hasta $0.999c$?