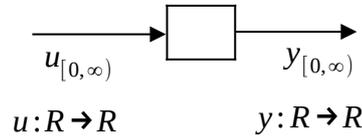


**Ejercicio 1** (Total 12 puntos: 1 punto por correcta; -1 punto por incorrecta)

Considere los siguientes sistemas.

$$t \geq 0$$



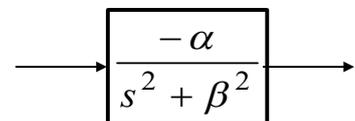
¿Son estables? ¿Son lineales?

Sistema	¿Estable?		¿Lineal?	
	SI	NO	SI	NO
$y(t) = \int_0^t \frac{u(\sigma)}{t-\sigma+1} \cdot d\sigma$		x	x	
$y(t) = \int_0^t \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} \cdot d\sigma$	x		x	
$y(t) = \int_{t/2}^t \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2} \cdot d\sigma$	x		x	
$y(t) = 3 \cdot u(t+1) + 4$		x		x
$y(t) = u(e^{-t})$	x		x	
$y(t) = \text{sen}(u(t))$	x			x

**Ejercicio 2** (6 puntos)

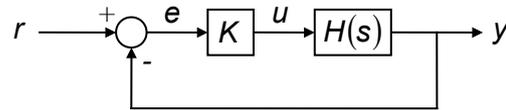
1) El sistema no es BIBO estable. Entre otros posibles argumentos:

- i) tiene polos en  $\pm j\beta$  (sobre el eje imaginario, es decir con parte real no negativa estricta).
- ii) su respuesta a impulso  $h(t)$  no es absolutamente integrable.
- iii) responde a la entrada acotada  $u(t) = \text{sen}(\beta t)$  con una salida que diverge para  $t \rightarrow \infty$



**Ejercicio 3 (7 puntos)**

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1}, \quad y \quad K > 0.$$



**Ramas:**

Lazo abierto, Cero: -1, Polos : +1, +1 (doble).

==> Hay dos ramas, parten del polo doble en +1 ( a ± 90°). Una llega al cero en -1, la otra tiende a -∞ (asíntota) por el eje real.

**Parte del eje real en el LGP:** la semirecta a la izquierda del cero en -1.

**Estabilidad (cortes con j ω):** La tabla para el criterio de Routh-Hurwitz es

$f_2(s)$	1	K+1
$f_1(s)$	k-2	0
$f_0(s)$	K+1	0

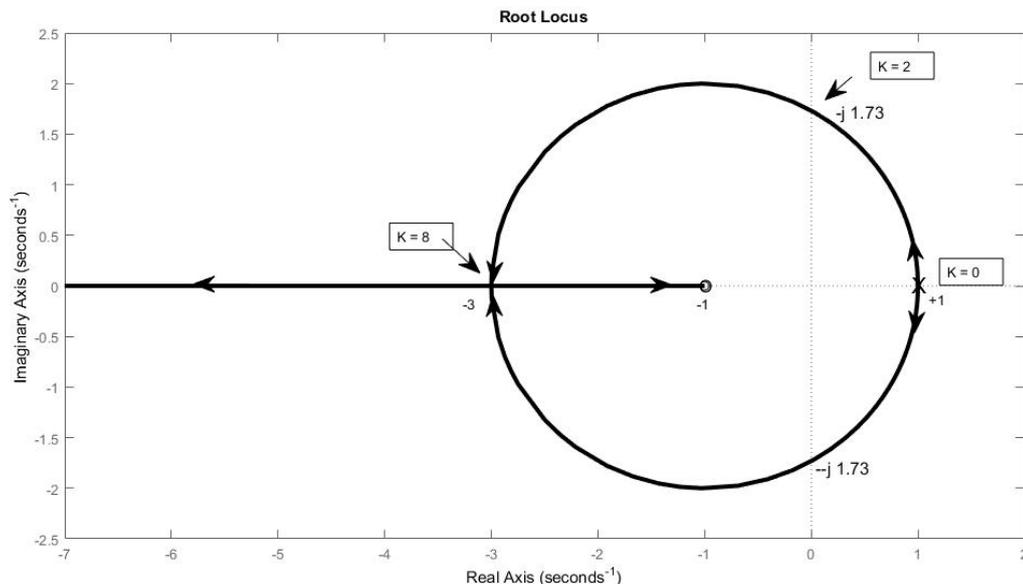
El número de cambios de signo en la primer columna es: 1 si  $K < -1$ , 0 si  $K > 2$ ,

Entonces el sistema es estable si y solo si  $K > 2$

En  $K=2$  los polos del lazo cerrado son  $\pm j(3)^{0.5}$ , por lo que hay dos ramas que entran al semiplano izquierdo por esos dos puntos en  $k=2$ .

**Puntos múltiples:**

$$dH(s) / ds = 0 \Rightarrow (s-1)^2 - 2(s+1)(s-1) = 0 \Rightarrow s = 1 \text{ (con } k=0), s = -3 \text{ (con } k=8)$$



### Ejercicio 4 (solución)

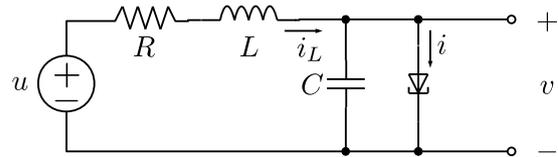
#### Parte 1

Sea  $i_L$  la corriente por el inductor, con el sentido que se indica en la figura.

Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema de entrada  $u$  y salida  $v$  son las siguientes:

$$L \frac{di_L}{dt} = u - Ri_L - v, \quad (1)$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_L - v(2v^2 - 6v + 5). \quad (2)$$



Alcanza con tomar  $i_L$  y  $v$  como variables de estado para obtener la siguiente representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}v + \frac{1}{L}u \\ \frac{1}{C}i_L - \frac{2v^3 - 6v^2 + 5v}{C} \end{bmatrix} \\ [v] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ v \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

#### Parte 2

De (3), se tiene que en equilibrio:

$$\begin{cases} v = u - Ri_L \\ i_L = 2v^3 - 6v^2 + 5v \end{cases} \quad (4)$$

Se pretende que para  $u = U_0$ , sea  $v = V_0 = 1$ . Por lo tanto, debe ser:  $i_L = I_{L0} = 1$  y  $U_0 = R \cdot 1 + 1$ . Luego, como  $R = \frac{1}{2}$ ,

$$U_0 = \frac{3}{2}.$$

De (4), para  $u = U_0$ :  $v = U_0 - R(2v^3 - 6v^2 + 5v)$ . Sustituyendo  $R$  y  $U_0$ :

$$v = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2v^3 - 6v^2 + 5v).$$

Las soluciones de la ecuación anterior son las raíces del polinomio

$p(v) = 2v^3 - 6v^2 + 7v - 3$ , que tiene una raíz en 1 por la forma en que se determinó  $U_0$ .

Las otras dos raíces de  $p(v)$ , son las raíces de  $2v^2 - 4v + 3$  que no son reales. Entonces,

para  $U_0 = \frac{3}{2}$ , el punto de operación  $(i_L, v) = (I_{L0}, V_0) = (1, 1)$  es el único punto de operación posible.

#### Parte 3

Sean:  $\tilde{i}_L = i_L - I_{L0}$ ,  $\tilde{v} = v - V_0$ ,  $\tilde{u} = u - U_0$ . La linealización de (3) es:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} (6V_0^2 - \frac{1}{L} 12V_0^2 + 5) \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{u}] \\ \tilde{v} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $V_0$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{u}] \\ \tilde{v} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \end{cases}$$

La función de transferencia correspondiente a la linealización es:  $\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}(s) = C(sI - A)^{-1} B$ , donde  $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $C = [0 \quad 1]$ .

Operando,  $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s - 2 & -1 \\ 2 & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  donde  $\Delta(s) = s^2 - \frac{3}{2}s + 1$ .

Entonces, la función de transferencia es:

$$\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{2}{s^2 - \frac{3}{2}s + 1}$$

Los polos de la función de transferencia son las raíces de  $\Delta(s)$ :  $\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}$  y  $\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{7}}{4}$ .

El sistema linealizado es *inestable* porque su función de transferencia tiene polos con parte real positiva.

#### Parte 4

Se tiene que  $v(0) = 1$  y  $\dot{v}(0) = \frac{1}{5}$ . Como  $C\dot{v}(0) = i_L(0) - i(0)$ , debe ser:

$$i_L(0) = C\dot{v}(0) + 2v^3(0) - 6v^2(0) + 5v(0) = \frac{11}{10}$$

El estado inicial "en pequeña señal" es:

$$\begin{cases} \tilde{i}_L(0) = i_L(0) - I_{L0} = \frac{1}{10} - 1 = -\frac{9}{10} \\ \tilde{v}(0) = v(0) - V_0 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Según el modelo linealizado, para  $t \geq 0$ :

$$v(t) \approx V_0 + \tilde{v}(t) = 1 + Ce^{At} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde  $e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$ .

Operando,

$$\mathcal{L} \{ \tilde{v}(t) \} = \tilde{v}(s) = [0 \quad 1] \frac{1}{\Delta(s)} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{5}}{s^2 - \frac{3}{2}s + 1} = \frac{1}{5} \frac{4}{\sqrt{7}} \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{(s - \frac{3}{4})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{4})^2}$$

Antitransformando y sustituyendo en (5) resulta la estimación:

$$v(t) \approx 1 + \frac{4\sqrt{7}}{35} e^{\frac{3}{4}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right), \text{ para } t \geq 0. \quad (6)$$

Según (6), el estado  $(i_L(t), v(t))$  abandona todo entorno del punto de operación  $(I_{L0}, V_0) = (1, 1)$  (en torno al cual se linealizó). Por lo tanto, no cabe esperar que (6) sea una buena aproximación, excepto en un intervalo de tiempo de la forma  $[0, \epsilon)$ , con  $\epsilon$  suficientemente chico.

### Parte 5

Para  $U_0 = \frac{3}{2}$ , existe solamente un punto de operación que es inestable. Entonces, el circuito no puede ser ni un monoestable (un punto de operación estable), ni un biestable (dos puntos de operación estables). Por lo tanto, de los tres nombres, el más apropiado es: *oscilador*.

Ejercicio 5 (solución)

a) Ley de mallas en el motor

$$V_1 = R_A I + \epsilon_M$$

Segunda cardinal en el eje de la válvula

$$J\ddot{\theta} = \tau_M - b \cdot \dot{\theta}$$

Ecuaciones del motor

$$\tau_M = K_M I$$

$$\epsilon_M = K_M \dot{\theta}$$

Entonces

$$J\ddot{\theta} = \tau_M - b \cdot \dot{\theta} = K_M I - b \cdot \dot{\theta} = \frac{K_M [V_1 - \epsilon_M]}{R_A} - b \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K_M [V_1 - K_M \dot{\theta}]}{J R_A} - \frac{b}{J} \cdot \dot{\theta} = \frac{K_M}{J R_A} V_1 - \left[ \frac{K_M^2}{J R_A} + \frac{b}{J} \right] \dot{\theta}$$

Principio de conservación de la energía en la cámara

$$c V_0 \dot{T} = \frac{V_2^2}{R_c} + c(T_0 - T)q = \frac{V_2^2}{R_c} + c(T_0 - T)K_q \text{sen}(\theta)$$

$$\dot{T} = \frac{V_2^2}{c V_0 R_c} + \frac{K_q}{V_0} (T_0 - T) \text{sen}(\theta)$$

b) Tomando como vector de estados  $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ T \end{bmatrix}$ , como entrada  $u = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$  y como salida  $y = \begin{bmatrix} T \\ q \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{K_M}{J R_A} V_1 - \left[ \frac{K_M^2}{J R_A} + \frac{b}{J} \right] \dot{\theta} \\ \frac{V_2^2}{c V_0 R_c} + \frac{K_q}{V_0} (T_0 - T) \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} T \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ K_q \cdot \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Determino el punto de operación del sistema:  $\dot{x} = 0$

$$\frac{K_M}{JR_A} V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 0$$

$$\frac{V_2^2}{cV_0R_c} + \frac{K_q}{V_0} (T_0 - T) \text{sen}(\theta^*) = 0 \rightarrow \frac{V_2^2}{cR_c} = K_q (T - T_0^*) \text{sen}(\theta^*)$$

$$T = \frac{V_2^{*2}}{cR_c K_q \text{sen}(\theta^*)} + T_0^* = 32,7^\circ\text{C}$$

$$q^* = K_q \text{sen}(\theta^*) = 1,41l$$

Tomando derivadas parciales y evaluando en el punto de operación

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\left[\frac{K_M^2}{JR_A} + \frac{b}{J}\right] & 0 \\ \frac{K_q}{V_0} (T_0 - T^*) \cos(\theta^*) & 0 & -\frac{K_q}{V_0} \text{sen}(\theta^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \tilde{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_M}{JR_A} & 0 \\ 0 & \frac{2V_2^*}{cV_0R_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ K_q \cos(\theta^*) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \tilde{t} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -27,5 & 0 \\ -18,0 & 0 & -1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \tilde{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1,4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \tilde{t} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculo las transferencias del sistema

$$\theta s^2 = -27,5\theta s + 5V_1$$

$$\theta[s + 27,5]s = 5V_1 \rightarrow \frac{\theta}{V_1} = \frac{5}{(s + 27,5)s}$$

$$\frac{q}{V_1} = \frac{7}{(s + 27,5)s}$$

$$Ts = -18,0\theta - 1,4T + 6V_2$$

$$(s + 1,4)T = -18,0\theta + 6V_2 = \frac{90}{(s + 27,5)s} V_1 + 6V_2$$

$$T = \frac{-90}{(s + 27,5)(s + 1,4)s} V_1 + \frac{6}{(s + 1,4)} V_2$$

c) Si  $V_2$  crece 10%,  $\tilde{v}_2 = 0,6V$ ,  $\tilde{v}_1 = 0$

Calculo diferencias en modelo de gran señal

$$\theta^{**} = \theta^*$$

$$q^{**} = q^*$$

$$\frac{V_2^2}{cV_0R_c} + \frac{K_q}{V_0}(T_0 - T^{**})\text{sen}(\theta^*) = 0$$

$$T^{**} = \frac{V_2^{*2}}{cR_cK_q\text{sen}(\theta^*)} + T_0^* = 35,40^\circ\text{C}$$

Calculo diferencias en modelo de pequeña señal

$$\theta^{**} = \theta^*$$

$$q^{**} = q^*$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{t}(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{6}{(s + 1,4)} \cdot \frac{v_2}{s} s = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{t}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{t}(t) = 2,57^\circ\text{C}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{T}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{t}(t) + T_0 = 35,27^\circ\text{C}$$

En porcentaje

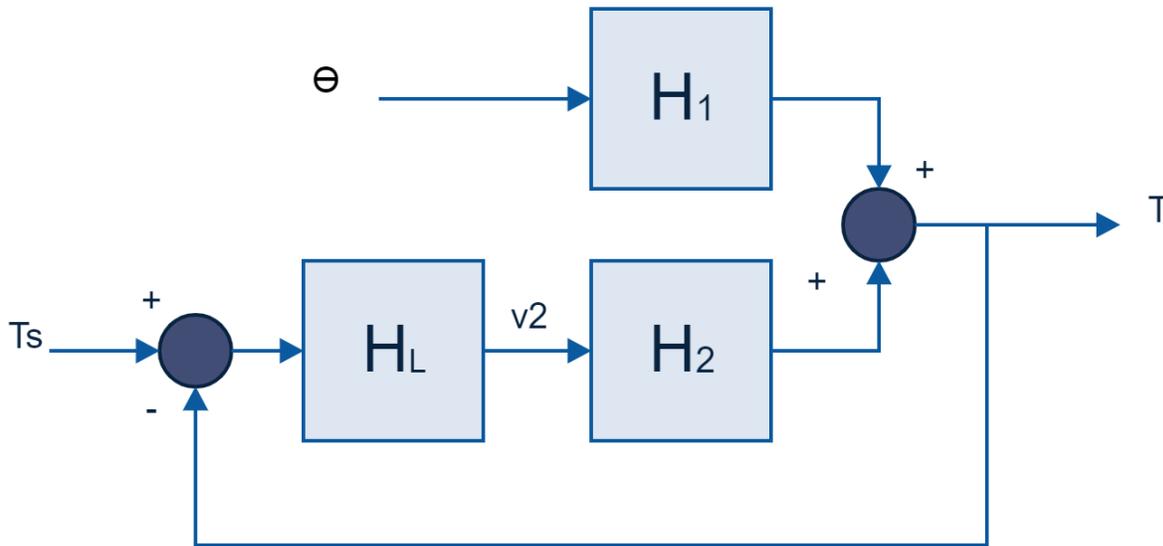
$$e_{T1} = 0,36\%$$

$$e_q = 0\%$$

d)

$$T = f(\theta, v_2) = -\frac{18,0}{s + 1,4}\theta + \frac{6}{s + 1,4}v_2$$

Sea  $H_1(s) = -\frac{18,0}{s+1,4}$  y  $H_2(s) = \frac{6}{s+1,4}$ , se propone la siguiente estructura



Con  $H_L(s)$  a definir. A partir del diagrama,

$$T = H_1 \left[ \frac{1}{1 + H_L H_2} \right] \theta + \frac{H_L H_2}{1 + H_L H_2} T_s$$

Usando TVF

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ H_1 \left[ \frac{1}{1 + H_L H_2} \right] \theta \cdot \frac{1}{s} + \frac{H_L H_2}{1 + H_L H_2} T_s \cdot \frac{1}{s} \right] s$$

Es fácil ver que si  $H_L(s) = \frac{1}{s}$  se cumple la premisa