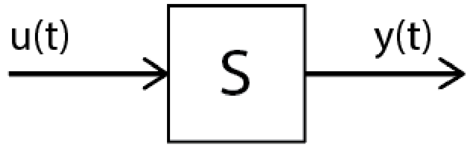
Considere el siguiente sistema, representado por las siguientes relaciones entrada-salida



1) $y(t) = \int_0^t \frac{u(\sigma)}{t-\sigma+1} d\sigma$
2) $y(t) = \int_0^t \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} d\sigma$
3) $y(t) = u(\alpha.\ t\ +\ \beta)$ con $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1\ ctes$

Para cada uno de estos, justifique:

¿Es el sistema causal?

¿Es el sistema lineal?

Solución

1)

- El sistema es lineal pues cumple con la definición
$$S\left[A.u_1(t) +\ B.u_2(t)\right] = A.S\left[u_1(t)\right] +\ B.S[u_2(t)]$$

- El sistema es causal. Sean:
$$u_1 = u\left[t_0, t_1\right] + r_1[t_1, \infty)$$
$$u_2 = u\left[t_0, t_1\right] + r_2[t_1, \infty)$$

Se cumple que

$$y_1\left(t_1\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u_1(\sigma)}{t-\sigma+1} d\sigma\ = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u(\sigma)}{t-\sigma+1} d\sigma$$

$$y_2\left(t_1\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u_2(\sigma)}{t-\sigma+1} d\sigma\ = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u(\sigma)}{t-\sigma+1} d\sigma$$

2)

- El sistema es lineal pues cumple con la definición

$$S\left[A.u_1(t) + B.u_2(t)\right] = A.S\left[u_1(t)\right] + B.S[u_2(t)]$$

- El sistema es causal. Sean:

$$u_1 = u\left[t_0, t_1\right] + r_1[t_1, \infty)$$

$$u_2 = u\left[t_0, t_1\right] + r_2[t_1, \infty)$$

Se cumple que

$$y_1\left(t_1\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u_1(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} d\sigma$$

$$y_2\left(t_1\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u_2(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} d\sigma$$

3)

- El sistema es lineal pues cumple con la definición

$$S\left[A.u_1(t) + B.u_2(t)\right] = A.S\left[u_1(t)\right] + B.S[u_2(t)]$$

- El sistema NO es causal. Sean:

$$u_1 = u\left[t_0, 0\right] + r_1[0, \infty)$$

$$u_2 = u\left[t_0, 0\right] + r_2[0, \infty)$$

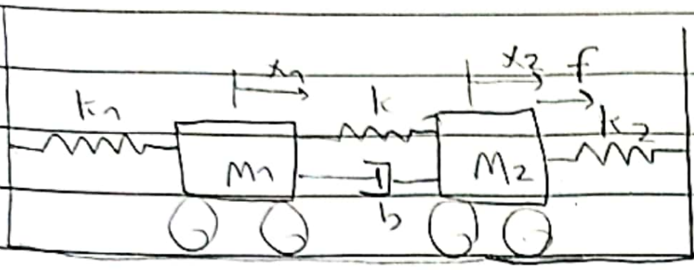
Se cumple que

$$y_1(0) = u_1(\alpha.\ 0 + \beta) = r_1(\beta)$$

$$y_2(0) = u_2(\alpha.\ 0 + \beta) = r_2(\beta)$$

Problema 2

a-



Asumimos que cuando $x_1 = x_2 = 0$ todos los resortes se encuentran en su longitud natural

Newton Carro 1: $M_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

Newton Carro 2: $M_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1 + k}{m_1} x_1 + \frac{k}{m_1} x_2 - \frac{b}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{b}{m_1} \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k_2 + k}{m_2} x_2 + \frac{k}{m_2} x_1 + \frac{b}{m_2} \dot{x}_1 - \frac{b}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{1}{m_2} f \end{cases}$$

Con $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$, $y = x$, $u = f$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k_2+k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} [f]$$

$$y = I_d\, x + 0.f$$

b- Transformo las ecuaciones diferenciales y despejo $\frac{X_1(s)}{F(s)}$ y $\frac{X_2(s)}{F(s)}$

$$\begin{cases} m_1 s^2 X_1(s) = -(k_1 + k) X_1(s) + k X_2(s) - bs X_1(s) + bs X_2(s) \\ m_2 s^2 X_2(s) = -(k_2 + k) X_2(s) + k X_1(s) - bs X_2(s) + bs X_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s)(m_1 s^2 + bs + k_1 + k) = X_2(s)(bs + k) \\ X_2(s)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k) = X_1(s)(bs + k) + F(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1(s) = X_2(s)\,\frac{bs+k}{m_1s^2+bs+k_1+k}$$

$$\Rightarrow X_2(s) = X_1(s)\cdot\frac{bs+k}{m_2s^2+bs+k_2+k} + \frac{1}{m_2s^2+bs+k_2+k}F(s)$$

$$\Rightarrow X_2(s) = X_2(s)\cdot\frac{(bs+k)^2}{(m_1s^2+bs+k_1+k)(m_2s^2+bs+k_2+k)} + \frac{1}{m_2s^2+bs+k_2+k}F(s)$$

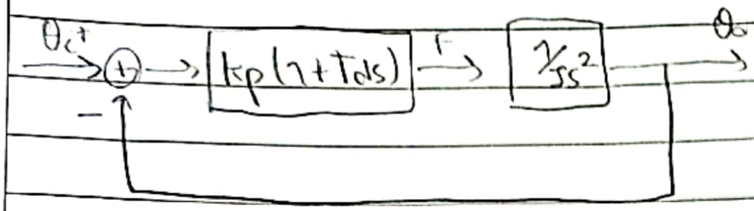
$$\Rightarrow X_2(s)\cdot\left[1-\frac{(bs+k)^2}{(m_1s^2+bs+k_1+k)(m_2s^2+bs+k_2+k)}\right] = \frac{1}{m_2s^2+bs+k_2+k}F(s)$$

$$\Rightarrow \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_2s^2+bs+k_2+k-\dfrac{(bs+k)^2}{m_1s^2+bs+k_1+k}}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{X_2(s)}{F(s)}\cdot\frac{bs+k}{m_1s^2+bs+k_1+k} = \frac{bs+k}{(m_2s^2+bs+k_2+k)(m_1s^2+bs+k_1+k)-(bs+k)^2}$$

Multiplicando por s tenemos $\dfrac{\dot{X}_1(s)}{F(s)}$ y $\dfrac{\dot{X}_2(s)}{F(s)}$

Problema 3



Calculo la transferencia en lazo cerrado, hallo una expresión para ξ, igualo a 0,7 y despejo Td.

$$G_{CL} = \frac{Kp(1+Tds)\cdot\frac{1}{Js^2}}{1+Kp(1+Tds)\cdot\frac{1}{Js^2}} = \frac{Kp(1+Tds)}{Js^2+Kp(1+Tds)} =$$

$$= \frac{Kp}{J}\cdot\frac{1+Tds}{s^2+\frac{KpTd}{J}s+\frac{Kp}{J}}$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{Kp}{J} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{Kp}{J}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{KpTd}{J} \rightarrow \xi = \frac{Td}{2}\cdot\sqrt{\frac{Kp}{J}} = 0{,}7$$

$$\Rightarrow Td = 1{,}4\cdot\sqrt{\frac{J}{Kp}}$$

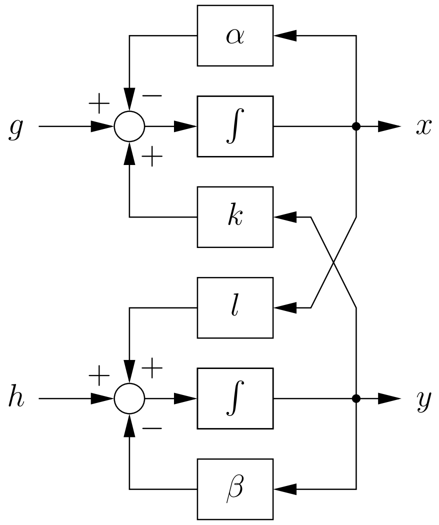
Solución del problema 4

1

A partir de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = ky(t) - \alpha x(t) + g(t), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = lx(t) - \beta y(t) + h(t),$$

se construye el siguiente diagrama de blouqes del sistema:



2

La siguiente es una posible representación en variables de estado del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \end{cases}$$

donde se introdujeron las matrices A, B y C.

La matriz de transferencia del sistema es:

$$M(s) = C\,(s\mathrm{I} - A)^{-1}\,B = (s\mathrm{I} - A)^{-1} = \frac{[\mathrm{cof}\,(s\mathrm{I} - A)]^{\mathsf{T}}}{p(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s+\beta & k \\ l & s+\alpha \end{bmatrix}}{p(s)},$$

donde $p(s) = \det\,(s\mathrm{I} - A) = s^2 + (\alpha + \beta)\,s + \alpha\beta - kl$ es el polinomio característico de la matriz A.

3a

Como $\begin{bmatrix} g(t) & h(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} g_0 & h_0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ para $t \geq 0$, la transformada de Laplace de la entrada es $\begin{bmatrix} \frac{g_0}{s} & \frac{h_0}{s} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Además se tiene que $x(0) = y(0) = 0$. La transformada de Laplace de la respuesta, $\begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, es

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = C\,(s\mathrm{I} - A)^{-1}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} + C\,(s\mathrm{I} - A)^{-1}\,B\begin{bmatrix} \frac{g_0}{s} \\ \frac{h_0}{s} \end{bmatrix} = (s\mathrm{I} - A)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{g_0}{s} \\ \frac{h_0}{s} \end{bmatrix}.$$

Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\lim_{s\to 0}s\left(s\mathrm{I}-A\right)^{-1}\begin{bmatrix}\frac{g_0}{s}\\\frac{h_0}{s}\end{bmatrix}=\lim_{s\to 0}\frac{\begin{bmatrix}s+\beta & k\\ l & s+\alpha\end{bmatrix}}{p(s)}\begin{bmatrix}g_0\\h_0\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}\beta & k\\ l & \alpha\end{bmatrix}}{p(0)}\begin{bmatrix}g_0\\h_0\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}\beta g_0+kh_0\\ lg_0+\alpha h_0\end{bmatrix}}{\alpha\beta-kl}.$$

Para que exista el límite en el tiempo y sea aplicable el teorema del valor final, todas las raíces de $p(s)$ deben tener parte real negativa. Las raíces de $p(s)$ son $\frac{-(\alpha+\beta)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ donde $\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\left(\alpha\beta-kl\right)$.

Como $\alpha,\beta,k,l\geq 0$ y

$$\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\left(\alpha\beta-kl\right)=(\alpha-\beta)^2+4kl,$$

se tiene que $\Delta\geq 0$, por lo que las dos raíces de $p(s)$ son reales. Para que ambas raíces tengan parte real negativa, debe cumplirse que $-\left(\alpha+\beta\right)+\sqrt{\Delta}<0$, o equivalentemente,

$$\boxed{\alpha\beta-kl>0}, \tag{1}$$

pero como $\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\left(\alpha\beta-kl\right)\geq 0$, también debe cumplirse $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta-kl}$ donde $\alpha\beta-kl>0$, entonces:

$$\boxed{\alpha+\beta>0}. \tag{2}$$

Las condiciones (1) y (2) también se podían haber obtenido aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz al polinomio $p(s)$.

3b

Según el cálculo de la parte anterior,

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\beta g_0+kh_0}{\alpha\beta-kl}\\\frac{lg_0+\alpha h_0}{\alpha\beta-kl}\end{bmatrix}.$$

3c

La respuesta transitoria presenta oscilaciones si y solo si alguna raíz de $p(s)$ tiene parte imaginaria no nula. Como $\Delta\geq 0$, las dos raíces de $p(s)$ son reales, por lo tanto, no ocurren oscilaciones en el mediano plazo.

4

Para $t\geq 0$, como la entrada es nula, la respuesta del sistema es su respuesta natural:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=C\mathrm{e}^{At}\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}=\mathrm{e}^{At}\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix}.$$

Solo resta hallar la matriz de transición de estado, e^{At}, y el estado inicial, $\begin{bmatrix}x(0) & y(0)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

La matriz de transición de estado es:

$$\mathrm{e}^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s\mathrm{I}-A\right)^{-1}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s+\beta & k\\ 0 & s+\alpha\end{bmatrix}}{(s+\alpha)\left(s+\beta\right)}\right\}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\alpha t} & \frac{k}{\alpha-\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\\ 0 & \mathrm{e}^{-\beta t}\end{bmatrix},$$

donde se hizo uso de que $l=0$ y por lo tanto $p(s)=s^2+(\alpha+\beta)\,s+\alpha\beta-kl=(s+\alpha)\,(s+\beta)$.

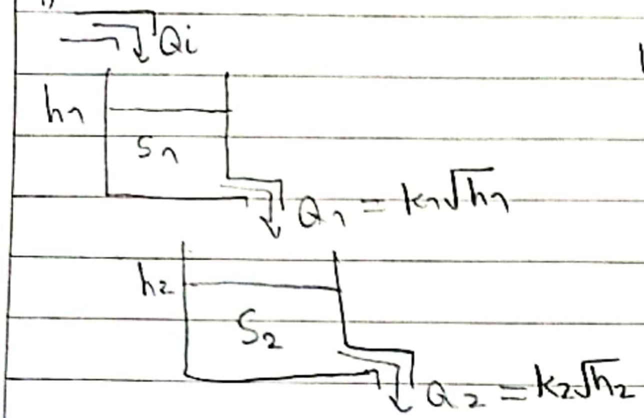
Como se verifican la condiciones de la parte 3a, el estado inicial $\begin{bmatrix}x(0) & y(0)\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ no es más que el estado en régimen estacionario (hallado en la parte 3b) correspondiente a la entrada constante $\begin{bmatrix}h_0 & g_0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Luego, para $t\geq 0$:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\alpha t} & \frac{k}{\alpha-\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\\ 0 & \mathrm{e}^{-\beta t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\beta g_0+kh_0}{\alpha\beta}\\\frac{h_0}{\beta}\end{bmatrix}.$$

Problema 5

1)



La derivada del volumen del líquido en un tanque es el caudal que entra menos el que sale.

tanque 1

$$V_{t1} = S_1 h_1 \rightarrow \dot{V}_{t1} = S_1 \dot{h}_1 = Q_i - Q_1$$

tanque 2

$$\dot{V}_{t2} = S_2 \dot{h}_2 = Q_1 - Q_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{h}_1 = \dfrac{Q_i}{S_1} - \dfrac{k_1}{S_1}\sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 = \dfrac{k_1}{S_2}\sqrt{h_1} - \dfrac{k_2}{S_2}\sqrt{h_2} \end{cases}$$

2) i- Pto de equilibrio $\Rightarrow \dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0$, $h_1 = h_{10}$, $h_2 = h_{20}$, $Q_i = Q_{i0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{Q_{i0}}{S_1} - \dfrac{k_1}{S_1}\sqrt{h_{10}} \longrightarrow h_{10} = \left(\dfrac{Q_{i0}}{k_1}\right)^2 \\ 0 = \dfrac{k_1}{S_2}\sqrt{h_{10}} - \dfrac{k_2}{S_2}\sqrt{h_{20}} \longrightarrow h_{20} = h_{10}\cdot\dfrac{k_1^2}{k_2^2} = \left(\dfrac{Q_{i0}}{k_2}\right)^2 \end{cases}$$

ii- $x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ $\quad y = Q_2 = k_2\sqrt{h_2} = g(h_2)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{Q_i}{S_1} - \dfrac{k_1}{S_1}\sqrt{h_1} \\ \dfrac{k_1}{S_2}\sqrt{h_1} - \dfrac{k_2}{S_2}\sqrt{h_2} \end{pmatrix} = f(h_1, h_2, Q_i)$$

Calculo derivadas parciales en el pto de eq:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial h_1}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1}{2S_1\sqrt{h_{10}}} \\ \dfrac{k_1}{2S_2\sqrt{h_{10}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1^2}{2S_1 Q_{i0}} \\ \dfrac{k_1^2}{2S_2 Q_{i0}} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial h_2}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{k_2^2}{2S_2 Q_{i0}} \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial Q_i}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{S_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial h_2}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}} = \frac{k_2^2}{2Q_{io}}$$

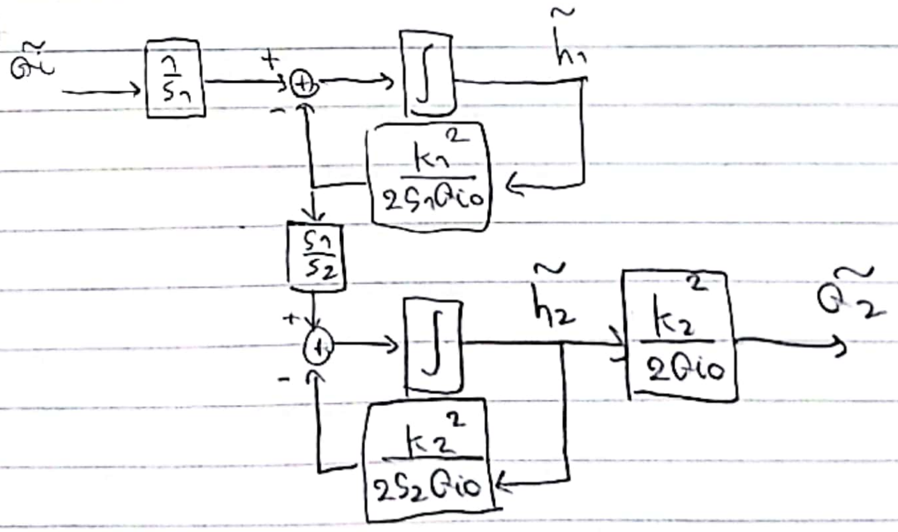
$\Rightarrow$ Siendo $\tilde{x} = x - x_0 = \begin{bmatrix} h_1 - h_{10} \\ h_2 - h_{20} \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{u} = u - u_0 = Q_i - Q_{io}$

$\tilde{y} = y - y_0 = Q_2 - Q_{20}$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{h}}_1 \\ \dot{\tilde{h}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1^2}{2S_1Q_{io}} & 0 \\ \frac{k_1^2}{2S_2Q_{io}} & -\frac{k_2^2}{2S_2Q_{io}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{Q_i}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{Q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_2^2}{2Q_{io}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tilde{Q_i}$$

3)



$$s\tilde{H}_1(s) = -\frac{k_1^2}{2S_1Q_{io}}\tilde{H}_1(s) + \frac{1}{S_1}\tilde{Q_i}(s) \rightarrow \tilde{H}_1(s) = \frac{1/S_1}{s + \frac{k_1^2}{2S_1Q_{io}}}\tilde{Q_i}(s)$$

$$s\tilde{H}_2(s) = \frac{k_1^2}{2S_2Q_{io}}\tilde{H}_1(s) - \frac{k_2^2}{2S_2Q_{io}}\tilde{H}_2(s) \rightarrow \tilde{H}_2(s) = \frac{\frac{1}{S_1}\cdot\frac{k_1^2}{2S_2Q_{io}}}{\left(s+\frac{k_2^2}{2S_2Q_{io}}\right)\left(s+\frac{k_1^2}{2S_1Q_{io}}\right)}Q_i(s)$$

$$\tilde{Q_2}(s) = \frac{k_2^2}{2Q_{io}}\cdot\tilde{H}_2(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{Q_2}(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{k_2^2}{2S_1Q_{io}}\cdot\frac{k_1^2}{2S_2Q_{io}}}{\left(s+\frac{k_2^2}{2S_2Q_{io}}\right)\left(s+\frac{k_1^2}{2S_1Q_{io}}\right)}$$