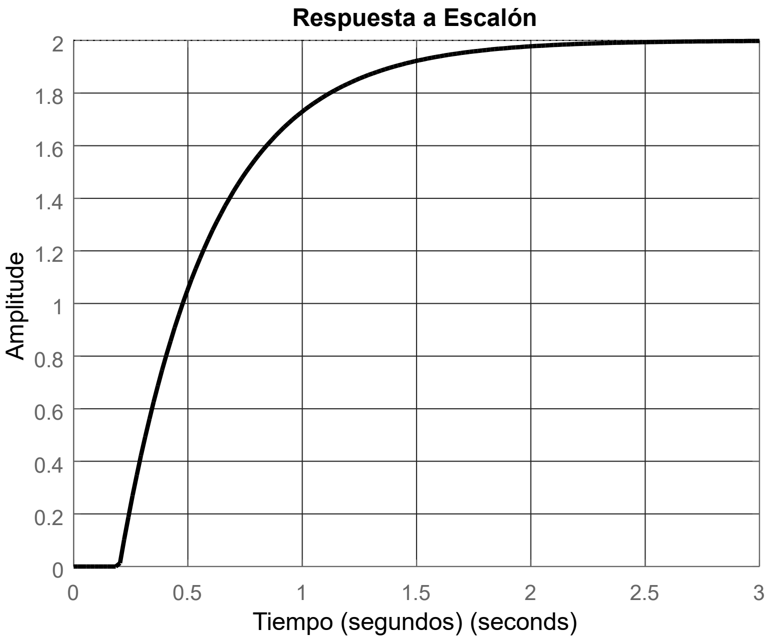
Ejercicio 1 (2 puntos si correcta; hasta -1 punto si incorrecta)
Por favor, marque respuesta en esta hoja

En la figura se muestra la respuesta de una planta al escalón unitario en t = 0. Seleccione la función de transferencia que mejor ajusta la respuesta graficada.



a) $\frac{Y}{U} = \frac{2}{s + 0,6}$

b) $\frac{Y}{U} = \frac{5.e^{-0,2.s}}{s+2.5}$ <======

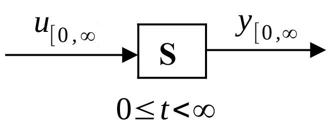
c) $\frac{Y}{U} = \frac{2}{0,6.s + 1}$

d) $\frac{Y}{U} = \frac{28}{s^2 + 7,5.s + 14}$

e) $\frac{Y}{U} = \frac{2}{0,5.s+1}$

Ejercicio 2 (Total 10 puntos: 1 punto por correcta; -1 punto por incorrecta)
Por favor, marque respuesta en esta hoja

Considere los siguientes sistemas.
¿Son causales? ¿Son lineales?

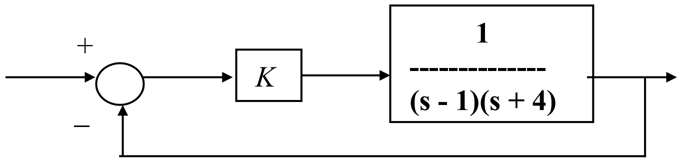


Sistema	¿Causal?		¿Lineal?	
	SI	NO	SI	NO
$y(t)=\int_0^{t/2} u(\sigma).e^{-\sigma}.d\sigma$	X		X	
$y(t)=\int_0^{t} u^2(\sigma).e^{-\sigma}.d\sigma$	X			X
$y(t)=\int_0^{t^2} \lvert u(\sigma)\rvert.e^{-\sigma}.d\sigma$		X		X
$y(t)=sen(4.u(t)+1)$	X			X
$y(t)=u(3.sen(t)+1)$		X	X	

Ejercicio 3 (6 puntos)

Sea el sistema realimentado de la figura, donde K representa un bloque amplificador, con K real.

1) Determine los rangos de valores de K para que el lazo cerrado sea estable.
2) Para que valor de K, el tiempo de asentamiento (aproximado) del sistema ts ≅ 3 seg.
3) Para que valor de K el lazo cerrado es críticamente amortiguado.



1) La función de transferencia del Lazo Cerrado es:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 3s - 4 + K}$$

por lo que el arreglo de Routh es:

f2	1	K-4
f1	3	0
f0	K-4	

Aplicando el criterio de Routh Hurwitz, es estable si y solo si K>4

2) Para que ts ≅ 3 seg. La parte real de polo más lento debe ser – 1 seg $^{-1.}$ el denominador se podría factorizar como $(s+1)*(s+a) = s^2 + (a+1)\,s + a = s^2 + 3s - 4 + K$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} a+1 = 3 \\ a = K - 4 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} a = 2 \\ K = 6 \end{cases}$

3) Debería tener polo doble sobre el eje real. Entonces, el denominador se podría factorizar como $(s+b)^2 = s^2 + 2b\,s + b^2 = s^2 + 3s - 4 + K$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} 2b = 3 \\ b^2 = K - 4 \end{cases}$ de donde $\begin{cases} b = 3/2 \\ K = 25/4 \end{cases}$

Ejercicio 4

Parte 1 – Representación en variables de estado

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla eléctrica del motor:

$$v = Ri + L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t} + e, \tag{1}$$

donde

$$e = Ki\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

es el voltaje inducido en el motor.

La segunda cardinal para el eje del motor (incluyendo la polea) es:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \tau - rT, \tag{3}$$

donde T es la tensión del cable de acero y

$$\tau = Ki^2 \tag{4}$$

es el torque ejercido por el motor.

Aplicando la segunda ley de Newton a la carga:

$$M\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2} = T - Mg. \tag{5}$$

La velocidad angular del eje del motor ($\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$) y la velocidad de la carga ($\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t}$) están vinculadas por:

$$r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Derivando,

$$r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{7}$$

De las ecuaciones (1), (2) y (6):

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = v - Ri - \frac{K}{r}i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

De las ecuaciones (3) a (5) y (7):

$$\left(J + Mr^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = rKi^2 - r^2Mg. \tag{9}$$

Tomando i, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ e y como variables de estado, de las ecuaciones ecuaciones (8) y (9) se obtiene la siguiente representación en variables de estado para el sistema de entrada v y salida y:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} i \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}v - \frac{R}{L}i - \frac{K}{Lr}i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{rK}{J+Mr^2}i^2 - \frac{r^2Mg}{J+Mr^2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Parte 2 – Punto de operación

En equilibrio, con $y = y_0$ y $v = v_0$ (constantes)

$$\begin{cases} v_0 = Ri_0, \\ rKi_0^2 = r^2Mg, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0, \end{cases}$$

de donde se desprende que

$$i_0 = \sqrt{\frac{rMg}{K}} \quad y \quad v_0 = R\sqrt{\frac{rMg}{K}}.$$

Parte 3

a) Linealización

Sean: $\quad \tilde{i} = i - i_0, \quad \tilde{y} = y - y_0, \quad \tilde{v} = v - v_0.$

La linealización de la representación en variables de estado de la parte 1 en torno al punto operación de la parte 2 es

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{i} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{Ki_0}{Lr} & 0 \\ \frac{2rKi_0}{J+Mr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}t} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

b) Función de transferencia

Aplicando la transformada de Laplace, con condiciones iniciales nulas, a las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución del estado del sistema linealizado:

$$\begin{aligned}\left(s+\frac{R}{L}\right)\tilde{I}(s)+\frac{Ki_0}{Lr}s\tilde{Y}(s) &= \frac{1}{L}\tilde{V}(s),\\ s^2\tilde{Y}(s) &= \frac{2rKi_0}{J+Mr^2}\tilde{I}(s).\end{aligned}$$

Eliminando $\tilde{I}(s)$ entre las dos ecuaciones anteriores:

$$H(s)=\frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{V}(s)}=\frac{\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}}{s\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{2(Ki_0)^2}{L(J+Mr^2)}\right)}=\frac{\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}}{s^3+\frac{R}{L}s^2+\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}\frac{Ki_0}{r}s}.$$

Parte 4 – Necesidad de la realimentación

La función de transferencia $H(s)$ es inestable, por lo que resulta prácticamente imposible operar el elevador en lazo abierto en un entorno del punto de operación. Es necesaria la realimentación para estabilizar el sistema.

Parte 5 – Diseño del controlador

Se pretende que el error en régimen ante una rampa de pendiente P sea menor que E (finito), por lo tanto el sistema realimentado tiene que ser al menos de tipo 1.

La transferencia $H(s)$ tiene un polo en $s=0$, por lo tanto alcanza con tomar $C(s)=G$, donde G es una constante (control proporcional), para que el sistema realimentado resulte de tipo 1.

Con esta elección para $C(s)$, la transferencia del sistema realimentado es

$$\frac{GH(s)}{1+GH(s)}=\frac{\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}G}{s^3+\frac{R}{L}s^2+\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}\frac{Ki_0}{r}s+\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}G}.$$

Para estudiar la estabilidad del sistema realimentado se construye el arreglo de Routh-Hurwitz:

s^3	1	$\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}\frac{Ki_0}{r}$
s^2	$\frac{R}{L}$	$\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}G$
s^1	$\frac{2rKi_0}{J+Mr^2}\left(\frac{Ki_0}{Lr}-\frac{G}{R}\right)$	
s^0	$\frac{2rKi_0}{L(J+Mr^2)}G$	

Del arreglo surge que el sistema realimentado es estable si y solo si

$$0<G<\frac{R}{L}\frac{Ki_0}{r}=\frac{R}{L}\sqrt{\frac{KMg}{r}}, \qquad (10)$$

donde se utilizó que $i_0=\sqrt{\frac{rMg}{K}}$.

El sistema realimentado tiene constante de velocidad

$$K_v = \lim_{s \to 0} sGH(s) = \frac{G}{\frac{Ki_0}{r}} = \frac{G}{\sqrt{\frac{KMg}{r}}}.$$

Para cumplir con el requerimiento de error en régimen se tiene que cumplir

$$\frac{P}{K_v} < E,$$

o equivalentemente,

$$G > \frac{P}{E}\sqrt{\frac{KMg}{r}}. \tag{11}$$

De las desigualdades (10) y (11), se concluye que se debe verificar

$$\frac{P}{E}\sqrt{\frac{KMg}{r}} < G < \frac{R}{L}\sqrt{\frac{KMg}{r}} \tag{12}$$

para que se cumpla el requerimiento de error en régimen.

Es posible elegir G tal que verifique las condiciones (12) porque $\frac{P}{E} < \frac{R}{L}$. Entonces, la estrategia de control proporcional es la más sencilla que cumple con el requerimiento.

Ejercicio 5

Como la presión atmosférica en la superficie del embalse es P_0, la presión a la entrada de la turbina es $P_{in} = P_0 + \rho g h$

$$\Delta P = P_{in} - P_{out} = \rho g h$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{out} &= \frac{1}{R_h}\sqrt{\rho g h} \\ R_h &= \frac{1}{k.sen(\theta)} \end{aligned}\right\} Q_{out} = k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}$$

Potencia de salida de la planta

$$W_{out} = e.k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}$$

Balance volumétrico en el embalse

$$S.\dot{h} = Q_{in} - Q_{out} = Q_{in} - k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}$$

Voltaje de alimentación del posicionador

$$v_{in} = A\left(W_{ref} - W_{out}\right)$$

Transferencia del posicionador

$$\frac{\theta}{v_{in}}(s) = \frac{k_m}{s(1 + T_m s)}$$

Anti-transformando

$$T_m\ddot{\theta} + \dot{\theta} = k_m v_{in} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{T_m}\left[k_m v_{in} - \dot{\theta}\right]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{T_m}\left[k_m A\left(W_{ref} - e.k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}\right) - \dot{\theta}\right]$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema son

$$\begin{cases} \dot{h} = \frac{1}{S}\left[Q_{in} - k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}\right] \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{T_m}\left[k_m A\left(W_{ref} - e.k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h}\right) - \dot{\theta}\right] \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ W_{out} = e.k.sen(\theta)\sqrt{\rho g h} \end{cases}$$

Linealización en torno al punto definido por $\left[W_{out_0}, h_0\right]$

Determino θ_0

$$W_{out_0} = k.sen(\theta_0).\sqrt{\rho g h}$$

$$\theta_0 = sen^{-1}\left(\frac{W_{out_0}}{e.k.\sqrt{\rho g h}}\right)$$

Al anular las derivadas

$$Q_{in_0} = Q_{out_0} = \frac{W_{out_0}}{e} = \frac{W_{ref_0}}{e}$$

Una vez determinado el punto de operación, descompongo las señales en su punto de operación y su componente de pequeña señal

$$h = h_0 + \tilde{h}$$

$$\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \tilde{\dot{\theta}}$$

$$Q_{in} = Q_{in_0} + \widetilde{Q_{in}}$$

$$W_{ref} = W_{ref_0} + \widetilde{W_{ref}}$$

Para realizar la linealización es conveniente observar que la única componente no lineal del sistema corresponde a $Q_{out} = f(\theta, h)$

$$\widetilde{Q_{out}} = \left.\frac{\delta Q_{out}}{\delta \theta}\right|_{x_0,u_0} \tilde{\theta} + \left.\frac{\delta Q_{out}}{\delta h}\right|_{x_0,u_0} \tilde{h}$$

$$\widetilde{Q_{out}} = k\cos(\theta_0)\sqrt{\rho g h_0}.\tilde{\theta} + \frac{\sqrt{\rho g} k sen(\theta_0)}{2\sqrt{h_0}}.\tilde{h}$$

$$\tilde{\dot{h}} = \frac{\widetilde{Q_{in}}}{S} - \frac{\widetilde{Q_{out}}}{S}$$

$$\tilde{\dot{h}} = \frac{\widetilde{Q_{in}}}{S} - \frac{k\cos(\theta_0)\sqrt{\rho g h_0}}{S}.\tilde{\theta} - \frac{\sqrt{\rho g} k sen(\theta_0)}{2\sqrt{h_0}}.\tilde{h}$$

$$\tilde{\ddot{\theta}} = \frac{k_m A}{T_m}\widetilde{W_{ref}} - \frac{k_m A}{T_m} e \widetilde{Q_{out}} - \frac{1}{Tm}\tilde{\dot{\theta}}$$

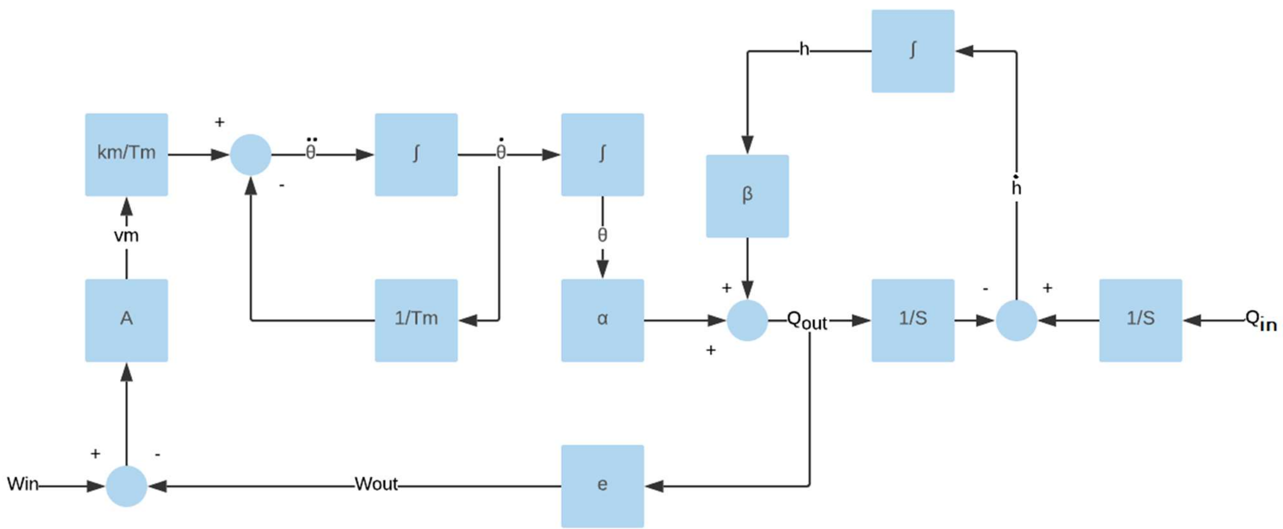
$$\tilde{\ddot{\theta}} = \frac{k_m A}{T_m}\widetilde{W_{ref}} - \frac{k_m A e}{T_m} k\cos(\theta_0)\sqrt{\rho g h_0}.\tilde{\theta} - \frac{k_m A e}{T_m}\frac{\sqrt{\rho g} k sen(\theta_0)}{2\sqrt{h_0}}.\tilde{h} - \frac{1}{Tm}\tilde{\dot{\theta}}$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}$$

$$\widetilde{W_{out}} = e.\widetilde{Q_{out}}$$

$$\widetilde{W_{out}} = ek\cos(\theta_0)\sqrt{\rho g h_0}.\tilde{\theta} + e\frac{\sqrt{\rho g} k sen(\theta_0)}{2\sqrt{h_0}}.\tilde{h}$$

Construyendo primero la señal intermedia $\widetilde{Q_{out}}$



Con $\alpha = kcos(\theta_0)\sqrt{\rho g h_0}$, $\beta = \frac{\sqrt{\rho g} ksen(\theta_0)}{2\sqrt{h_0}}$

Para estudiar la estabilidad del sistema debo estudiar el signo de los polos de la transferencia de lazo cerrado.

Para hacer esto, determino la transferencia de lazo abierto. Corto el lazo de realimentación en W_{out}

$$W_{out}^{OUT} = A.\frac{k_m}{s(1+T_m s)}.\frac{Q_{out}}{\theta}(s).e.W_{out}^{IN}$$

$$\frac{Q_{out}}{\theta}(s) = \frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{S}s}$$

$$W_{out}^{OUT} = A.\frac{k_m}{s(1+T_m s)}.\frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{S}s}.e.W_{out}^{IN}$$

$$H_{OL}(s) = A.\frac{k_m}{s(1+T_m s)}.\frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{S}s}.e$$

Sea $H_{OL}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$. La transferencia de lazo cerrado del sistema tiene como denominador $p(s)+q(s)$. Estudiando el signo de sus raíces mediante Routh Hurwitz podemos determinar el margen de estabilidad del sistema.

$$p(s)+q(s) = \frac{T_m\beta}{S}s^3 + \left(T_m + \frac{\beta}{S}\right)s^2 + s + A.k_m.\alpha.e$$

p_3	$\frac{T_m\beta}{S}$	1
p_2	$\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right)$	$A.k_m.\alpha.e$
p_1	$\frac{\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right) - \frac{T_m\beta}{S}A.k_m.\alpha.e}{\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right)}$	0
p_0	$A.k_m.\alpha.e$	

Se cumple que:

- $\frac{T_m\beta}{S} > 0 \ \forall A$
- $\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right) > 0 \ \forall A$
- $\frac{\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right) - \frac{T_m\beta}{S}A.k_m.\alpha.e}{\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right)} > 0$

  $$\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right) > \frac{T_m\beta}{S}A.k_m.\alpha.e$$

  $$A < \frac{\left(T_m + \frac{\beta}{S}\right)}{\frac{T_m\beta}{S}.k_m.\alpha.e}$$
- $A > 0$

El sistema completo es esencialmente un seguidor de W_{ref}. El sistema no se estabilizará hasta que ambas señales sean iguales, por lo que no que la diferencia en el valor de régimen de ambos modelos es nula.