

## Problema 1 (6 puntos)

- Enuncie de forma precisa las definiciones de *sistema* y de *sistema causal*.
- Para el sistema  $\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{U} = \{u : [t_c, +\infty) \rightarrow R\}, \quad \mathcal{Y} = \{y : [t_c, +\infty) \rightarrow R\},$$

$$y(t) = \int_{t_c}^{\infty} h(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma, \quad \forall t \geq t_c, \quad \forall u \in \mathcal{U},$$

establezca las condiciones que debe cumplir  $h : [t_c, +\infty) \rightarrow R$  para que el sistema sea causal.

## Problema 2 (10 puntos)

El dispositivo de la figura 1 es una grúa móvil, consistente de un carro, de masa  $M_c$ , que se mueve sobre rieles horizontales, del que cuelga un gancho, de masa puntual  $M_g$ , a través de una barra articulada de longitud  $l$ . Se despreciará la masa de esta barra, así como el rozamiento, entre el carro y los rieles, y en la articulación de la barra. Sobre el carro se ejerce una fuerza  $\vec{u} = u\hat{j}$ .

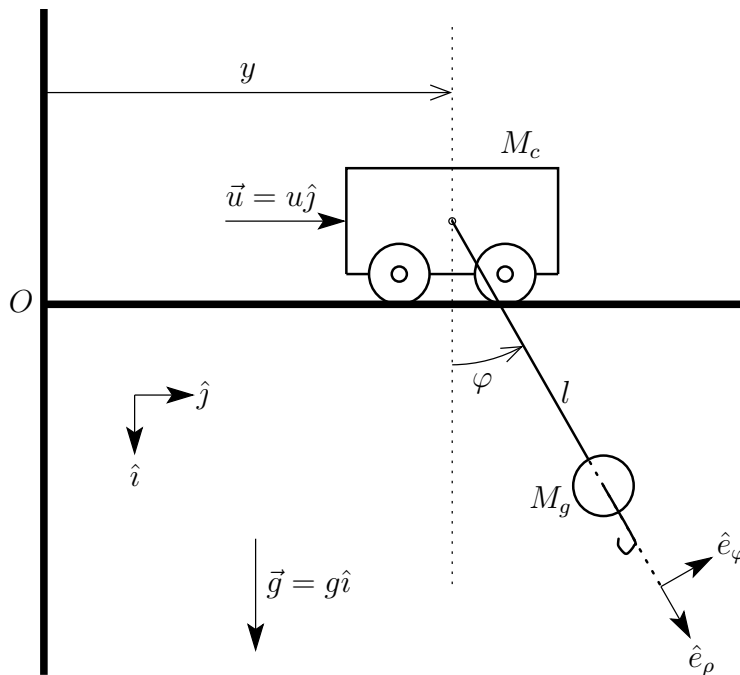


Figura 1: Grúa móvil.

La aceleración del gancho con respecto al punto fijo  $O$  es:

$$(\ddot{y} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\ddot{y} \cos \varphi + l\ddot{\varphi}) \hat{e}_\varphi,$$

donde  $\hat{e}_\rho = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}$  y  $\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$ . Aplicando la segunda ley de Newton al gancho y proyectando según  $\hat{e}_\rho$  y  $\hat{e}_\varphi$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$M_g g \cos \varphi - F = M_g (\ddot{y} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2),$$

$$-M_g g \sin \varphi = M_g (\ddot{y} \cos \varphi + l\ddot{\varphi}),$$

siendo  $-F\hat{e}_\rho$  la fuerza que ejerce la barra sobre el gancho.

1. Aplique la segunda ley de Newton al carro y deduzca la siguiente representación en variables de estado para el sistema de entrada  $u$  y salida  $[y \ \varphi]^T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \frac{u + M_g g \sin \varphi \cos \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{M_c + M_g \sin^2 \varphi} \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{u \cos \varphi + M_g g \sin \varphi \cos^2 \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l(M_c + M_g \sin^2 \varphi)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

2. Para  $u = 0$  constante, halle todos los puntos de equilibrio. Linealice la representación hallada en la parte anterior en torno a un punto de equilibrio para el cual  $\varphi = 0$ .
3. Dibuje un diagrama de bloques para la linealización de la parte anterior.
4. Considere el subsistema del gancho, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + B_1 u.$$

Calcule la matriz de transición de estado de este subsistema,  $e^{A_1 t}$ .

### Problema 3 (8 puntos)

El diagrama de bloques de la figura 2 representa un servomecanismo. La posición angular del eje de un motor de corriente continua,  $\theta$ , es controlada mediante un controlador proporcional-derivativo (PD) analógico en el lazo de realimentación, de forma tal de seguir aproximadamente a la señal de referencia  $\theta_r$ .

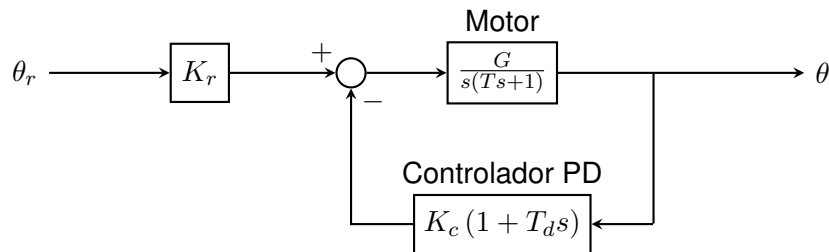


Figura 2: Diagrama de bloques de un servomecanismo.

Los valores de los parámetros  $G$  y  $T$  (positivos) del modelo del motor son conocidos. Se requiere que el sistema de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$  presente:

- una respuesta a escalón subamortiguada con tiempo de establecimiento al 2% menor a  $t_s^{\text{sup}}$ , y
  - un error de seguimiento asintótico menor a  $e_{\infty}^{\text{sup}}$  ante una entrada en forma de rampa con pendiente unitaria.
- Halle las condiciones que deben verificar  $K_r$ ,  $K_c$  y  $T_d$  (positivos) para que se verifiquen los requerimientos. Justifique detalladamente. Si utiliza alguna aproximación, explícitela.
  - Suponiendo que  $G = 0,25 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ ,  $T = 0,5 \text{ s}$ ,  $t_s^{\text{sup}} = 3T$  y  $e_{\infty}^{\text{sup}} = 0,5 \text{ rad}$ , elija valores para  $K_r$ ,  $K_c$  y  $T_d$  de forma tal de cumplir las condiciones halladas en la parte anterior y evalúe el sobretiro resultante en la respuesta a escalón.
  - Suponga que los valores de  $K_r$ ,  $K_c$ , y  $T_d$  se ajustaron según se determinó en la parte anterior, excepto por  $K_r$ , que quedó ajustado ajustado un 1% por encima del valor determinado. Evalúe el error de seguimiento asintótico ante las siguientes entradas:
    - escalón de amplitud unitaria, y
    - rampa de pendiente unitaria.

¿Qué observación le merecen estos resultados con respecto al diseño del servomecanismo en relación al cumplimiento del requerimiento b)?

## Problema 4 (6 puntos)

El sistema representado en la figura 3 ilustra un sistema automático de seguimiento. El objetivo es que la salida  $y(t)$  siga la referencia  $r(t)$  lo mejor posible. Consta de un servomotor  $P(s)$  y un controlador  $C(s)$  interconectados según la figura 3. Las transferencias son

$$P(s) = \frac{1}{1 + Ts}; \quad C(s) = \frac{1}{T_I s},$$

con  $T > 0, T_I > 0$ .

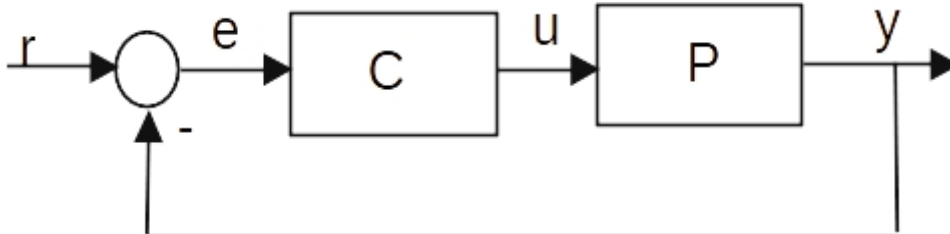


Figura 3: Sistema de control.

1. Calcule el valor asintótico de  $y(t)$  y  $e(t)$  cuando  $r(t)$  es un escalón unitario.
2. El objetivo de seguimiento es acercarse a menos del 5% de la referencia escalón y permanecer en esa franja con una velocidad  $|\dot{y}(t)| < v_{max}$ , todo eso en un tiempo menor a  $T_{seg}$  dado. Obtenga las condiciones que deben cumplir  $T_I$  y  $T$  para lograr el objetivo de control. Si usa hipótesis simplificativas para el cálculo explícitelas.

## Solución del problema 1

- a. Enuncie de forma precisa las definiciones de sistema y de sistema causal. Véase material del curso teórico.
- b. Para el sistema  $\mathcal{U}, \mathcal{Y}, \mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{U} = \{u : [t_c, +\infty) \rightarrow R\}, \mathcal{Y} = \{y : [t_c, +\infty) \rightarrow R\}.$$

$$y(t) = \int_{t_c}^{\infty} h(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma, \forall t \geq t_c$$

establezca las condiciones que debe cumplir  $h : [t_c, +\infty) \rightarrow R$  para que el sistema sea causal. Escribese

$$y(t) = \int_{t_c}^{\infty} h(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma = \int_{t_c}^t h(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma + \int_t^{\infty} h(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma.$$

Nótese que el segundo sumando necesita, en principio, información futura de la entrada ( $u(\sigma)$ ,  $\forall \sigma > t$ ) para ser calculado. Para evitarlo y, por lo tanto, preservar la causalidad, se requiere

$$h(t - \sigma) = 0 \quad \forall \sigma > t$$

que equivale a

$$h(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma < 0.$$

## Solución del problema 2

### Parte 1

Son dadas las siguientes ecuaciones:

$$M_g g \cos \varphi - F = M_g (\ddot{y} \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2), \quad (1)$$

$$-M_g g \sin \varphi = M_g (\ddot{y} \cos \varphi + l \ddot{\varphi}). \quad (2)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al carro y proyectando según  $\hat{j}$ :

$$u + F \sin \varphi = M_c \ddot{y}. \quad (3)$$

Despejando  $F$  de (1) para sustituirla en (3)

$$u + M_g g \sin \varphi \cos \varphi - M_g \ddot{y} \sin^2 \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = M_c \ddot{y}. \quad (4)$$

Despejando  $\ddot{y}$  de esta última ecuación:

$$\ddot{y} = \frac{u + M_g g \sin \varphi \cos \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{M_c + M_g \sin^2 \varphi}. \quad (5)$$

Sustituyendo  $\ddot{y}$  en (2) y despejando  $\ddot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{u \cos \varphi + M_g g \sin \varphi \cos^2 \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l(M_c + M_g \sin^2 \varphi)}. \quad (6)$$

A partir de (5) y (6), se construye la siguiente representación en variables de estado, para el sistema de entrada  $u$  y salida  $[y \quad \varphi]^T$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \frac{u + M_g g \sin \varphi \cos \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{M_c + M_g \sin^2 \varphi} \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{u \cos \varphi + M_g g \sin \varphi \cos^2 \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l(M_c + M_g \sin^2 \varphi)} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (7)$$

## Parte 2

Los puntos de equilibrio son las soluciones de:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \frac{u + M_g g \sin \varphi \cos \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{M_c + M_g \sin^2 \varphi} \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{u \cos \varphi + M_g g \sin \varphi \cos^2 \varphi + M_g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l(M_c + M_g \sin^2 \varphi)} \end{bmatrix}$$

Para  $u = 0$  constante, el conjunto de puntos de equilibrio es:

$$\{ [y \ \dot{y} \ \varphi \ \dot{\varphi}]^T : y = y_0, \dot{y} = 0, \varphi = h\pi, \dot{\varphi} = 0, y_0 \in [y_{\min}, y_{\max}] \subseteq \mathbb{R}, h \in \mathbb{Z} \},$$

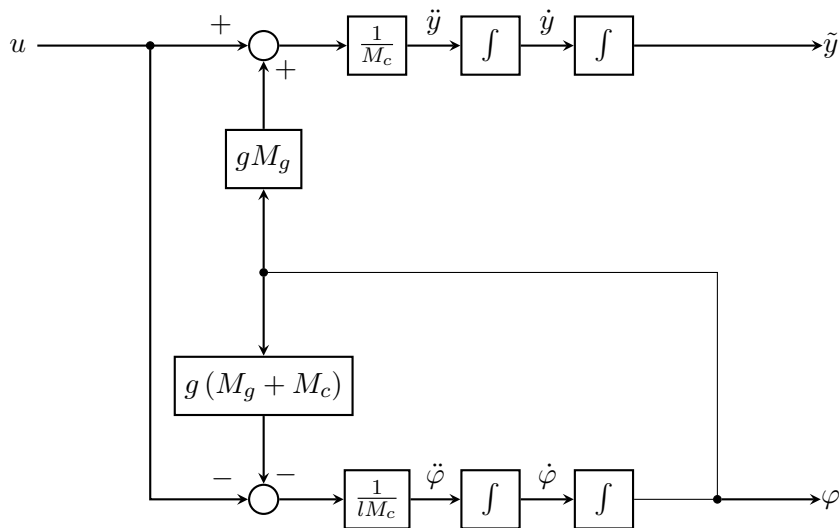
donde  $[y_{\min}, y_{\max}]$  es el intervalo de posiciones en el que puede moverse el carro.

Sean  $u_0 \triangleq 0$  y  $x_0 \triangleq [y_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , donde  $y_0 \in [y_{\min}, y_{\max}]$ . Linealizando (7) en torno a  $(x_0, u_0)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_g}{M_c} g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{l} \left(1 + \frac{M_g}{M_c}\right) & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM_c} \end{bmatrix}}_B [u], \\ \\ \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

donde  $\tilde{y} \triangleq y - y_0$ .

## Parte 3



## Parte 4

Sea  $\omega \triangleq \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{M_g}{M_c}\right)}$ . El subsistema del gancho está regido por la siguiente ley de evolución de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{lM_c} \end{bmatrix}}_{B_1} [u].$$

La matriz de transición de estado de este subsistema es:

$$e^{A_1 t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A_1)^{-1} \right\}.$$

Calculando la matriz inversa de  $sI - A_1$  mediante el método de la matriz adjunta:

$$(sI - A_1) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A_1) = s^2 + \omega^2,$$

$$\begin{aligned} (sI - A_1)^{-1} &= \frac{\text{adj}(sI - A_1)}{\det(sI - A_1)} = \frac{\begin{bmatrix} s & -\omega^2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^\top}{\det(sI - A_1)} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}}{\det(sI - A_1)} \\ &= \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ -\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ -\omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Antitransformando:

$$e^{A_1 t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A_1)^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \mathbb{1}(t).$$

donde  $\mathbb{1}(t)$  es la función escalón de Heaviside.

## Solución del problema 3

### Parte 1

La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$H_{lc}(s) = \frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = K_r \frac{\frac{G}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{G}{s(Ts+1)} K_c (1 + T_d s)} = \frac{\frac{GK_r}{T}}{s^2 + \frac{1+GK_c T_d}{T} s + \frac{GK_c}{T}} = \frac{\frac{K_r \omega_n^2}{K_c}}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2},$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{GK_c}{T}} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{1 + GK_c T_d}{2\sqrt{GK_c T}}.$$

Se requiere que la respuesta a escalón de  $H_{lc}(s)$  sea subamortiguada. Por lo tanto, debe cumplirse  $0 < \zeta < 1$ , es decir:

$$0 < \frac{1 + GK_c T_d}{2\sqrt{GK_c T}} < 1. \quad (8)$$

Tomando  $K_c$  y  $T_d$  (positivos) de forma tal que se verifique (8), los polos de  $H_{lc}(s)$  son:

$$-\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

ambos con parte real negativa.

Se requiere que el tiempo de asentamiento al 2% de la respuesta a escalón,  $t_s^{2\%}$ , sea menor a  $t_s^{\text{sup}}$ . Utilizando la aproximación  $t_s^{2\%} \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$ , válida para  $0 < \zeta < 0,8$ , este requerimiento se puede expresar como:

$$\frac{4}{\zeta \omega_n} < t_s^{\text{sup}}.$$

Como  $\zeta \omega_n = \frac{1+GK_c T_d}{2T}$ , la última desigualdad es equivalente a

$$\frac{4}{t_s^{\text{sup}}} < \frac{1 + GK_c T_d}{2T}. \quad (9)$$

Para que sea válida la aproximación utilizada para el tiempo de establecimiento, se requiere además:

$$0 < \frac{1 + GK_c T_d}{2\sqrt{GK_c T}} < 0,8. \quad (10)$$

Se requiere que el error de seguimiento asintótico ante una entrada en forma de rampa con pendiente unitaria sea menor a  $e_{\infty}^{\text{sup}}$ . Para que esto sea posible, el sistema de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$  debe ser de tipo mayor o igual que 1. Sea  $H_{la}(s)$  tal que  $\frac{H_{la}(s)}{1+H_{la}(s)} = H_{lc}(s)$ , entonces,

$$H_{la}(s) = \frac{H_{lc}(s)}{1 - H_{lc}(s)} = \frac{\frac{GK_r}{T}}{s^2 + \frac{1+GK_cT_d}{T}s + \frac{G}{T}(K_c - K_r)}.$$

Para que  $H_{lc}(s)$  sea de tipo mayor o igual que 1,  $H_{la}(s)$  debe tener al menos un polo en  $s = 0$ . Por lo tanto, debe cumplirse:

$$K_r = K_c. \quad (11)$$

Si se cumple (11) y los polos de  $H_{lc}(s)$  tienen parte real negativa, el error de seguimiento asintótico ante una entrada en forma de rampa con pendiente  $p = 1 \text{ rad/s}$  es  $e^{\text{rampa}} = \frac{p}{K_v}$ , donde  $K_v$  es la constante de error de velocidad estática de  $H_{lc}(s)$ :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{la}(s) = \frac{\frac{GK_c}{T}}{\frac{1+GK_cT_d}{T}} = \frac{GK_c}{1 + GK_cT_d}.$$

Como se requiere  $e^{\text{rampa}} = \frac{p}{K_v} < e_{\infty}^{\text{sup}}$ , debe verificarse:

$$\frac{1 + GK_cT_d}{GK_c} < \frac{e_{\infty}^{\text{sup}}}{p}. \quad (12)$$

Entonces, las condiciones que deben verificar  $K_r$ ,  $K_c$  y  $T_d$  (positivos) para que se verifiquen los requerimientos son: (8), (9), (10), (11) y (12), que se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_r = K_c, \\ \frac{8T}{t_s^{\text{sup}}} < 1 + T_dGK_c < \min \left\{ \frac{8}{5}\sqrt{TGK_c}, \frac{e_{\infty}^{\text{sup}}}{p}GK_c \right\}, \quad \text{donde } p = 1 \text{ rad/s.} \end{array} \right.$$

## Parte 2

Para  $T = 0,5 \text{ s}$ ,  $t_s^{\text{sup}} = 3T = 1,5 \text{ s}$  y  $e_{\infty}^{\text{sup}} = 0,5 \text{ rad}$ , las condiciones

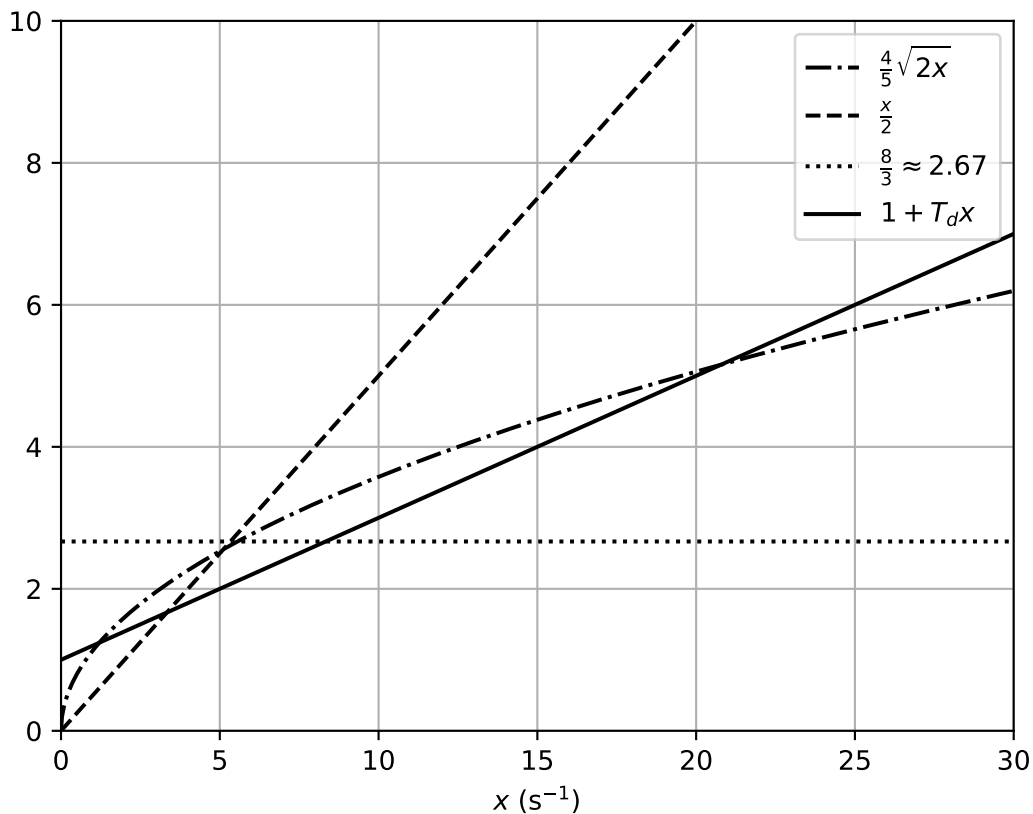
$$\frac{8T}{t_s^{\text{sup}}} < 1 + T_dGK_c < \min \left\{ \frac{8}{5}\sqrt{TGK_c}, \frac{e_{\infty}^{\text{sup}}}{p}GK_c \right\}$$

de la parte anterior toman la siguiente forma:

$$\frac{8}{3} < 1 + T_dx < \min \left\{ \frac{4}{5}\sqrt{2x}, \frac{x}{2} \right\}, \quad (13)$$

donde  $x = GK_c$ , siendo  $G = 0,25 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ . Estudiando gráficamente las condiciones anteriores se observa que alcanza con elegir  $T_d$  suficientemente pequeño para encontrar soluciones. Por ejemplo, tomando  $T_d = 0,2 \text{ s}$ , la representación gráfica de  $x \mapsto 1 + T_dx$  queda de la siguiente forma con respecto a las gráficas de  $x \mapsto \frac{4}{5}\sqrt{2x}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{2}$  y  $x \mapsto \frac{8}{3}$ :





Tomando  $x = 10 \text{ s}^{-1}$  se verifica (13). Si  $x = 10 \text{ s}^{-1}$ , entonces  $K_c = \frac{10 \text{ s}^{-1}}{G} = 40 \text{ V/rad}$ . Por otro lado, según la parte anterior, también se debe verificar  $K_r = K_c$ , por lo que una elección posible para los valores de los parámetros  $K_r$ ,  $K_c$  y  $T_d$  es:

$$K_r = K_c = 40 \text{ V/rad} \quad \text{y} \quad T_d = 0,2 \text{ s.}$$

Para esta elección,

$$\zeta = \frac{1 + GK_c T_d}{2\sqrt{GK_c T}} \approx 0,671,$$

por lo que el sobretiro es:

$$M_p\% = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \approx 5,8\%.$$

### Parte 3

Si  $T_d = 0,2 \text{ s}$ ,  $K_c = 40 \text{ V/rad}$  y  $\frac{K_r}{K_c} = 1,01$ , el sistema, de entrada  $\theta_r$  y salida  $\theta$ , ya no es de tipo 1, sino que es de tipo 0, porque, como  $K_r \neq K_c$ , la función de transferencia

$$H_{la}(s) = \frac{GK_r}{s^2 + \frac{1+GK_c T_d}{T}s + \frac{G}{T}(K_c - K_r)}$$

no tiene polos en  $s = 0$ .

Sea  $e(t) = \theta_r(t) - \theta(t)$ . Se tiene lo siguiente:

- Ante una entrada en forma de escalón de amplitud unitaria,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \frac{K_r}{K_c}} = -0,01 \text{ rad,}$$

ya que  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H_{la}(s) = \frac{K_r}{K_c - K_r} = \frac{\frac{K_r}{K_c}}{1 - \frac{K_r}{K_c}}$

- Ante una entrada  $\theta_r$  en forma de rampa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = \infty,$$

porque un sistema de tipo 0 no es capaz de seguir una rampa con error asintótico finito. Es más,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ (1 - H_{lc}(s)) \frac{1}{s^2} \right\} (t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - H_{lc}(0)}{s^2} + \dots \right\} (t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - \frac{K_r}{K_c}}{s^2} + \dots \right\} (t) = \lim_{t \rightarrow \infty} - \left( \frac{K_r}{K_c} - 1 \right) t \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

A partir de estos resultados se observa que el diseño no es robusto con respecto al cumplimiento del requerimiento b).

## Solucion del Problema 4

### Parte 1

Con

$$P(s) = \frac{1}{1 + T_s s}; \quad C(s) = \frac{1}{T_I s},$$

tenemos que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{1}{T T_I s^2 + T_I s + 1};$$

que como tiene todos sus coeficientes positivos tiene todos sus polos con parte real negativa. Además

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + PC},$$

$$E(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + PC},$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + PC} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + PC} = 0.$$

Así,

$$1. y_\infty = 1; \quad e_\infty = 0.$$

### Parte 2

La transferencia  $\frac{Y(s)}{R(s)}$  es exactamente la transferencia tipo de un sistema de segundo orden con

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T T_I}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}. \quad (14)$$

El primer requisito es exactamente igual a exigir tiempo de establecimiento al 5% menor o igual a  $T_{seg}$ :

$$t_s \leq T_{seg}.$$

Apelando a la aproximación  $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ , válida para  $\zeta < 0,6$ , tenemos

$$\frac{3}{\zeta\omega_n} \leq T_{seg} \longrightarrow T \leq \frac{T_{seg}}{6}. \quad (15)$$

Por otro lado, la derivada de la salida es

$$sY(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t).$$

Si nos quedamos con la envolvente de esta función, el último requisito  $|\dot{y}(t)| < v_{max}$  se puede escribir

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n T_{seg}} \leq v_{max},$$

que lleva a la última condición

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq e^{\zeta\omega_n T_{seg}} v_{max} \leq e^3 v_{max}.$$

Sustituyendo  $\omega_n$  y  $\zeta$  con la ayuda de (14)

$$T_I T \left(1 - \frac{T_I}{T}\right) \geq \frac{e^{-6}}{v_{max}},$$

y

$$T_I T - T_I^2 \geq \frac{e^{-6}}{v_{max}},$$

que junto a la expresión (15) completa la respuesta a la parte 2.