2 ÁLGEBRA DE MATRICES

En este capítulo estudiaremos la base del lenguaje del álgebra lineal: las matrices. Ellas son arreglos rectangulares de números reales (aunque puede permitirse el uso de otros conjuntos numéricos, como el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos), que guardan información de distintos objetos estudiados en álgebra lineal. Ya hemos visto por ejemplo que un sistema de ecuaciones puede representarse en términos de su matriz asociada y su matriz ampliada, pero además, esas matrices guardan mucha información sobre el sistema, ya que la relación entre sus rangos determina si dicho sistema es compatible. Las matrices también aparecerán en otras áreas de estudio del álgebra lineal, como la geometría en el espacio y en la teoría de espacios vectoriales y transformaciones lineales.

2.1. El conjunto de matrices

Si bien ya sabemos qué es una matriz, volvamos a declararlo en la siguiente definición, y así aprovechar de introducir parte de la notación que estaremos utilizando a futuro.

Definición 2.1

Una **matriz** de m filas y n columnas es un arreglo rectangular de números reales (o complejos), representado como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A cada elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (o $a_{ij} \in \mathbb{C}$) se le denomina **entrada** o **coeficiente** (i, j) de la matriz A, donde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Es decir, i y j determinan la posición de a_{ij} dentro de la matriz, i indica la fila y j la columna en las cuales a_{ij} está ubicado. El producto simbólico $m \times n$ se conoce como **orden**, **tamaño** o **dimensión** de la matriz A.

De manera más compacta, las matrices también pueden denotarse como

$$A = ((a_{ij}))_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m} \text{ o } A = ((a_{ij})) \text{ o } A = (a_{ij}).$$

Nos decantaremos por la última notación, cuando ya el número de filas y columnas estén sobreentendidos.

El conjunto de **todas** las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$ será denotado por

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Por el momento, trabajaremos únicamente con matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Antes de definir operaciones entre matrices, debemos saber primero cuándo dos matrices son iguales. Se define en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la relación de igualdad

$$A = B,$$

donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como

$$A = B \text{ si } a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\} \text{ y } j \in \{1, \dots, n\}.$$

En otras palabras, dos matrices (de la misma dimensión) son iguales si coinciden coeficiente a coeficiente.

Ejemplo 11.

1. Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \pi & 4 & -\sqrt{2} \\ 8 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$
no son iguales, por tener tamaños diferentes.

2. Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
son diferentes aunque sus coeficientes tomen todos los valores en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.

3. Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 20 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 20 \\ -5 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$
no son iguales, porque no coinciden en el coeficiente $(2, 1)$ (a pesar de sí hacerlo en el resto de los coeficientes).

4. A las matrices de la forma
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}_{1\times n}$$
se les conoce como matrices **fila**, mientras que a aquéllas de la forma
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$
se le conocen como matrices **columna**.

2.2. Suma de matrices

Comenzaremos estudiando la primera operación entre matrices, la suma.

Definición 2.2

Dadas dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define su **suma** como la matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}).$$

Es decir, para sumar dos matrices (del mismo tamaño), debemos sumar coeficiente-a-coeficiente.

Ejemplo 12. Al sumar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+11 & -1-7 & 8+1 \\ 1+5 & 0-2 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -8 & 9 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

La suma de matrices toma dos elementos en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y le asocia un elemento en ese mismo conjunto. Esto se conoce como *operación binaria*, y suele denotarse como

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A + B. \end{aligned}$$

Probemos en el siguiente resultado las propiedades de la suma, las cuales se heredan de las propiedades homónimas en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.1: propiedades de la suma

- **[propiedad conmutativa]:** Para todas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que
$$A + B = B + A.$$
- **[propiedad asociativa]:** Para todas $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$
- **[existencia del elemento neutro]:** Existe una única matriz $0_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A + 0_{m\times n} = A$$
para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- **[existencia del elemento opuesto]:** Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, existe una única $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que
$$A + (-A) = 0_{m\times n}.$$

Idea de la demostración: En todas las afirmaciones se debe demostrar una igualdad entre matrices, por lo que se debe aplicar la definición de la relación de igualdad en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Por otro lado, en las demostraciones donde se pide probar la unicidad de un elemento x que satisface cierta propiedad P, se asume la existencia de otro elemento x' que también satisface P, y se demuestra que $x = x'$.

Demostración: Demostramos las propiedades en el orden que se enuncian.

- Consideremos $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$. Luego, como la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa, se tiene

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A.$$

- Consideremos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (C_{ij})$. Luego, como la suma en $\mathbb{R}$ es asociativa, se tiene

$$(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = A + (B + C).$$

- Primero veamos que existe tal $0_{m\times n}$. Definimos la matriz

$$0_{m\times n} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$

  es decir, $0_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego, por la propiedad del elemento neutro en $\mathbb{R}$, se tiene para cualquier $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ que

$$A + 0_{m\times n} = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A.$$

  Ahora probemos la unicidad de $0_{m\times n}$. Supongamos que existe $0' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A + 0' = A$$

  para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Haciendo $A = 0_{m\times n}$ (se toma una A particular) en la igualdad anterior, se tiene

$$0_{m\times n} + 0' = 0_{m\times n}.$$

  Por otro lado, de la parte anterior de la demostración se tiene que

$$0' = 0' + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + 0'.$$

  Conectando las dos igualdades anteriores, se tiene que $0' = 0_{m\times n}$. Por lo tanto, el elemento neutro $0_{m\times n}$ de la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es único.

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Definimos $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ como

$$-A = (-a_{ij}) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

  Luego,

$$A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0_{ij}) = 0_{m\times n},$$

  debido a la propiedad del opuesto de la suma en $\mathbb{R}$. Probemos que tal matriz $-A$ es la única que satisface la propiedad $A + (-A) = 0_{m\times n}$. Supongamos entonces que existe $B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + B = 0_{m\times n}(\mathbb{R})$. Por las propiedades anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} A + B &= 0_{m\times n} \\ -A + (A + B) &= -A + 0_{m\times n} \\ (-A + A) + B &= -A \\ (A + (-A)) + B &= -A \\ 0_{m\times n} + B &= -A \\ B &= -A. \end{aligned}$$

□

2.3. Producto de una matriz por un escalar

Otra de las operaciones básicas aplicables a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el producto por un escalar.

Definición 2.3

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el **producto** de A por el escalar α como la matriz $\alpha \cdot A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$\alpha \cdot A := (\alpha \cdot a_{ij}).$$

Es decir, para multiplicar A por α, debemos multiplicar todos los coeficientes de A por α. Para simplificar, esta operación también se denota por

$$\alpha\, A.$$

La operación anterior es lo que en matemática se conoce como una *acción* de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha\, A. \end{aligned}$$

Ejemplo 13.

1. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 4 \\ -22 & 24 \end{pmatrix}$ y $\alpha = 1/2$, se tiene

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 4 \\ -22 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,2 & \frac{1}{2}\,(-4) \\ \frac{1}{2}\,6 & \frac{1}{2}\,4 \\ \frac{1}{2}\,(-22) & \frac{1}{2}\,24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ -11 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $I_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz **cuadrada** de n filas y n columnas dada por

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Es decir,

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

A esta matriz se le conoce como **matriz identidad**.

A toda matriz de la forma $\alpha\, I_{n\times n}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se le conoce como **matriz escalar**.

Enunciemos a continuación algunas de las propiedades del producto por un escalar. La demostración de las mismas se deja como ejercicio.

Proposición 2.2: propiedades del producto por un escalar

Las siguientes afirmaciones valen para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- **[propiedad asociativa]:**
$$(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta\, A).$$
- **[elemento neutro]:**
$$1\, A = A.$$
- **[propiedad distributiva respecto a la suma de escalares]:**
$$(\alpha + \beta)\, A = \alpha\, A + \beta\, A.$$
- **[propiedad distributiva respecto a la suma de matrices]:**
$$\alpha\, (A + B) = \alpha\, A + \alpha\, B.$$

2.4. Producto de matrices

Esta sección está dedicada a lo que probablemente sea la operación más importante entre matrices. Un problema con esta operación es que *a priori* no tiene una definición intuitiva (a diferencia de la suma y del producto por un escalar), y por ende pensamos que es conveniente dar un par de motivaciones geométricas antes de dar la definición precisa de qué significa multiplicar dos matrices A y B para obtener una nueva matriz $A \cdot B$. Previo a presentar estas motivaciones convengamos en que para multiplicar A y B, deberá cumplirse que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B, es decir, $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathcal{R})$, con m y n arbitrarios. Entonces, el producto o multiplicación de matrices será una operación de la forma

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B. \end{aligned}$$

Ejemplo 14 (Motivación 1 - caso $m = 1$ y $p = 1$)**.** Supongamos que tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

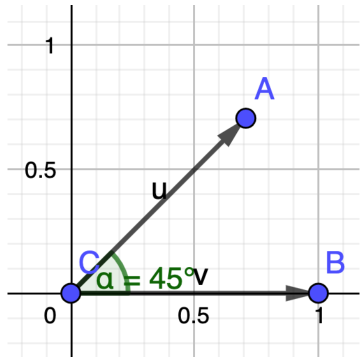
Multiplicar estas dos matrices corresponde a hacer la operación

$$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Entonces, $A \cdot B = (1/\sqrt{2})$. Esta operación también podemos representarla como:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} {\color{red}1} \\ {\color{blue}0} \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} {\color{red}\frac{1}{\sqrt{2}}} & {\color{blue}\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {\color{red}\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot {\color{red}1} + {\color{blue}\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot {\color{blue}0} \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Geométricamente, podemos pensar en A y B como vectores en el plano $\mathbb{R}^2$, y notar que $A \cdot B$ es justamente el coseno del ángulo que se forma entre A y B (en este caso 45 grados sexagesimales o, equivalentemente, $\pi/4$ radianes):



De manera más general, si tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{p1} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{1k} \cdot b_{k1} \right),$$

aunque por supuesto para $p > 3$ se pierde la representación geométrica de $A \cdot B$ como el coseno de un ángulo.

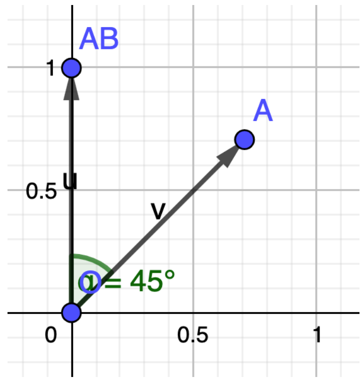
Ejemplo 15 (Motivación 2 - caso $m = 2$ y $p = 1$)**.** Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

En este caso, la idea de operar $A \cdot B$ viene del ejemplo anterior. Concretamente, se calcula $F_1(A) \cdot B$ y $F_2(A) \cdot B$, donde $F_i(A)$ denota la i-ésima fila de A:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Geométricamente, en este caso multiplicar A por B representa rotar al vector B alrededor del origen en un ángulo de $\pi/4$ radianes:



De manera más general, si tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{p1} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots + a_{2p} \cdot b_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \cdot b_{k1} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k} \cdot b_{k1} \end{pmatrix},$$

aunque por supuesto para $p > 3$ se pierde la representación geométrica de $A \cdot B$ como la rotación de B alrededor del origen a razón de cierto ángulo.

Una cosa que podemos notar de los ejemplos anteriores es que, para determinar el término ij de $A \cdot B$, necesitamos la fila i de A, la columna j de B y operar $F_i(A) \cdot C_j(B)$ como en el Ejemplo 14. Pasamos entonces a estar listos para definir formalmente el producto entre matrices.

Definición 2.4

Sean

$$A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R}) \text{ y } B \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$$

dos matrices con las dimensiones indicadas. Se define el **producto** o **multiplicación** entre A y B como la matriz

$$A \cdot B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

(o simplemente AB) cuyo coeficiente ij (con $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$) está dado por

$$(A \cdot B)_{ij} = F_i(A) \cdot C_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Es decir,

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n} = B \\
\hline
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{m\times n} = A\cdot B.
\end{array}
$$

Ejemplo 16. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. Luego,

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 3 & 1\cdot 6 + 0\cdot 8 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) \\ -2\cdot 0 + 3\cdot 3 & -2\cdot 6 + 3\cdot 8 & -2\cdot 1 + 3\cdot(-2) \\ 5\cdot 0 + 4\cdot 3 & 5\cdot 6 + 4\cdot 8 & 5\cdot 1 + 4\cdot(-2) \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 0\cdot 6 + 1\cdot 8 & 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} = AB.
\end{array}
$$

Observación 2.1

El producto de matrices **no es conmutativo**. Para empezar, aunque AB esté definido, puede darse que BA no, porque el número de columnas de B puede no coincidir con el número de filas de A. Esto ocurre por ejemplo con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde se puede calcular AB, pero BA no.
Incluso en el caso en el cual tanto AB como BA estén definidos, no necesariamente va a ocurrir que $AB = BA$. Considere por ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede notar que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ pero } BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si bien la conmutatividad no se cumple para el producto de matrices, hay propiedades que sí lo harán, las cuales probaremos a continuación.

Proposición 2.3: propiedades del producto de matrices

- **[propiedad asociativa]:** Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$, entonces
$$(AB)C = A(BC).$$
- **[propiedad distributiva 1]:** Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, entonces
$$(A+B)C = AC + BC.$$
- **[propiedad distributiva 2]:** Si $A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, entonces
$$C(A+B) = CA + CB.$$
- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces
$$I_{m\times m}\, A = A \ \text{ y } \ A\, I_{n\times n} = A.$$

Idea de la demostración: En todas las afirmaciones se debe demostrar una igualdad entre matrices, por lo que se debe aplicar la definición de la relación de igualdad en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Demostración:

- Propiedad asociativa: Probemos que $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$.
$$\begin{aligned}[(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{q}(AB)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}(a_{il}b_{lk})c_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p} a_{il}(b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{il}(b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{lk}c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}(BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij}.\end{aligned}$$
- Propiedad distributiva 1: Probemos que $[(A+B)C]_{ij} = [AC+BC)]_{ij}$.
$$\begin{aligned}[(A+B)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}(A+B)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = [AC+BC]_{ij}.\end{aligned}$$
- Propiedad distributiva 2: La demostración es análoga a lo que se hizo para probar la propiedad distributiva 1.
- Solamente demostraremos $I_{m\times m}\, A = A$, ya que la igualdad $A\, I_{n\times n} = A$ se sigue de manera análoga. Debemos verificar que $[I_{m\times m}\, A]_{ij} = a_{ij}$.
$$[I_{m\times m}\, A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(I_{m\times m})_{ik}a_{kj} = (I_{m\times m})_{ii}a_{ij} = 1\cdot a_{ij} = a_{ij}.$$

Tenga en cuenta que $(I_{m\times m})_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$.

$\square$

Observación 2.2

Una aplicación del producto de matrices es poder representar un sistema de ecuaciones lineales mediante una notación más simple. En efecto, sea

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones lineales. Podemos notar que los números que aparecen del lado izquierdo de las igualdades corresponden a las entradas de la matriz producto AX, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \text{ y } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Luego, si denotamos $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$, entonces (S) es la **ecuación matricial** $AX = b$.

2.5. Traspuesta de una matriz

La última operación con matrices que vamos a estudiar corresponde a la transposición. Se trata de un concepto que permite definir ciertos tipos de simetría asociados a una matriz, que a su vez pueden arrojar mucha información sobre dicha matriz. Esto último será tema de discusión en capítulos posteriores. Informalmente hablando, la transposición “refleja” una matriz respecto a su diagonal. Formalmente, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.5

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se define la **traspuesta** de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (note que se invierte la dimensión de A) cuyo coeficiente ji viene dado por

$$(A^t)_{ji} = a_{ij}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ejemplo 17. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, tenemos que $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

De manera más visual, tenemos $\begin{pmatrix} 2 & {\color{red}4} & {\color{red}1} \\ {\color{blue}3} & 0 & {\color{red}-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\circlearrowleft]{(-)^t} \begin{pmatrix} 2 & {\color{blue}3} \\ {\color{red}4} & 0 \\ {\color{red}1} & {\color{red}-1} \end{pmatrix}$.

Proposición 2.4: propiedades de la transposición

Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualesquiera matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **[preservación de la suma de matrices]:** $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- **[preservación del producto por un escalar]:** $(\alpha\, A)^t = \alpha\, A^t$.
- **[involución]:** $(A^t)^t = A$.

Para el caso en el cual $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, se cumple:

- **[inversión del orden del producto]:**

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Idea de la demostración: En todas las afirmaciones se debe demostrar una igualdad entre matrices, por lo que se debe aplicar la definición de la relación de igualdad en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Demostración: Para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tenemos que

$$[(A + B)^t]_{ji} = (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (A^t)_{ji} + (B^t)_{ji}.$$

De manera análoga, se puede probar que $[(\alpha\, A)^t]_{ji} = \alpha[A^t]_{ji}$ y $[(A^t)^t]_{ij} = a_{ij}$.

Ahora supongamos que $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Luego,

$$[B^t A^t]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} (B^t)_{jk}(A^t)_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = (AB)_{ij} = [(AB)^t]_{ji}.$$

□

2.6. Matrices invertibles

Supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones lineales (S) con n incógnitas, escrito (ver Observación 2.6) como una ecuación matricial

$$AX = b.$$

Hallar una solución de (S) consiste en encontrar una matriz columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ que satisfaga esta ecuación matricial.

Para el caso en el cual $n = 1$, es bastante claro el proceder. Si A (en este caso un número real) vale cero, concluimos que la ecuación (numérica) $AX = b$ no tiene solución para $b \neq 0$, o que tiene infinitas soluciones (todos los número reales) para $b = 0$. Ahora, si $A \neq 0$, entonces existe un número real A^{-1} tal que $A^{-1}A = 1$. Luego, hacemos el procedimiento

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}b \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}b \\ 1\,X &= A^{-1}b \\ X &= A^{-1}b \end{aligned}$$

lo que informalmente llamamos "pasar A dividiendo al otro lado". Por lo tanto, $X = A^{-1}b$ es la solución a la ecuación numérica en este caso.

¿Qué pasa si $n > 1$? ¿Qué significa en este caso que exista una matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A = I_{n\times n}$? La siguiente definición da respuesta a esto.

Definición 2.6

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice **invertible** si existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\,B = I_{n\times n} \;\text{ y }\; B\,A = I_{n\times n}.$$

A pesar de tener el concepto anterior, no es apropiado hablar de "división de matrices". En efecto, si tenemos dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde B es invertible, una notación del tipo A/B es inconveniente, ya que A/B puede interpretarse (si hacemos la analogía con la división en $\mathbb{R}$) como $A/B = A\,B^{-1}$ o como $A/B = B^{-1}\,A$. Por otro lado, sabemos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que A/B tendría un significado ambiguo.

Observación 2.3

Respecto a la definición anterior:

1. En principio, se deben verificar ambas igualdades $A\,B = I_{n\times n}$ y $B\,A = I_{n\times n}$ ya que el producto de matrices no es conmutativo. Sin embargo, por un resultado que enunciaremos posteriormente, basta solamente con verificar una de estas dos igualdades.

2. La matriz B es única, y se conoce como la **inversa** de A, denotada por $B = A^{-1}$.

   En efecto, supongamos que existe otra matriz $B' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A\,B' = I_{n\times n}$ y $B'\,A = I_{n\times n}$. Luego, al multiplicar la primera igualdad por B, y usando las propiedades asociativa del producto y del producto por la identidad, nos queda

$$\begin{aligned} (B\,A)\,B' &= B \\ I_{n\times n}\,B' &= B \\ B' &= B. \end{aligned}$$

Ejemplo 18.

1. Toma matriz escalar $\alpha\, I_{n\times n}$ es invertible para $\alpha \neq 0$, y su inversa es
$$(\alpha\, I_{n\times n})^{-1} = \alpha^{-1} I_{n\times n}.$$
En particular, la matriz identidad es invertible, y su inversa es ella misma.

2. Una matriz diagonal
$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$
es invertible si, y sólo si, $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{n-1\,n-1}, d_{nn} \neq 0$. En tal caso, se tiene
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1\,n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

3. La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 1/125 & -1/25 & 1/5 \end{pmatrix}$.

   Como ejercicio, verifique que $A^{-1}\, A = I_{3\times 3}$ y $A\, A^{-1} = I_{3\times 3}$. Más adelante, veremos métodos para determinar cuándo una matriz A es invertible y a su vez hallar A^{-1}.

4. La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible.

   Como mencionamos en el ejemplo anterior, más adelante definiremos métodos para poder notar esto de forma eficaz. Por el momento, tenemos pocas herramientas. Algo que podemos hacer es usar el método de **demostración por reducción al absurdo**, es decir, suponer que A sí es invertible y llegar a una contradicción.

   Entonces, supongamos que existe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego,
$$\begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Tenemos en particular que $2a+2c = 1$ y $a+c = 0$, de donde se sigue que $0 = 1$, lo cual claramente es una contradicción. Por lo tanto, A no es invertible.

Proposición 2.5: propiedades de las matrices invertibles

Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualesquiera matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

- **[involución]:** Si A es invertible, entonces A^{-1} también lo es. Más aún, $(A^{-1})^{-1} = A$.
- **[inversión del orden del producto]:** A y B son invertibles si, y sólo si, $A\,B$ lo es. En caso de cumplirse cualquiera de estas afirmaciones equivalentes, se tiene que $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.
- **[conmutatividad con la transposición]:** A es invertible si, y sólo si, A^t lo es. En caso de cumplirse cualquiera de estas afirmaciones equivalentes, se tiene que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Idea de la demostración: Note que muchas de las afirmaciones consisten en construir una nueva matriz invertible a partir de matrices invertibles dadas. En cada afirmación se enuncia quién debería ser la inversa de la nueva matriz invertible construida. La idea general es la siguiente: para probar que C es invertible, se propone una candidata a inversa, digamos D, y luego verificamos que $C\,D = I_{n\times n}$ y $D\,C = I_{n\times n}$. Entonces, por la unicidad de la inversa, se concluye que $D = C^{-1}$. Por ejemplo, para probar que A^{-1} es invertible, se propone como candidata a inversa de A^{-1} a la propia matriz A.

Tenga en cuenta además que para probar la igualdad $(A^{-1})^{-1} = A$ (o cualquiera de las otras igualdades enunciadas), se sigue una estrategia diferente a la que estamos acostumbrados. En resultados anteriores, se demostraban igualdades entre matrices verificando que había coincidencia coeficiente a coeficiente. Esto no lo podemos hacer para las propiedades de las matrices invertibles, ya que desconocemos (por el momento) quiénes son explícitamente los coeficientes de la inversa de una matriz (es decir, no tenemos una fórmula que nos dice cuánto vale $(A^{-1})_{ij}$ a partir de los coeficientes de A).

Demostración:

- Involución: Partimos con la hipótesis de que A es invertible, por lo que existe su inversa A^{-1}. Ahora, queremos probar que A^{-1} es invertible. Proponemos entonces como candidata a inversa a la matriz A. Vemos que, como A^{-1} es la inversa de A, se cumple que

  $$A^{-1}\,A = I_{n\times n} \text{ y } A\,A^{-1} = I_{n\times n}.$$

  Es decir, existe una matriz (en este caso A) tal que al multiplicarla por A^{-1} a ambos lados se obtiene la identidad. Se tiene entonces que A^{-1} es invertible. Más aún, por la unicidad de la inversa, se tiene que la inversa de A^{-1} es A, es decir, $(A^{-1})^{-1} = A$.

  Si A es invertible, entonces A^{-1} también lo es. Más aún, $(A^{-1})^{-1} = A$.

- Inversión del orden del producto: Tenemos un enunciado del tipo “si, y sólo si”, por lo que se deben probar dos implicaciones:

  - A y B invertibles $\Longrightarrow$ $A\,B$ invertible: Como A y B son invertible, se tiene que existen A^{-1} y B^{-1}. Entonces, podemos considerar el producto $B^{-1}A^{-1}$. Este producto va a ser nuestro candidato a inversa de $A\,B$. En efecto, podemos notar usando las propiedades asociativa del producto y de la identidad que

    $$(B^{-1}A^{-1})\,(A\,B) = B^{-1}\,(A^{-1}\,A)\,B = B^{-1}\,I_{n\times n}\,B = B^{-1}\,B = I_{n\times n}.$$

    De manera análoga, se puede verificar que $(A\,B)(B^{-1}\,A^{-1}) = I_{n\times n}$. Por lo tanto, $A\,B$ es invertible y su inversa viene dada por $B^{-1}A^{-1}$, es decir, $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

- $A\,B$ invertible $\Longrightarrow$ A y B invertibles:

> Vamos a posponer la demostración de esta implicación, ya que de momento no tenemos las herramientas teóricas para encararla. Veremos más adelante dos demostraciones a este hecho, y una más en el siguiente capítulo.

- Conmutatividad con la transposición: Nuevamente, debemos demostrar un enunciado del tipo "si, y sólo si".
  - A invertible $\Longrightarrow$ A^t invertible: Como A es invertible, existe A^{-1}. Luego, proponemos a $(A^{-1})^t$ como candidata a inversa. Usando las propiedades de la transposición, tenemos que

$$(A^{-1})^t A^t = (A\,A^{-1})^t = (I_{n\times n})^t = I_{n\times n}.$$

    De manera análoga, se verifica también que $A^t(A^{-1})^t = I_{n\times n}$. Por lo tanto, A^t es invertible con inversa dada por $(A^{-1})^t$, es decir, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
  - A^t invertible $\Longrightarrow$ A invertible: Por la implicación anterior aplicada a A^t, tenemos que $A = (A^t)^t$ es invertible.

□

2.7. Método para hallar la inversa de una matriz invertible

Hasta el momento hemos estudiado cuáles propiedades cumple la inversa de una matriz, una vez que ya se sabe que dicha inversa existe. Ahora, ¿cómo respondemos a esto último? En las últimas dos secciones de este capítulo, analizaremos dos métodos que dan respuesta a lo anterior. Estos métodos no solamente determinan si cualquier matriz (cuadrada) A es invertible o no, sino que, en caso de serlo, dan explícitamente a A^{-1}.

El primer método que vamos a ver está basado en el método de eliminación de Gauss-Jordan, junto con el siguiente resultado (cuya demostración omitiremos).

Proposición 2.6

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces, A es invertible si, y sólo si, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A\,X = I_{n\times n}$.

En otras palabras, para demostrar que una matriz es invertible, basta solamente con verificar una de las condiciones de la Definición 2.6 una vez que se tiene una candidata a matriz inversa.

Pensemos ahora en cómo hallar X dada A (en caso de ser posible) tal que $AX = I_{n\times n}$. Note que básicamente lo que se nos pide es resolver una ecuación matricial donde A e $I_{n\times n}$ son matrices conocidas, y X es la matriz incógnita. Para un mejor entendimiento, explicaremos este procedimiento mediante un ejemplo, y luego lo enunciaremos de manera general.

Ejemplo 19. Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ es invertible, y en caso de serlo, hallar A^{-1}.

Queremos ver si es posible hallar $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ tal que

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{11}-x_{21}+2x_{31} & x_{12}-x_{22}+2x_{32} & x_{13}-x_{23}+2x_{33} \\ -2x_{11}+4x_{31} & -2x_{12}+4x_{32} & -2x_{13}+4x_{33} \\ -2x_{21}+7x_{31} & -2x_{22}+7x_{32} & -2x_{23}+7x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Vemos que se desprenden así los sistemas de ecuaciones

$$
(S_1)\colon \begin{cases} x_{11}-x_{21}+2x_{31}=1 \\ -2x_{11}+4x_{31}=0 \\ -2x_{21}+7x_{31}=0 \end{cases}, \quad (S_2)\colon \begin{cases} x_{12}-x_{22}+2x_{32}=0 \\ -2x_{12}+4x_{32}=1 \\ -2x_{22}+7x_{32}=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad (S_3)\colon \begin{cases} x_{13}-x_{23}+2x_{33}=0 \\ -2x_{13}+4x_{33}=0 \\ -2x_{23}+7x_{33}=1 \end{cases}.
$$

Equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
(S_1)\colon & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
(S_2)\colon & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
(S_3)\colon & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Entonces, encontrar la matriz X es equivalente ha resolver cada uno de los sistemas anteriores y que a su vez todos tengan solución. Como los tres sistemas tienen la mista matriz asociada A, podemos escalerizar las tres matrices ampliadas simultáneamente en el siguiente arreglo:

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

Procedemos a escalerizar:

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow (F_2+2F_1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow (F_3-F_2)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2]{F_1 \leftarrow (F_1+2F_3)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_2 \leftarrow (F_2+4F_3)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 7/2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow (F_1+F_2)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 7/2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que las soluciones a los sistemas (S_1), (S_2) y (S_3) vienen dadas por

$$
\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

respectivamente, por lo que concluimos que A es invertible y que

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -2 \\ 7 & 7/2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una vez asimilado el ejemplo anterior, podemos explicar el método general para determinar si una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

es invertible de la siguiente manera.

1. Se quiere determinar si es posible resolver la ecuación matricial $AX = I_{n\times n}$.

2. Lo anterior es equivalente a resolver simultáneamente los sistemas de ecuaciones (de n ecuaciones y n incógnitas) $A\,C_j(X) = e_j$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$, donde

$$C_j(X) = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \text{ y } e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   denotan la j-ésima columna de X y de $I_{n\times n}$, respectivamente.[1]

3. La matriz A es invertible si, y sólo si, todos los sistemas $A\,C_j(X) = e_j$ son compatibles. En tal caso, se determina la inversa de A escalerizando la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_{n\times n} \end{array} \right).$$

   Es decir, se aplican transformaciones elementales a **toda** la matriz anterior hasta llegar a la forma escalerizada **reducida** de A, llamémosla R. Si A es invertible, $R = I_{n\times n}$. En este caso, A^{-1} va a ser la matriz resultante de aplicar a $I_{n\times n}$ las mismas transformaciones elementales que se le aplicaron a A.

¿Qué pasa cuando A no es invertible?

En este caso, R no va a ser la identidad, y va a tener al menos una fila de ceros. En la práctica, si al escalerizar $(A \mid I_{n\times n})$ obtenemos una fila de ceros en el bloque correspondiente a A, detenemos el proceso y concluimos que A no es invertible. Esto quedará más claro con el siguiente ejemplo.

[1]Si bien para ser coherentes, habríamos tenido que denotar por $C_j(I_{n\times n})$ a la j-ésima columna de $I_{n\times n}$, la notación e_j es más popular, y será empleada ampliamente cuando lleguemos al capítulo de espacios vectoriales.

Ejemplo 20. Determine si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

es invertible o no. En caso afirmativo, hallar su inversa.

Aplicamos el algoritmo descrito anteriormente:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 11 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \leftarrow (F_4 - F_1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 11 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4 \leftarrow (F_4 - F_3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 11 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4 \leftarrow (F_4 - F_2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 11 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Llegamos dentro del bloque izquierdo a una matriz con una fila de ceros. No hace falta seguir escalerizando para llegar a la forma escalerizada reducida de A, porque en este punto ya sabemos que tendrá al menos una fila de ceros. Concluimos entonces que A no es invertible.

Dentro del bloque de la derecha **nunca** se va a generar una fila de ceros. Esto se debe a que la identidad $I_{n\times n}$ tiene rango n (con $n = 4$ en el ejemplo anterior), y las transformaciones elementales no alteran el rango de una matriz.

Observación 2.4

En este punto podemos dar una prueba de que AB invertible implica A y B invertibles. En efecto, si AB es invertible, por la Proposición 2.7 existe X tal que $(AB)X = I_{n\times n}$. Luego, $A(BX) = I_{n\times n}$, de donde se sigue que A es invertible (usando de nuevo 2.7). Al multiplicar la igualdad anterior por A^{-1}, tenemos que $BX = A^{-1}$, lo cual implica que BX es invertible. Entonces, existe Y tal que $(BX)Y = I_{n\times n}$, es decir, $B(XY) = I_{n\times n}$. Por lo tanto, B es invertible.

2.8. Matrices elementales

En esta última sección describiremos otro método para hallar la inversa de una matriz invertible. En la práctica, este método no será utilizado ya que notacionalmente es más pesado que el anterior. Su importancia radica más en los conceptos y propiedades teóricas que tiene presentes y que serán de gran utilidad en el siguiente capítulo sobre determinantes.

Tal como hicimos en la sección anterior, describiremos el método mediante un ejemplo, para luego plantearlo de forma general. A su vez, haremos en paralelo el método estudiado en la sección anterior.

Ejemplo 21. Sabemos del Ejemplo 18 3. que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

es invertible. Vamos ahora a hallar su inversa paso a paso:

1. $(A \mid I_{3\times 3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A_1 \mid E_1)$:

   Por otro lado, notamos que

$$E_1\, A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A_1.$$

   Es decir, aplicar la transformación elemental $\dfrac{1}{5}F_1$ a A es equivalente a multiplicar A por la matriz E_1.

2. $(A_1 \mid E_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow (F_2 - F_1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A_2 \mid E_2E_1)$:

   Por otro lado, si

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (es decir, } E_2 \text{ resulta de aplicar } F_2 \leftarrow (F_2 - F_1) \text{ a la matriz } I_{3\times 3})$$

   notamos que

$$E_2\, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A_2,$$

$$E_2\, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Entonces, aplicar la transformación elemental $F_2 \leftarrow (F_2 - F_1)$ a A_1 es equivalente a multiplicar A_1 por la matriz E_2.

3. $(A_2 \mid E_2E_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A_3 \mid E_3E_2E_1)$:

Donde

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (es decir, } E_3 \text{ resulta de aplicar } \frac{1}{5}F_2 \text{ a la matriz } I_{3\times 3}\text{).}$$

Notamos que

$$E_3\,A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A_3,$$

$$E_3\,E_2\,E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, aplicar la transformación elemental $\frac{1}{5}F_2$ a A_2 es equivalente a multiplicar A_2 por la matriz E_3.

4. $(A_3 \mid E_3E_2E_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow (F_3 - F_2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1/25 & -1/5 & 1 \end{array}\right) = (A_4 | E_4E_3E_2E_1)$:

Donde

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (es decir, } E_4 \text{ resulta de aplicar } F_3 \leftarrow (F_3 - F_2) \text{ a la matriz } I_{3\times 3}\text{).}$$

Notamos que

$$E_4A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A_4,$$

$$E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 1/25 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, aplicar la transformación elemental $F_3 \leftarrow (F_3 - F_2)$ a A_3 es equivalente a multiplicar A_3 por la matriz E_4.

5. $(A_4 \mid E_4E_3E_2E_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1/25 & -1/5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/25 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/125 & -1/25 & 1/5 \end{array}\right) = (I_{3\times 3} | E_5E_4E_3E_2E_1)$:

Donde

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \text{ (es decir, } E_5 \text{ resulta de aplicar } \frac{1}{5}F_3 \text{ a la matriz } I_{3\times 3}\text{).}$$

Notamos que

$$E_5A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3},$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 1/25 & -1/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 1/125 & -1/25 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, aplicar la transformación elemental $\frac{1}{5}F_3$ a A_4 es equivalente a multiplicar A_4 por la matriz E_5.

De lo anterior, notamos que

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = I_{3\times 3}.$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ 1/125 & -1/25 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Las matrices E_i con $i \in \{1,2,3,4,5\}$ son un tipo especial de matrices que definimos a continuación.

Definición 2.7

Una **matriz elemental** $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es aquélla que se obtiene de aplicar a la identidad $I_{n\times n}$ una transformación elemental. Al haber tres tipos de transformaciones elementales, tendremos tres tipos de matrices elementales:

- Matriz elemental asociada a la transformación elemental $\alpha\, F_i$ (con $\alpha \neq 0$):

$$I_{n\times n} \xrightarrow{\alpha\, F_i} E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matriz elemental asociada a la transformación elemental $F_i \leftrightarrow F_j$:

$$I_{n\times n} \xrightarrow{F_i \leftrightarrow F_j} E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matriz elemental asociada a la transformación elemental $F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j)$:

$$I_{n\times n} \xrightarrow{F_i \leftarrow (F_i + \alpha\, F_j)} E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo anterior vimos que es posible hallar la inversa de una matriz invertible multiplicando dicha matriz por un número finito de matrices elementales. Esta idea puede llevarse también al método de escalerización o eliminación de Gauss-Jordan para hallar la forma escalerizada reducida de cualquier matriz (no necesariamente cuadrada). Formalizamos esto a continuación.

Proposición 2.7

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B la matriz que se obtiene al aplicarle a A una transformación elemental. Sea $E \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ la matriz elemental asociada a dicha transformación. Entonces, $B = E\,A$.

Sabemos que se puede obtener la forma escalerizada reducida de cualquier matriz a partir de un número finito de transformaciones elementales aplicadas a dicha matriz. Este resultado se puede representar en el lenguaje de multipliciación por matrices elementales, aplicando la propisición anterior un número finito de veces.

Corolario 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y R su forma escalerizada reducida. Entonces, existe un número finito de matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $R = E_k \cdots E_1 A$.

$$\left(A \xrightarrow[(E_1)]{\text{transformación elemental \# 1}} A_1 \xrightarrow[(E_2)]{\text{transformación elemental \# 2}} \cdots \xrightarrow[(E_k)]{\text{transformación elemental \# k}} R \right)$$

En cuando a matrices invertibles, resumimos lo aprendido en este capítulo dentro del siguiente resultado.

Teorema 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es invertible.

(b) Existen matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $A = E_1\,E_2 \cdots E_k$.

(c) Existe $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A\,X = I_{n\times n}$.

(d) $\operatorname{rg}(A) = n$.

Escrito en LaTeX por:

Marco A. Pérez, Ph.D.

Profesor Adjunto Grado 3

Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia”

Facultad de Ingeniería - Universidad de la República

Oficina 122

mperez@fing.edu.uy