

Problema 1 (12 puntos)

Se considera un sistema con realimentación unitaria y ganancia de lazo abierto:

$$G_{ol}(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \frac{400}{s(s + 8)}.$$

Determinar $b > 1$ y T de modo que el sistema tenga un margen de fase $\Phi = 50^\circ \pm 10^\circ$.

Problema 2A (8 puntos)

La Figura 1 ilustra un modelo de un barco a motor que se desplaza en un plano horizontal. Denotamos J el momento de inercia con respecto a un eje vertical por el centro de masa G . La orientación del barco con respecto a una dirección fija se denota por ϕ . Sobre el punto P , en la popa, se ejerce una fuerza de módulo F_P constante, debida al flujo generado por la hélice propulsora. El sentido de esta fuerza es comandado por la posición angular, α , del timón con respecto a la dirección longitudinal del barco. El efecto de una corriente de agua se modela mediante una fuerza de módulo F_C constante que actúa sobre el punto C del barco en la dirección dada por el ángulo β . Las distancias $\overline{GP} = d_P$ y $\overline{GC} = d_C$ son conocidas, al igual que las constantes F_P y F_C .

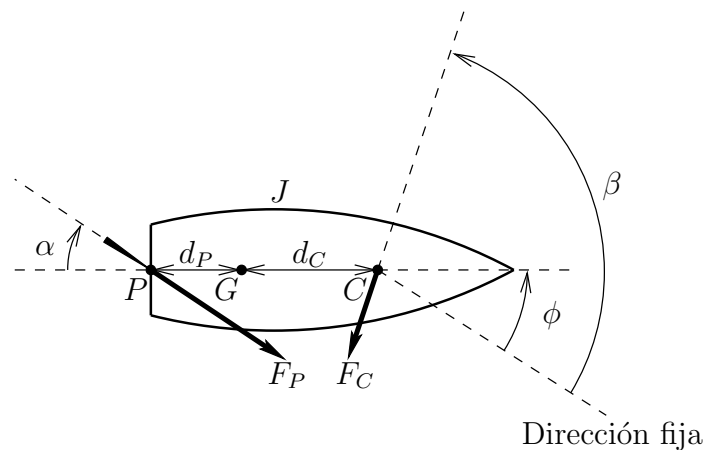


Figura 1: Modelo de un barco a motor.

Halle una representación en variables de estado para el sistema de entrada $[\alpha \ \beta]^T$ y salida ϕ .

Problema 2B (13 puntos)

El diagrama de bloques de la Figura 2 representa el sistema de control automático de la dirección del barco modelado en el problema anterior. Las señales $\tilde{\alpha} \triangleq \alpha - \alpha_0$, $\tilde{\beta} \triangleq \beta - \beta_0$ y $\tilde{\phi} \triangleq \phi - \phi_0$ son los apartamientos respecto a un punto de operación de interés: $(\alpha_0, \beta_0, \phi_0)$. La señal $\tilde{\phi}_r$ es la referencia; $\tilde{e} \triangleq \tilde{\phi}_r - \tilde{\phi}$ es la señal de error de dirección. $K \in \mathbb{R}$ y $c_1, c_2 > 0$ son los parámetros del controlador.

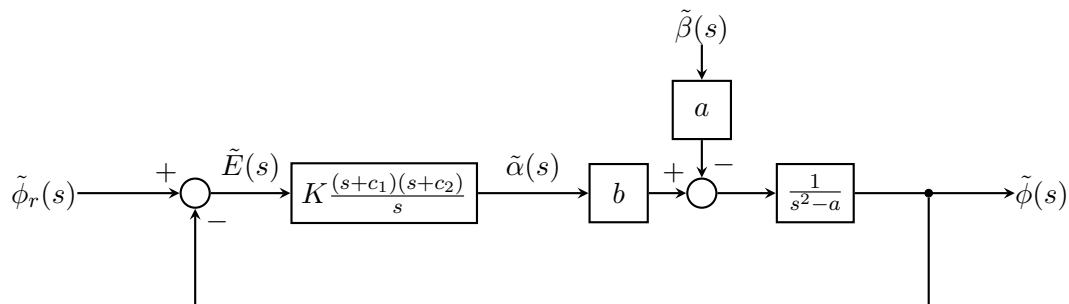


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema de control automático de la dirección del barco.

1. Suponiendo que:

- $a, b > 0$,
- K, c_1 y c_2 , se eligen de forma tal que el sistema de entrada $\tilde{\phi}_r$ y salida $\tilde{\phi}$ sea estable, y
- las señales $\tilde{\phi}_r$ y $\tilde{\beta}$ están definidas de la siguiente manera

$$\tilde{\phi}_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ -\phi_0/20 & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$
$$\tilde{\beta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ -\beta_0/10 & \text{si } t \geq 0; \end{cases}$$

halle $\tilde{e}(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Justifique.

2. Considere el caso particular en que se elige $c_1 = c_2 = \sqrt{a}$. Aplique el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar bajo qué condiciones el sistema de entrada $\tilde{\phi}_r$ y salida $\tilde{\phi}$ es estable. Verifique estas condiciones mediante el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.

Problema 3 (12 puntos)

- Enuncie de forma precisa la definición de Lugar Geométrico de las Raíces, LGR. Particularice para el Lugar Geométrico Positivo, LGP.
- Enuncie las reglas de construcción del LGP.
- Demuestre una de las reglas de construcción del LGP.
- Aplique las reglas enunciadas y obtenga el LGP para el caso de un sistema con realimentación unitaria y ganancia en lazo abierto dado por

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}.$$

Solución del problema 1

Sean:

$$C(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}, \text{ donde } T > 0, b > 1, \text{ y } G(s) = \frac{400}{s(s+8)}.$$

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$G_{OL}(s) = C(s)G(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \frac{400}{s(s+8)},$$

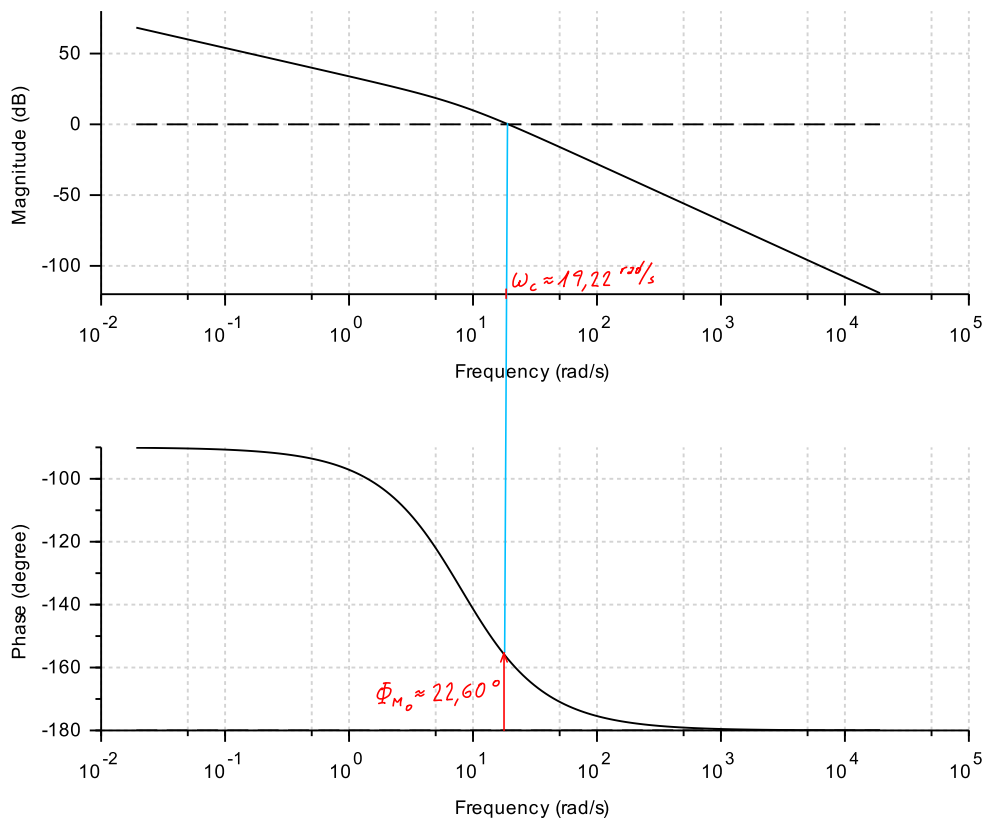
donde $C(s)$ es la función de transferencia del compensador serie a sintonizar y $G(s)$ es la función de transferencia del sistema a compensar.

El margen de fase deseado es $\Phi_{M^*} = 50^\circ$, con una tolerancia de $\pm 10^\circ$.

El compensador es un compensador de adelanto, porque, como $b > 1$, la frecuencia del cero, $\frac{1}{bT}$, es menor que la frecuencia del polo, $\frac{1}{T}$.

Se comienza por determinar el margen de fase original, Φ_{M_o} , i.e., el que resultaría de realimentar $G(s)$ sin compensador. Buscando la frecuencia de cruce de ganancia, se encuentra que para $\omega_c \approx 19,22 \text{ rad/s}$, se tiene $|G(j\omega_c)| \approx 1$. El margen de fase original es:

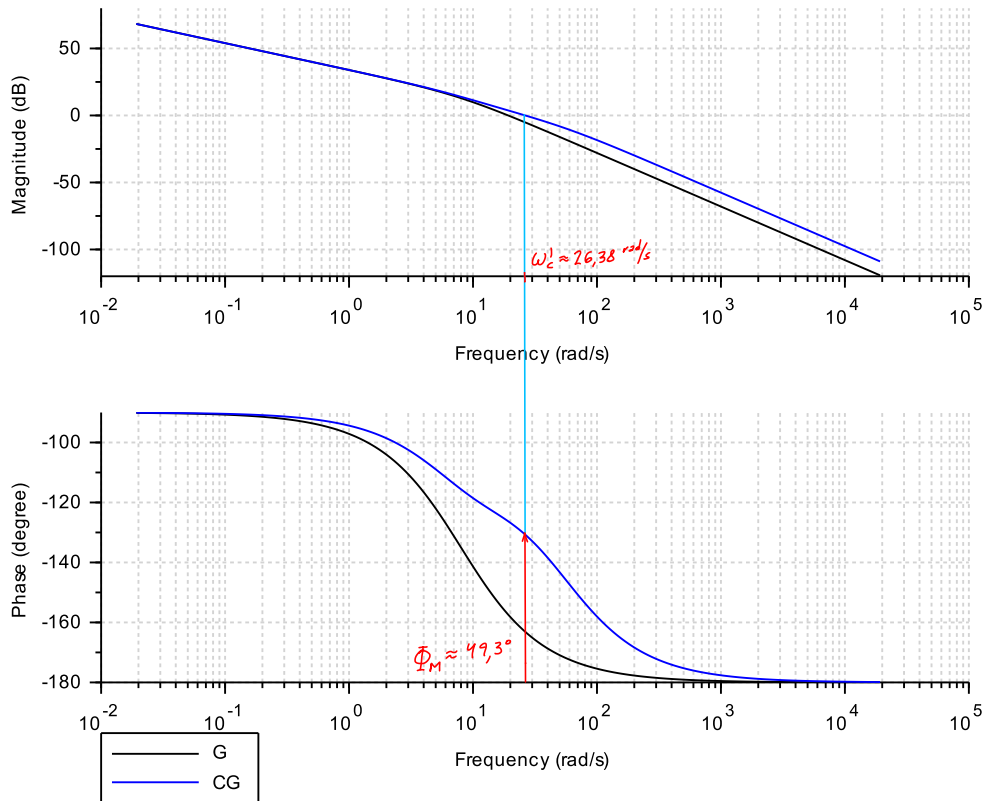
$$\Phi_{M_o} = \angle G(j\omega_c) - (-\pi) = \pi + \angle G(j\omega_c) \approx 22,6^\circ$$



A continuación se enumeran los pasos de una iteración para sintonizar el compensador de adelanto:

1. Se estima la caída de fase: $\Delta\Phi \approx 5^\circ$.
2. A partir de $\Phi_{M^*} = \Phi_{M_o} + \Phi_{\max} - \Delta\Phi$ se calcula: $\Phi_{\max} = \Phi_{M^*} - \Phi_{M_o} + \Delta\Phi = 50^\circ - 22,6^\circ + 5^\circ = 32,4^\circ$.
3. A partir de $\sin \Phi_{\max} = \frac{b-1}{b+1}$, se calcula: $b = \frac{1 + \sin \Phi_{\max}}{1 - \sin \Phi_{\max}} \approx 3,309$.

4. Buscando ω'_c tal que $|G(j\omega'_c)| = \frac{1}{\sqrt{b}} \approx 0,5497 \approx -5,197$ dB, se encuentra: $\omega'_c \approx 26,4$ rad/s.
5. Se impone $\omega'_c = \frac{1}{\sqrt{b}T}$ eligiendo: $T = \frac{1}{\sqrt{b}\omega'_c} \approx 0,0208$ s.
6. Se evalúa el margen de fase resultante: $\Phi_M \approx 49,3^\circ$.



Como el margen de fase resultante está dentro del intervalo de tolerancia, no son necesarias más iteraciones.

Solución del problema 2A

Aplicando segunda ley de Newton para rotación al barco:

$$J\ddot{\phi} = F_P d_P \sin \alpha - F_C d_C \sin (\beta - \phi).$$

Tomando ϕ y $\dot{\phi}$ como variables de estado, se obtiene la siguiente representación:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = f \left(\begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{1}{J} (F_P d_P \sin \alpha - F_C d_C \sin (\beta - \phi)) \end{bmatrix} \\ \phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Solución del problema 2B

Parte 1

Del diagrama de bloques, la función de transferencia del sistema de entrada $\tilde{\phi}_r$ y salida ϕ es:

$$\frac{\tilde{\phi}}{\tilde{\phi}_r}(s) = \frac{K \frac{(s+c_1)(s+c_2)}{s} \frac{b}{s^2-\alpha}}{1 + K \frac{(s+c_1)(s+c_2)}{s} \frac{b}{s^2-\alpha}} = \frac{bK (s+c_1) (s+c_2)}{s (s^2-a) + bK (s+c_1) (s+c_2)}.$$

Se sabe que esta transferencia es estable, así que los ceros de $s(s^2 - a) + bK(s + c_1)(s + c_2)$ tienen parte real negativa.

También del diagrama de bloques, se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(s) &= \frac{1}{1 + K \frac{(s+c_1)(s+c_2)}{s} \frac{b}{s^2-a}} \tilde{\phi}_r(s) + \frac{\frac{a}{s^2-a}}{1 + K \frac{(s+c_1)(s+c_2)}{s} \frac{b}{s^2-a}} \tilde{\beta}(s) \\ &= \frac{s(s^2 - a)}{s(s^2 - a) + bK(s + c_1)(s + c_2)} \tilde{\phi}_r(s) + \frac{as}{s(s^2 - a) + bK(s + c_1)(s + c_2)} \tilde{\beta}(s), \end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi}_r(s) = -\frac{\phi_0}{20} \frac{1}{s}$ y $\tilde{\phi}_r(s) = -\frac{\beta_0}{10} \frac{1}{s}$. Como los ceros de $s(s^2 - a) + bK(s + c_1)(s + c_2)$ tienen parte real negativa, se puede aplicar el teorema del valor final para concluir que:

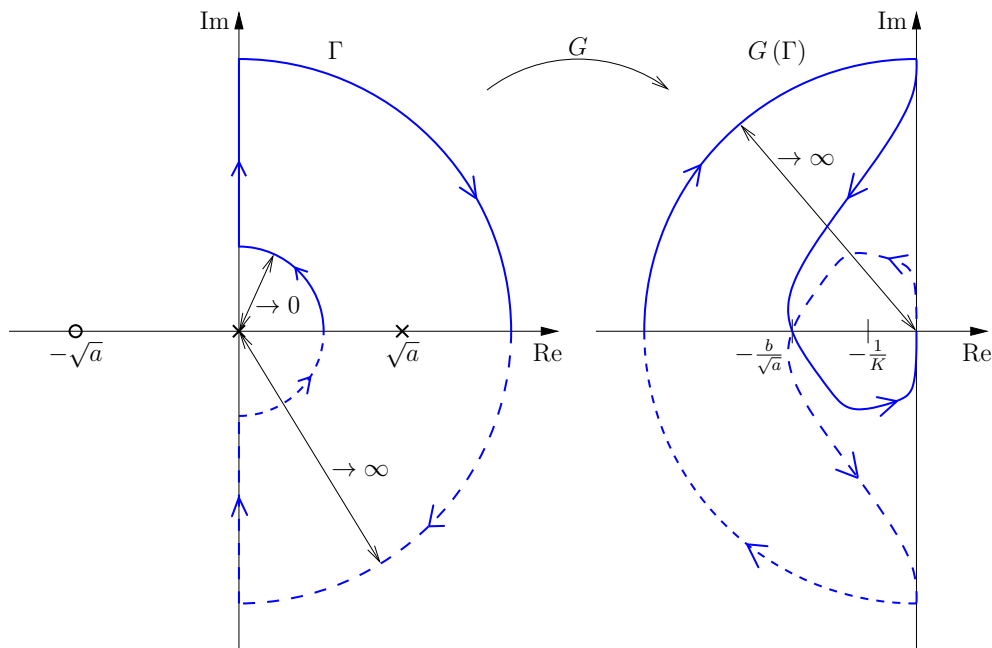
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{E}(s) = 0.$$

Parte 2

Sea

$$G(s) \triangleq \frac{(s + \sqrt{a})^2}{s} \frac{b}{s^2 - a} = \frac{b(s + \sqrt{a})^2}{s(s - \sqrt{a})(s + \sqrt{a})} = \frac{b(s + \sqrt{a})}{s(s - \sqrt{a})}.$$

La transferencia de lazo abierto es $KG(s)$. Los polos del sistema realimentado, de entrada $\tilde{\phi}_r$ y salida $\tilde{\phi}$, son los ceros de $1 + KG(s)$.



Como

$$G(j\omega) = \frac{b(j\omega + \sqrt{a})}{j\omega(j\omega - \sqrt{a})} = -\frac{b(2\sqrt{a}\omega + j(\omega^2 - a))}{\omega(a + \omega^2)},$$

la intersección finita de la traza de Nyquist con el eje real negativo se da para $\omega = \sqrt{a}$. Evaluando en esta frecuencia angular se encuentra el punto de intersección:

$$G(j\sqrt{a}) = -\frac{b}{\sqrt{a}}.$$

El sistema realimentado, de entrada $\tilde{\phi}_r$ y salida $\tilde{\phi}$, es estable si y solo si la traza de Nyquist de $G(s)$ rodea una vez en sentido antihorario el punto $-1/K$. Esto ocurre si y solo si

$$K > \frac{\sqrt{a}}{b}.$$

Los ceros de $1 + KG(s)$ son las raíces de

$$s(s - \sqrt{a}) + Kb(s + \sqrt{a}) = s^2 + (bK - \sqrt{a})s + b\sqrt{a}K$$

El arreglo de Ruth-Hurwitz correspondiente al polinomio anterior es el siguiente:

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & 1 & b\sqrt{a}K \\ s^1 & bK - \sqrt{a} & \\ s^0 & b\sqrt{a}K & \end{array}$$

Del arreglo se deduce que la condición de estabilidad es la misma que se obtuvo mediante el criterio de estabilidad de Nyquist.

Solución del problema 3

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}.$$

Tiene 3 polos en $s = -1, s = j, s = -j$. El lugar parte de esos polos, con $K = 0$ y converge asintóticamente a las tres asíntotas. Sobre el eje real el LGP es a la izq del polo real. El centroide se calcula

$$c = \frac{-1 - j + j}{3} = \frac{-1}{3},$$

y el sistema presenta tres asíntotas de ángulos $\frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}$. El ángulo de partida del polo $s = j$ es

$$\theta = \pi - \angle(i+j) - \angle(j+j) = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

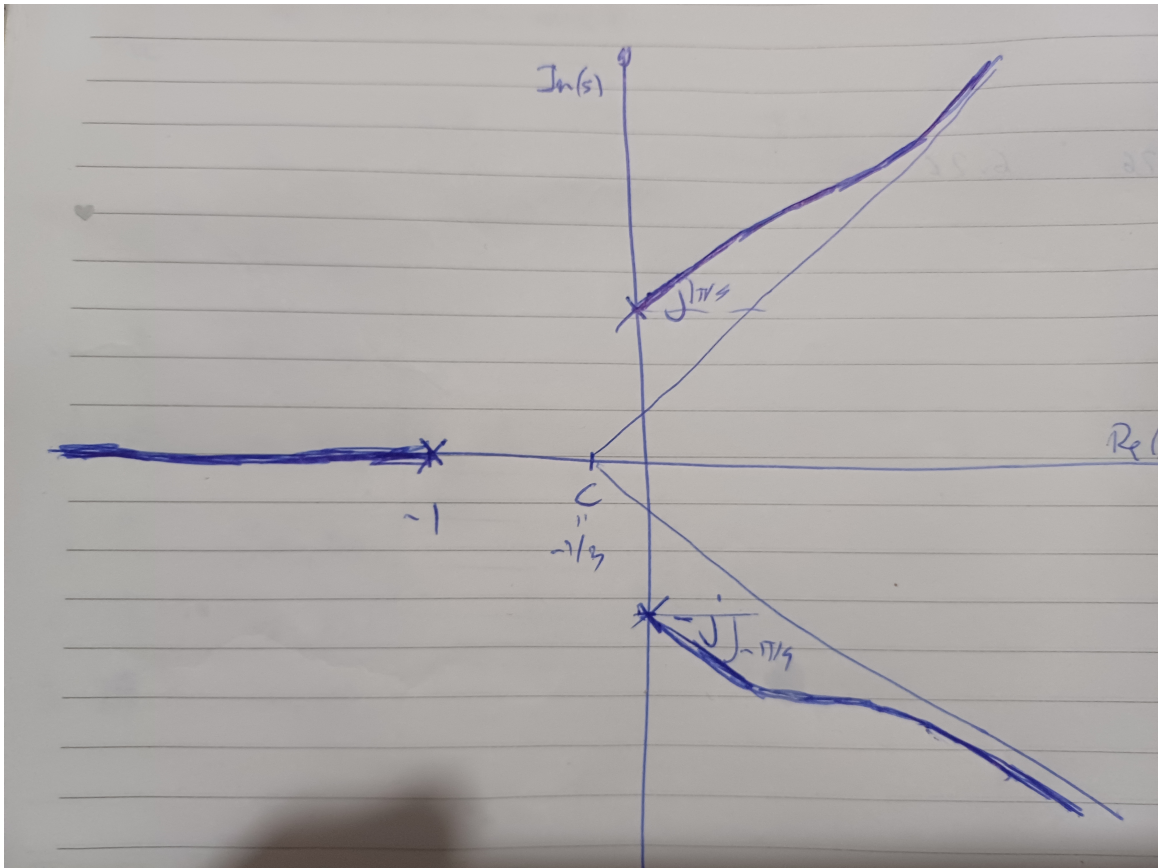
El corte con el eje imaginario sale de resolver Routh Hurwitz del polinomio característico:

$$s^3 + s^2 + s + (1 + K) = 0.$$

El algoritmo de Routh-Hurwitz arroja el siguiente vector:

$$1; 1; -K; (1 + K)$$

Que para $K > 0$ siempre tiene dos cambios de signo, por lo que siempre hay dos raíces con parte real positiva. Para $K = 0$ los polos están en el eje imaginario, pero eso ya lo sabíamos. Sigue el gráfico.



Lugar Geométrico de las raíces