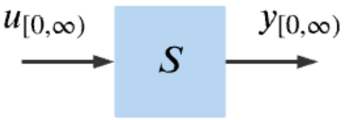
Carrera:	**INGENIERÍA ELÉCTRICA**	**Instituto de Ingeniería Eléctrica**
Materia:	**CONTROL**	
Asignaturas:	**SISTEMAS Y CONTROL**	**Departamento de Sistemas y Control**
Plan:	**97**	
Fecha:	**30/09/2021**	**PRUEBA PARCIAL**

Ejercicio 1

(Total 10 puntos: 1 punto por correcta; -1 punto por incorrecta)

Considere los siguientes sistemas.
¿Son causales? ¿Son lineales?



con $u: R \to R \qquad 0 \le t < \infty$

Sistema	¿Causal?		¿Lineal?	
	SI	NO	SI	NO
$y(t) = \int_0^t u(t).e^{-2*t}.\mathrm{dt}$	X		X	
$y(t) = \int_0^{t^2} u^2(t).e^{-2*t}.\mathrm{dt}$		X		X
$y(t) = \int_0^{\frac{t}{3}} \sqrt{\lvert u(t)\rvert}.e^{-2*t}\mathrm{dt}$	X			X
$y(t) = \mathrm{sen}(\lvert 2 \cdot t \cdot u(t)\rvert)$	X			X
$y(t) = u(\lvert 2 \cdot t \cdot \mathrm{sen}(t)\rvert)$		X	X	

Ejercicio 2

(5 puntos si correcta; hasta -1 punto si incorrecta)

En la figura se muestra la respuesta de una planta al escalón unitario en t = 0. Seleccione la función de transferencia que mejor ajusta la respuesta graficada.

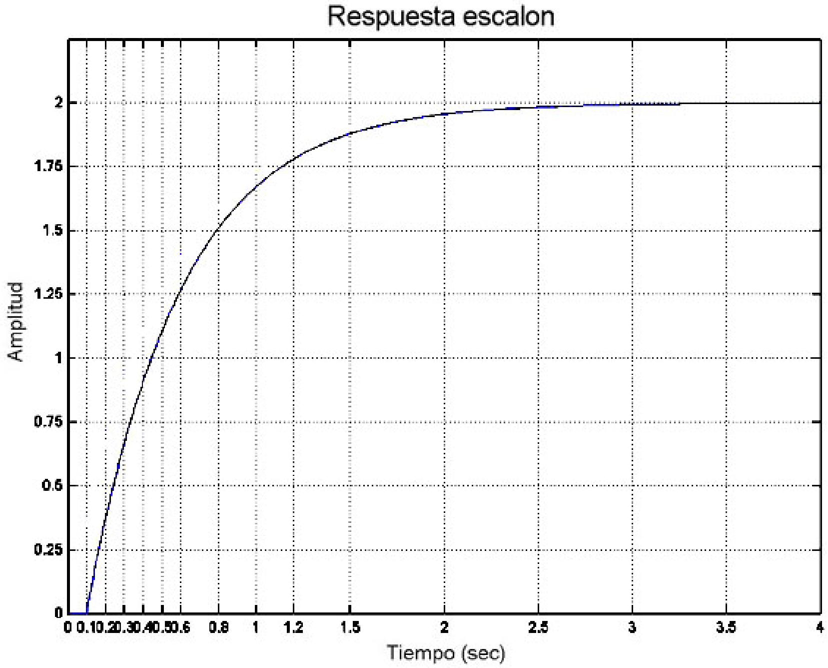
a) $\frac{Y}{U} = \frac{2.e^{-0,1.s}}{0,5.s+1}$

b) $\frac{Y}{U} = \frac{2}{s+0,6}$

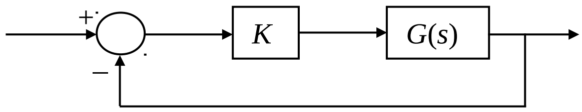
c) $\frac{Y}{U} = \frac{2}{0,6.s+1}$

d) $\frac{Y}{U} = \frac{28}{s^2+7,5.s+14}$

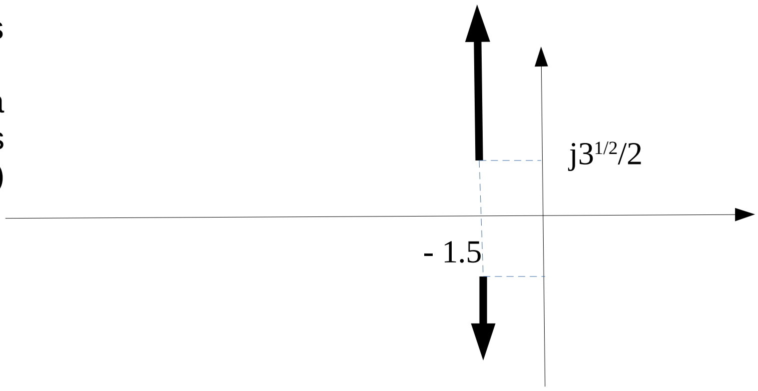
e) $\frac{Y}{U} = \frac{e^{-0,1.s}}{0,5.s+1}$



Ejercicio 3 (8 puntos)



El LGP son 2 asíntotas a ± 90° partir de los polos del lazo abierto. ($-1.5 \pm j\, 3^{1/2}/2$)
Por esta razón el lazo cerrado siempre será (si K>0) un sistema de 2o orden con polos complejos conjugados (sub-amortiguado) presentando respuesta oscilatora.



Solución Ejercicio 4

a)

Aplicando la Segunda Ley de Newton en el sistema de coordenadas propuesto

$\widehat{u_r})\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]m = -mgsen(\theta)$

$\widehat{u_\theta})\left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right]m = F_m - mgcos(\theta)$

$F_m = \frac{\tau_m}{r}$

Combinando las ecuaciones

$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - gsen(\theta)$

$\ddot{\theta} = \frac{\tau_m}{m.r^2} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g}{r}cos(\theta)$

b)

En la posición de equilibrio, se cumple que:

$r = \frac{L}{2}, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$

$\theta = 0, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$

Además,

$\frac{\tau_{m_0}}{m.{r_0}^2} = \frac{g}{r_0}cos(\theta_0)$

$\tau_{m_0} = mgr_0 = \frac{mgL}{2}$

Linealizando y evaluando en el punto de equilibrio

$\left.\frac{\delta\ddot{r}}{\delta r}\right|_{x_0,u_0} = \left.\dot{\theta}^2\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{r}}{\delta\dot{r}}\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{r}}{\delta\theta}\right|_{x_0,u_0} = -\left.\frac{g}{r}\cos(\theta)\right|_{x_0,u_0} = -\frac{2g}{L}$

$\left.\frac{\delta\ddot{r}}{\delta\dot{\theta}}\right|_{x_0,u_0} = \left.2r\dot{\theta}\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{r}}{\delta\tau_m}\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{\theta}}{\delta r}\right|_{x_0,u_0} = \left.\frac{-2\tau_m}{m.r^3} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r^2} + \frac{g}{r^2}cos(\theta)\right|_{x_0,u_0} = -\frac{4g}{L^2}$

$\left.\frac{\delta\ddot{\theta}}{\delta\dot{r}}\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{\theta}}{\delta\theta}\right|_{x_0,u_0} = \left.\frac{g}{r}sen(\theta)\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{\theta}}{\delta\dot{\theta}}\right|_{x_0,u_0} = \left.\frac{2\dot{r}}{r}\right|_{x_0,u_0} = 0$

$\left.\frac{\delta\ddot{\theta}}{\delta\tau_m}\right|_{x_0,u_0} = \left.\frac{1}{m.r^2}\right|_{x_0,u_0} = \frac{4}{mL^2}$

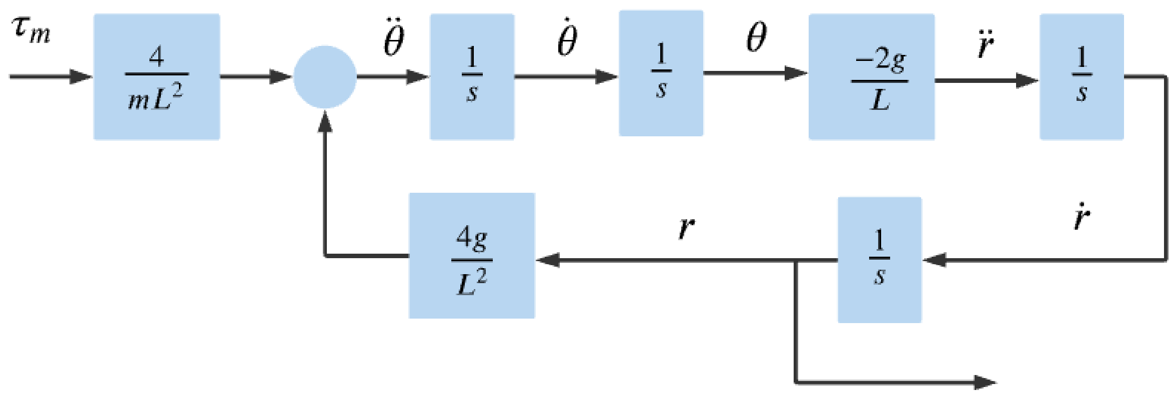
Con estas derivadas parciales, se cumple que en pequeña señal

$$\tilde{\ddot{r}} = -\frac{2g}{L}\tilde{\theta}$$

$$\tilde{\ddot{\theta}} = -\frac{4g}{L^2}\tilde{r} + \frac{4}{mL^2}\widetilde{\tau_m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2g}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{{r_0}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{mL^2} \end{bmatrix} [\tau_m]$$

c)



d)

$$r(s)s^2 = -\frac{2g}{L}\theta(s)$$

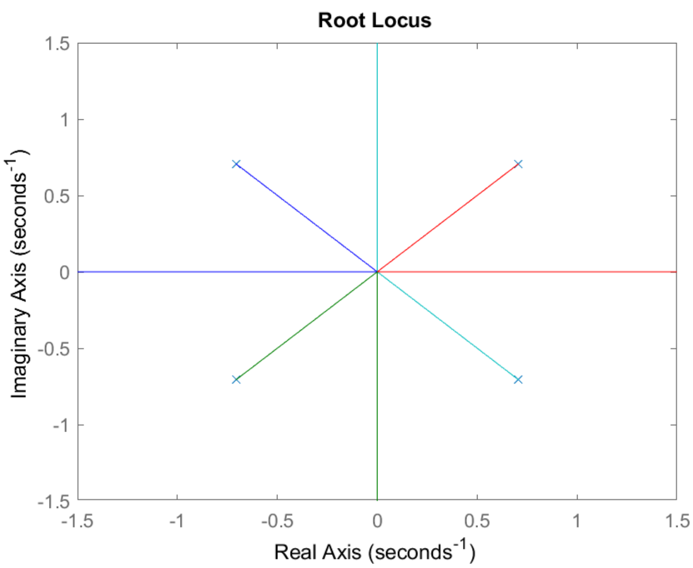
$$\theta(s)s^2 = -\frac{4g}{L^2}r(s) + \frac{4}{mL^2}\tau_m(s)$$

$$-\frac{L}{2g}s^4 r(s) = -\frac{4g}{L^2}r(s) + \frac{4}{mL^2}\tau_m(s)$$

$$-\left[\frac{L}{2g}s^4 + \frac{4g}{L^2}\right]r(s) = \frac{4}{mL^2}\tau_m(s)$$

$$\frac{r(s)}{\tau_m(s)} = \frac{\frac{-4}{mL^2}}{\frac{L}{2g}s^4 + \frac{4g}{L^2}} = \frac{\frac{-8g}{mL^3}}{s^4 + \frac{8g^2}{L^3}}$$

e)


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Sistemas y Control - Parcial 2021 - Solución del ej. 5

Parte 1

Aplicando la segunda Ley de Newton a la barra de cremallera con el cabezal de corte:

$$M\ddot{y} = F - b\dot{y} \tag{1}$$

donde F es la fuerza que hace el piñón sobre la barra de cremallera.

Aplicando la segunda Ley de Newton para rotación al eje del motor con el piñón:

$$J\ddot{\theta} = K_m i - rF - B\dot{\theta} \tag{2}$$

donde i es la corriente de armadura del motor y

$$\theta = \frac{y}{r}. \tag{3}$$

Aplicando la Ley de tensiones de Kirchhoff a la malla eléctrica de la armadura del motor:

$$u - Ri - K_m\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

De (1), (2), (3) y (4):

$$J\frac{\ddot{y}}{r} = K_m\frac{u - K_m\frac{\dot{y}}{r}}{R} - r\left(M\ddot{y} + b\dot{y}\right) - B\frac{\dot{y}}{r}.$$

Operando:

$$\frac{R\left(J + r^2M\right)}{K_m^2 + \left(B + r^2b\right)R}\ddot{y} + \dot{y} = \frac{rK_m}{K_m^2 + \left(B + r^2b\right)R}u.$$

Entonces la dinámica del sistema de entrada u y salida y está regida por una ecuación diferencial de la forma

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Gu,$$

donde

$$T = \frac{R\left(J + r^2M\right)}{K_m^2 + \left(B + r^2b\right)R} \quad \text{y} \quad G = \frac{rK_m}{K_m^2 + \left(B + r^2b\right)R}.$$

Parte 2

La función de transferencia del sistema de entrada u y salida y es:

$$\frac{Y}{U}(s) = H(s) = \frac{G}{s\left(Ts + 1\right)}$$

Como $H(s)$ tiene un polo en en el origen, alcanza con un control proporcional para obtener error en régimen acotado ante una entrada y_r en forma de rampa. Sea entonces,

$$C(s) = K.$$

Se requiere:

$$\frac{v}{K_v} \leq E$$

donde $K_v = \lim_{s\to 0} C(s)H(s) = KG$. Entonces

$$K \geq \frac{v}{GE}. \tag{5}$$

La función de transferencia del sistema realimentado es:

$$\frac{Y}{Y_r}(s) = H_{LC}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} = \frac{\frac{KG}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{KG}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

donde

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KGT}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{KG}{T}}, \quad \zeta\omega_n = \frac{1}{2T} = 10\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Como el sobretiro de la respuesta a escalón del lazo cerrado disminuye al aumentar la relación de amortiguamiento ζ, y ζ es inversamente proporcional a $\sqrt{K}$; la ganancia K del controlador debe elegirse tan pequeña como sea posible. Entonces, según (5):

$$\boxed{K = \frac{v}{GE} = 400\,\mathrm{V/m}}.$$

Para esta elección de K:

$$\zeta = 0{,}05 \quad \text{y} \quad \omega_n = 200\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Parte 3

Ante una entrada $y_r(t) = vt$ y partiendo del reposo, la respuesta del sistema realimentado es la antitransformada de Laplace de $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\left(\frac{v}{s^2}\right)$, es decir:

$$y(t) = v\left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_d t + \Phi\right)\right),$$

donde

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{KG} = 0{,}0005\,\mathrm{s}, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx 199{,}75\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \Phi = \arctan\frac{1-2\zeta^2}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Para todo $t \geq 0$, se cumple que:

$$y^+(t) \geq y(t) \geq y^-(t)$$

donde $y^{\pm}(t) = v\left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n} \pm \frac{1}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\right)$ son las envolventes de la respuesta. Entonces,

$$v\frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{v}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t} = y_r(t) - y^+(t) \leq y_r(t) - y(t) \leq y_r(t) - y^-(t) = v\frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{v}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}.$$

De las inecuaciones anteriores se concluye que existe un instante de tiempo a partir del cual el error $e(t) = y_r(t) - y(t)$ es positivo y permanece acotado por $y_r(t) - y^-(t) = v\frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{v}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}$.

Sea $t = t_c$, el instante de tiempo en el que la cota superior del error se iguala a $2E$:

$$v\frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{v}{\omega_d}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_c} = 2E \implies t_c = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{\frac{v}{\omega_d}}{2E - v\frac{2\zeta}{\omega_n}} = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{\frac{v}{\omega_d}}{2E - E} = \frac{1}{\zeta\omega_n}\ln\frac{\frac{v}{\omega_d}}{E} \approx 0{,}2304\,\mathrm{s}.$$

Para todo t tal que $t > t_c$, el cabezal de corte se encuentra a menos de $2E = 0{,}002\,\mathrm{m}$ de la marca sobre la que se debe cortar la lámina.