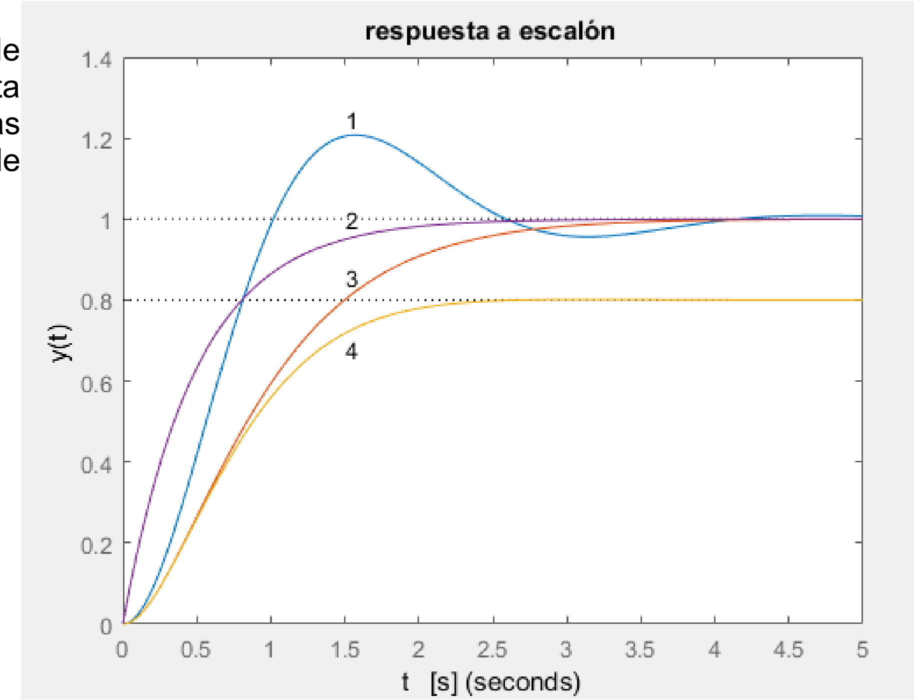
SOLUCIÓN DEL PARCIAL 2016 DE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONTROL

Ejercicio 1

(Total 6 puntos: hasta -1.5 puntos por respuesta incorrecta)

Indique a cuál curva de la figura de la derecha corresponde la respuesta a escalón de los siguientes sistemas representados por sus funciones de transferencia:

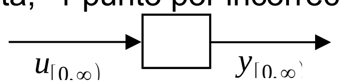
Transferencia H(s)	Curva Nº
$\frac{4}{s^2+4.s+4}$	3
$\frac{4}{s^2+4.s+5}$	4
$\frac{5}{s^2+2.s+5}$	1
$\frac{2}{(s+2)}$	2



Ejercicio 2

(Total 8 puntos: 1 punto por correcta; -1 punto por incorrecta)

Considere los siguientes sistemas.

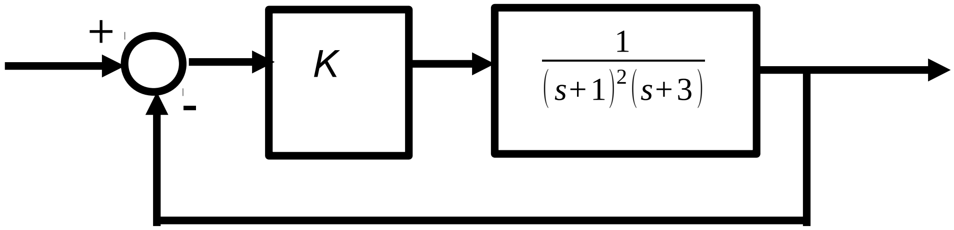


¿Son lineales? ¿Son estables? $u:R\rightarrow R$ $y:R\rightarrow R$ $0\leq t<\infty$

Sistema	¿lineal? SI	¿lineal? NO	¿estable? SI	¿estable? NO
$y(t)=\int_0^t \frac{u(\sigma)}{t-\sigma+1}.d\sigma$	x			x
$y(t)=\int_0^t \frac{u(\sigma)}{(t-\sigma+1)^2}.d\sigma$	x		x	
$y(t)=\alpha.u(t)+\beta$ Con $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ ctes.		x		x
$y(t)=u(\alpha.t+\beta)$ Con $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ ctes.	x		x	

Ejercicio 3 (5 puntos)

Sea el sistema realimentado de la figura, donde K es un número real.
Determine el conjunto de valores de K para el cual el sistema realimentado es estable.



Solución:

La transferencia del lazo cerrado es: $\frac{K}{s^3+5s^2+7s+3+K}$

La Tabla para el criterio de Routh-Hurwitz queda entonces:

$f_3(s)$	1	7
$f_2(s)$	5	3+ K
$f_1(s)$	(35-3-K) /5	
$f_0(s)$	3+ K	

El número de cambios de signo en la primer columna es:
1 si K<- 3, 0 si - 3<K<32, 2 si K>32
Entonces el sistema es estable si y solo si $\boxed{-3 < K < 32}$

Ejercicio 4 (5 puntos)

1. Función de transferencia:

$$H(s) = \frac{2}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{40}{(s+2)(s+10)} = 5\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+10}\right)$$

2.
a) Respuesta $Y(s)$ ante un escalón unitario $U(s) = \frac{1}{s}$:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{2}{s} - \frac{\frac{5}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+10},$$

$$y(t) = \begin{cases} 2 - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-10t} & \text{para } t \geq 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

b) Valor final: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$.

c) Sobretiro: $M_p = 0$ (es un sistema de segundo orden sobreamortiguado sin ceros).

d) Tiempo de establecimiento: $t_s^{5\%} \approx 1,61\ s$.

Ejercicio 5 (15 puntos)

1) Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{1}{m}(x-L)\left(\alpha-\beta(x-L)^2\right)-\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{F}{m} \end{bmatrix} \\ x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

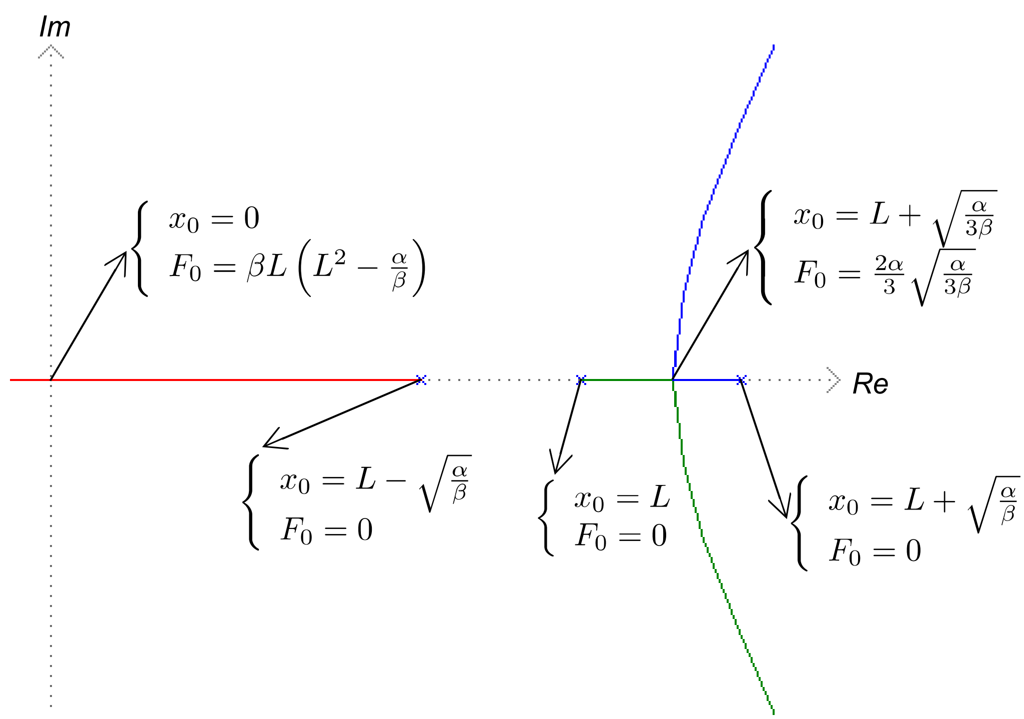
2) Puntos de equilibrio:

$x = x_0$,

$F = F_0 = (x_0 - L)\left(\alpha - \beta(x_0 - L)^2\right)$.

3) Los puntos de equilibrio $x_0 > 0$ son las raíces <u>reales positivas</u> de:

$$P_K(x_0) = \underbrace{(x_0 - L)\left((x_0 - L)^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}_{p(x_0)} + \frac{F_0}{\beta}\underbrace{1}_{q(x_0)}.$$



Intersección con el eje imaginario

$$P_K(x_0) = (x_0 - L)\left((x_0 - L)^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{F_0}{\beta}$$

$$P_K(x_0) = (x_0 - L)\left(x_0^2 - 2Lx_0 + L^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{F_0}{\beta} = x_0^3 - 3Lx_0^2 + \left(3L^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x_0 - L\left(L^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{F_0}{\beta}$$

x_0^3	1	$3L^2-\frac{\alpha}{\beta}$
x_0^2	$-3L$	$-L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{F_0}{\beta}$
x_0^1	$\frac{\frac{F_0}{\beta}-\left(2L\left(\frac{\alpha}{\beta}-4L^2\right)\right)}{3L}$	
x_0^0	$\frac{F_0}{\beta}-L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)$	

$\frac{F_0}{\beta}-\left(2L\left(\frac{\alpha}{\beta}-4L^2\right)\right)>0 \quad \forall F_0>0$ porque $\frac{\alpha}{\beta}-4L^2<0$.

$\dfrac{F_0}{\beta}-L\left(L^2-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)>0 \quad \forall F_0>\beta L\left(L^2-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)>0.$

Si $F_0<\beta L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)$, <u>tres</u> cambios de signo.

Si $F_0>\beta L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)$, <u>dos</u> cambios de signo.

Puntos mútiples.

$H(x_0)=\frac{q(x_0)}{p(x_0)}=\frac{1}{(x_0-L)\left((x_0-L)^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{1}{x_0^3-3Lx_0^2+\left(3L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)x_0-L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)}$

$H'(x_0)=-\frac{3x_0^2-6Lx_0+3L^2-\frac{\alpha}{\beta}}{\left(x_0^3-3Lx_0^2+\left(3L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)x_0-L\left(L^2-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^2}$

$H'(x_0)=0 \quad\Rightarrow\quad x_0^2-2Lx_0+L^2-\frac{\alpha}{3\beta}=0 \quad\Rightarrow\quad x_0=L\pm\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$

$L+\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\in \mathrm{LGP},$

$L-\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\notin \mathrm{LGP}.$

$\frac{1}{H\left(x_0=L+\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\right)}=\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\left(-\frac{2\alpha}{3\beta}\right),$

$\frac{F_0}{\beta}=-\frac{1}{H\left(x_0=L+\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\right)}=\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\left(\frac{2\alpha}{3\beta}\right) \quad \Rightarrow F_0=\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}.$

4) Representación en variables de estado linealizada:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{m}\left(\alpha-3\beta\left(x_0-L\right)^2\right) & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}\tilde{F}\\ \tilde{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}\end{cases},$$

donde $\tilde{x}=x-x_0$ y $\tilde{F}=F-F_0$.

5) La función de transferencia del sistema linealizado es:

$\frac{\tilde{x}}{\tilde{F}}(s)=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{1}{m}\left(\alpha-3\beta(x_0-L)^2\right)}.$

i) Es estable si y solamente si $\alpha-3\beta\left(x_0-L\right)^2>0$. Es decir, sii $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}-(x_0-L)\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}+(x_0-L)\right)>0 \iff x_0\in\left(L-\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}},L+\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}\right).$

Para $F_0>0$, alcanza con exigir $L<x_0<L+\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}$; ya que $x_0\notin\left[L-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},L\right]$ para $F_0>0$.

ii) Para que el sistema linealizado resulte críticamente amortiguado se debe elegir: $b=2\sqrt{m}\sqrt{\alpha-3\beta\left(x_0-L\right)^2}$.

Ejercicio 6 (26 puntos)

1) Representación en variables de estado

2da. Ley de Newton aplicada al pistón de T_1:

$$(p_1 - \rho g h_1)\, a - b\dot{h}_1 - kV - p_{\mathrm{atm}} a = 0. \quad \text{(I)}$$

2da. Ley de Newton aplicada al pistón de T_2:

$$(p_2 - \rho g h)\, A - Mg - p_{\mathrm{atm}} A = M\ddot{h}. \quad \text{(II)}$$

Volumen del líquido:

$$V_L = Ah + ah_1 + cL. \quad \text{(III)}$$

Balance volumétrico:

$$A\dot{h} = \gamma\sqrt{p_1 - p_2}. \quad \text{(IV)}$$

De (I) y (II):

$$p_1 - p_2 + \rho g\,(h - h_1) - \tfrac{b}{a}\dot{h}_1 + \tfrac{Mg}{A} - \tfrac{k}{a}V = -\tfrac{M}{A}\ddot{h}.$$

Utilizando (III) y (IV) para eliminar $p_1 - p_2$ y h_1 de la última ecuación:

$$\ddot{h} + \tfrac{A^3}{\gamma^2 M}\dot{h}^2 + \tfrac{bA^2}{a^2 M}\dot{h} + \rho g \tfrac{A}{M}\left(1 + \tfrac{A}{a}\right) h = \tfrac{kA}{aM}V - g + \tfrac{A\rho g}{aM}\left(V_L - cL\right).$$

Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{A^3}{\gamma^2 M}\dot{h}^2 - \frac{bA^2}{a^2 M}\dot{h} - \rho g \frac{A}{M}\left(1 + \frac{A}{a}\right) h + \frac{kA}{aM}V - g + \frac{A\rho g}{aM}\left(V_L - cL\right) \end{bmatrix} \\ h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

2) Punto de equilibrio

Para que $h = H_0$ sea una posición de equilibrio para una carga M, el voltaje aplicado al actuador debe ser:

$$V = V_0(M) = \tfrac{\rho g a}{k}\left(\left(1 + \tfrac{A}{a}\right) H_0 - \tfrac{V_L - cL}{a}\right) + \tfrac{aMg}{Ak}.$$

Se debe cumplir $h_{10} = \dfrac{1}{a}\left(V_L - AH_0 - cL\right) \geq 0$, entonces debe verificarse

$$V_L \geq V_{L\min} = AH_0 + cL$$

para que sea posible mantener la carga en equilibrio a una altura $h = H_0$.

3) Linealización

i) Sean $\tilde{h} = h - H_0$ y $\tilde{V} = V - V_0(M)$. El modelo linealizado es:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \dot{\tilde{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho g \frac{A}{M}\left(1 + \frac{A}{a}\right) & -\frac{bA^2}{a^2 M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \dot{\tilde{h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{kA}{aM} \end{bmatrix}\tilde{V} \\ h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \dot{\tilde{h}} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

ii) La función de transferencia del modelo linealizado es:

$$\tfrac{\tilde{h}}{\tilde{V}}(s) = \frac{\alpha\frac{k}{M}}{s^2 + \alpha^2\frac{b}{M}s + \alpha(1+\alpha)\frac{\rho g a}{M}} \text{ donde } \alpha = \tfrac{A}{a}.$$

4) Error en equilibrio por apartamiento con respecto a la masa nominal

Para la masa nominal M_0:

$$V = V_0(M_0) = \tfrac{\rho g a}{k}\left(\left(1 + \tfrac{A}{a}\right) H_0 - \tfrac{V_L - cL}{a}\right) + \tfrac{ag}{Ak}M_0.$$

Para una masa M cualquiera:

$$V = V_0(M) = \frac{\rho g a}{k}\left(\left(1+\frac{A}{a}\right)H - \frac{V_L - cL}{a}\right) + \frac{ag}{Ak}M.$$

Entonces:

$$0 = \frac{\rho g a}{k}\left(1+\frac{A}{a}\right)(H - H_0) + \frac{ag}{Ak}(M - M_0).$$

De donde:

$$\frac{H-H_0}{M-M_0} = -\frac{\frac{1}{A}}{\rho\left(1+\frac{A}{a}\right)} = -\frac{1}{\rho a\alpha(1+\alpha)} \approx -\frac{1}{\rho a \alpha^2}.$$

<u>5) Sistema realimentado</u>

Como $\alpha \gg 1$,

$$\frac{\tilde{h}}{\tilde{V}}(s) \approx P(s) = \frac{\alpha\frac{k}{M}}{s^2 + \alpha^2\frac{b}{M}s + \alpha^2\frac{\rho g a}{M}}.$$

.

a) Utilizando el modelo linealizado, la altura de equilibrio (en gran señal) correspondiente a $\tilde{h}_R = 1\,\mathrm{m}$ es:

$$h = H_0 + \frac{P(0)}{1+k_S P(0)}k_P(1\mathrm{m}) = H_0 + \frac{k}{\alpha\rho g a + k_S k}k_P(1\mathrm{m})$$

ya que $P(0) = \frac{k}{\alpha\rho g a}$.

b) La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_R}(s) = k_P\frac{P(s)}{1+k_S P(s)}.$$