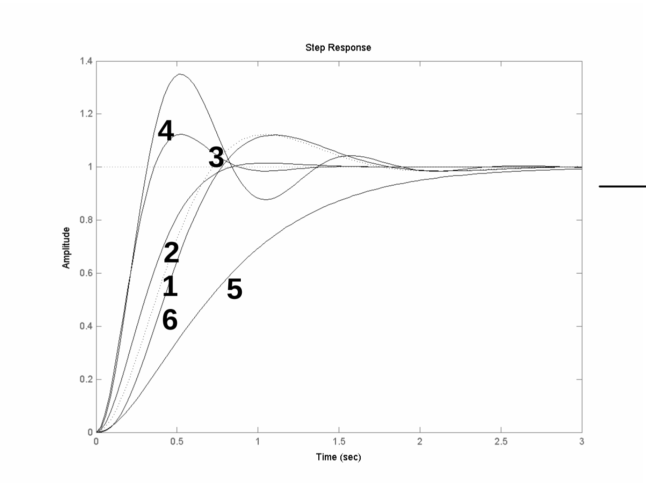
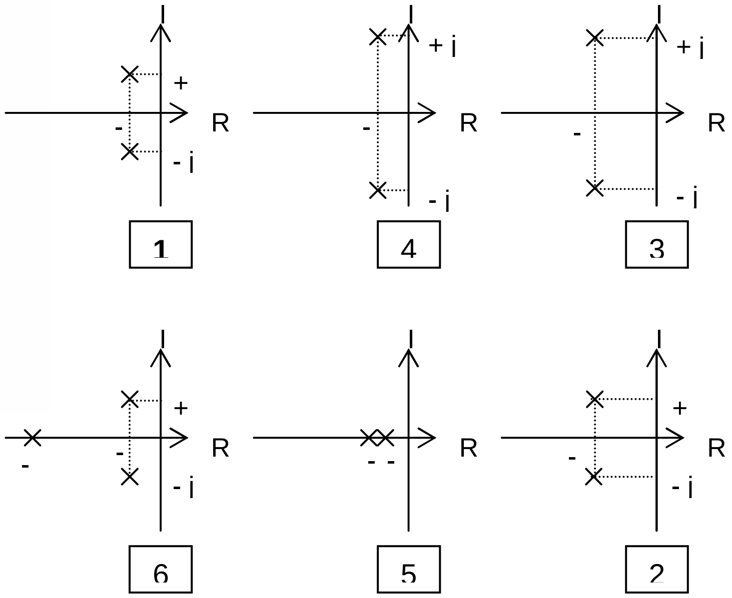
Carrera:	**INGENIERÍA ELÉCTRICA**	**Instituto de Ingeniería Eléctrica**
Materia:	**CONTROL**	
Asignatura:	**INTRODUCCIÓN A LA TORÍA DE CONTROL**	**Departamento de Sistemas y Control**
Plan:	**97**	
Fecha:	**04/10/2013**	**PRUEBA PARCIAL**

Puntaje total: 65 puntos   Tiempo disponible: 3:40 horas

Ejercicio 1

(Total 8 puntos: hasta -1 punto por respuesta incorrecta)





Ejercicio 2

(4 puntos si correcta; -1 punto si incorrecta)

Respuesta correcta	**e)**

Ejercicio 3

(5 puntos)

La transferencia del lazo cerrado es: $\dfrac{K}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + K}$

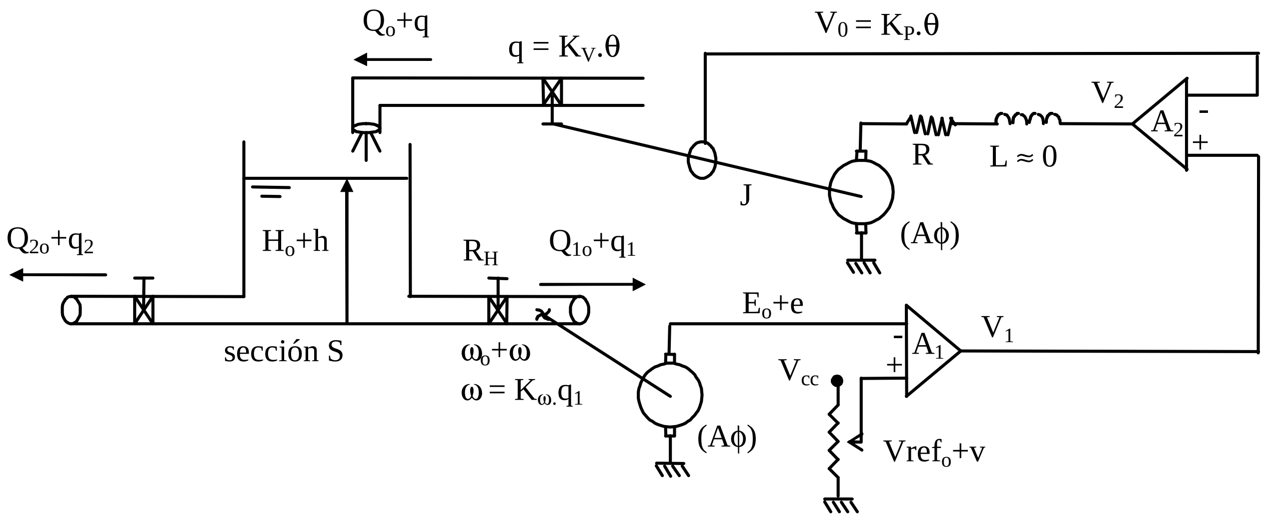
La Tabla para el criterio de Routh-Hurwitz queda:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 4 & 2+K \\ s^1 & \dfrac{20-(2+K)}{4} & \\ s^0 & 2+K & \end{array}$$

El número de cambios de signo en la primer columna es:
1 si K < -2; 0 si –2 < K < 18; 2 si K > 18

Entonces el sistema es estable si $\boxed{-2 < K < 18}$

<u>Ejercicio 4</u> (32 puntos)



1) <u>Ecuaciones dinámicas en un entorno de la posición de equilibrio 6+3+3p)</u>

Balance de masa (volumétrico) al tanque: $S.\dot{h} = q - q_1 - q_2$

En el entorno del equilibrio, $R_H.q_1 = h$ y $q = K_V.\theta$, entonces: $\boxed{\dot{h} = \frac{K_V}{S}.\theta - \frac{1}{S.R_H}.h - \frac{1}{S}.q_2}$ (I)

Para el motor de CC: $\begin{cases} J.\ddot{\theta} = A\phi.I \\ V_2 = R.I + A\phi.\dot{\theta} \end{cases}$ y $\begin{cases} V_2 = A_2.(V_1 - V_0) = A_2.(A_1.(v-e) - K_P.\theta) \\ e = A\phi.\omega = A\phi.K_\omega.q_1 = \frac{A\phi.K_\omega}{R_H}.h \end{cases}$, por lo

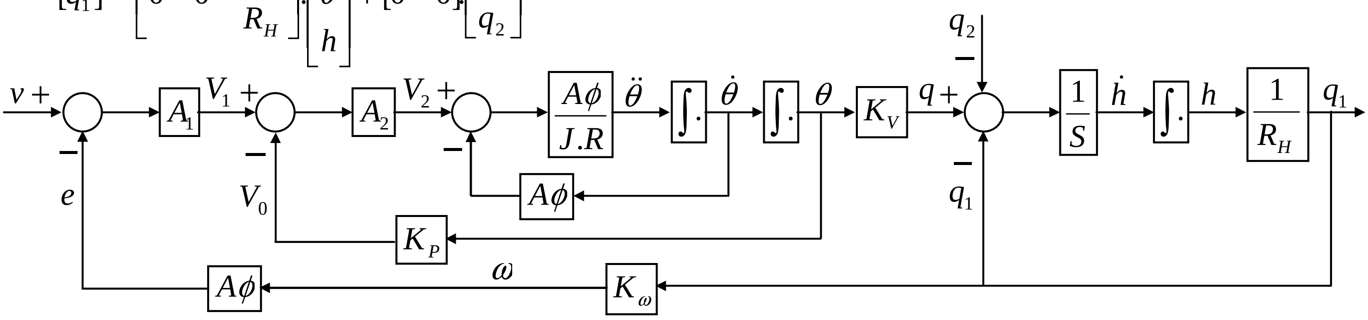
que $J.\ddot{\theta} = -\frac{(A\phi)^2}{R}.\dot{\theta} + \frac{A\phi}{R}.A_2.\left(A_1.v - \frac{A_1.A\phi.K_\omega}{R_H}.h - K_P.\theta\right)$, y así, se tiene:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{(A\phi)^2}{J.R}.\dot{\theta} - \frac{A\phi}{J.R}.A_2.K_P.\theta + \frac{A\phi}{J.R}.A_2.A_1.v - \frac{(A\phi)^2}{J.R}.A_2.A_1.\frac{K_\omega}{R_H}.h} \quad \text{(II)}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(A\phi)^2}{J.R} & -\frac{A\phi}{J.R}.A_2.K_P & -\frac{(A\phi)^2}{J.R}.A_2.A_1.\frac{K_\omega}{R_H} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_V}{S} & -\frac{1}{S.R_H} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A\phi}{J.R}.A_2.A_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$[q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R_H} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v \\ q_2 \end{bmatrix}$$



Datos numéricos para utilizar desde la parte 2) en adelante:

$S = 10{,}0\ m^2$	$R_H = 1\ s/m^2$ $\quad (R_H = \partial \Delta h / \partial q)$	
$L \approx 0$	$R = 0{,}40\ \Omega$	$J = 5{,}00\text{x}10^{-3}\ N.m.s^2/rad$
$K_V = 0{,}50\ m^3/s.rad$	$K_\omega = 2{,}00\ rad/m^3$	$K_P = 0{,}05\ V/rad$
$A\phi = 0{,}10\ V.s/rad$	A_1 y A_2 ctes. positivas	

2) Subsistema de entrada **V_1** y salida θ: **A_2** / sobretiro de 9.5% en la respuesta escalón (3+3p)

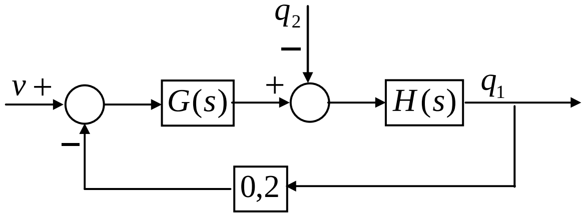
La transferencia

$$\frac{\theta}{V_1}(s) = \frac{\dfrac{A_2}{s}\cdot\dfrac{\dfrac{A\phi}{J.R}\cdot\dfrac{1}{s}}{1 + A\phi.\dfrac{A\phi}{J.R}\cdot\dfrac{1}{s}}}{1 + K_P\cdot\dfrac{A_2}{s}\cdot\dfrac{\dfrac{A\phi}{J.R}\cdot\dfrac{1}{s}}{1 + A\phi.\dfrac{A\phi}{J.R}\cdot\dfrac{1}{s}}} = \frac{A_2.A\phi / J.R}{s^2 + (A\phi)^2 / J.R\,.s + K_P.A_2.A\phi / J.R} = \frac{50.A_2}{s^2 + 5.s + 2{,}5.A_2}$$

Es de 2º orden sin ceros, por lo cual la condición de sobretiro del 9,5% se traduce en $\varsigma = 0{,}6$

Identificando términos: $\begin{cases} \omega_n^2 = 2{,}5.A_2 \\ 2.\varsigma.\omega_n = 5 \end{cases}$, de donde $\boxed{A_2 = \dfrac{(2{,}5)^2}{2{,}5.\varsigma^2} = 6{,}94}$

3) Para el sistema total, calcular el margen de variación de **A_1** para estabilidad (6p)



donde $G(s) = \dfrac{173{,}5.A_1}{s^2 + 5.s + 17{,}35}$

$$H(s) = \frac{0{,}1}{s + 0{,}1}$$

$$q_1 = \frac{G.H}{1 + 0{,}2.G.H}.v - \frac{H}{1 + 0{,}2.G.H}.q_2$$

El denominador es el mismo $d(s) = s^3 + 5{,}1.s^2 + 17{,}85.s + 1{,}735 + 3{,}47.A_1$

Y lo analizamos con el criterio de Routh:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 17{,}85 \\ s^2 & 5{,}1 & 1{,}735 + 3{,}47.A_1 \\ s^1 & 17{,}85 - \dfrac{1{,}735 + 3{,}47.A_1}{5{,}1} & \\ s^0 & 1{,}735 + 3{,}47.A_1 & \end{array}$$

de donde $\boxed{-0{,}5 < A_1 < 25{,}73}$

4) Respuesta en régimen (3+1p)

En régimen, $\displaystyle \lim_{s \to 0} \frac{q_1}{v}(s)\bigg|_{q_2 = cte} = \frac{10.A_1}{1 + 2.A_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 = 1/3}$

Para ese valor de A_1: $\boxed{\displaystyle \lim_{s \to 0} \frac{q_1}{q_2}(s)\bigg|_{v = cte} = -0{,}6}$

5) <u>Error en régimen (5p)</u>

Para tener error en régimen nulo ante variaciones del tipo escalón en **q_2**, es necesario que el sistema G(s) tenga un polo en el origen (así la transferencia en lazo cerrado desde **q_2** queda con un cero en el origen).

Entonces pruebo con $A_1 = \dfrac{k}{s}$ y veo si existe rango de k donde el sistema quede estable.

El nuevo denominador queda: $d'(s) = s^4 + 5{,}1.s^3 + 17{,}85.s^2 + 1{,}735.s + 3{,}47.k$

s^4	1	$17{,}85$	$3{,}47.k$
s^3	$5{,}1$	$1{,}735$	
s^2	$17{,}51$	$3{,}47.k$	
s^1	$1{,}735 - \dfrac{5{,}1.3{,}47.k}{17{,}51}$		
s^0	$3{,}47.k$		

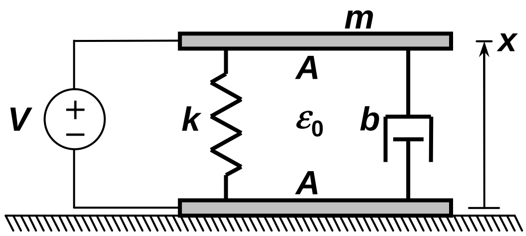
de donde se tiene que el sistema es estable $\Leftrightarrow$ $\boxed{0 < k < 1{,}72}$

<u>Ejercicio 5</u> (16 puntos)

1) <u>Ecuación del movimiento (3p)</u>

Segunda ley de Newton aplicada a la placa superior: $\boldsymbol{m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x} + F_e}$ (I)

Para $\boldsymbol{V = 0}$, $\boldsymbol{F_e = 0}$, y la posición de equilibrio es $\boldsymbol{x = x_0}$.



Capacidad variable: $\boldsymbol{C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{x}}$, y energía potencial electrostática: $\boldsymbol{U = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{x}V^2}$.

Fuerza electrostática: $\boldsymbol{F_e = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)_{\varphi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{x}V^2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2}$.

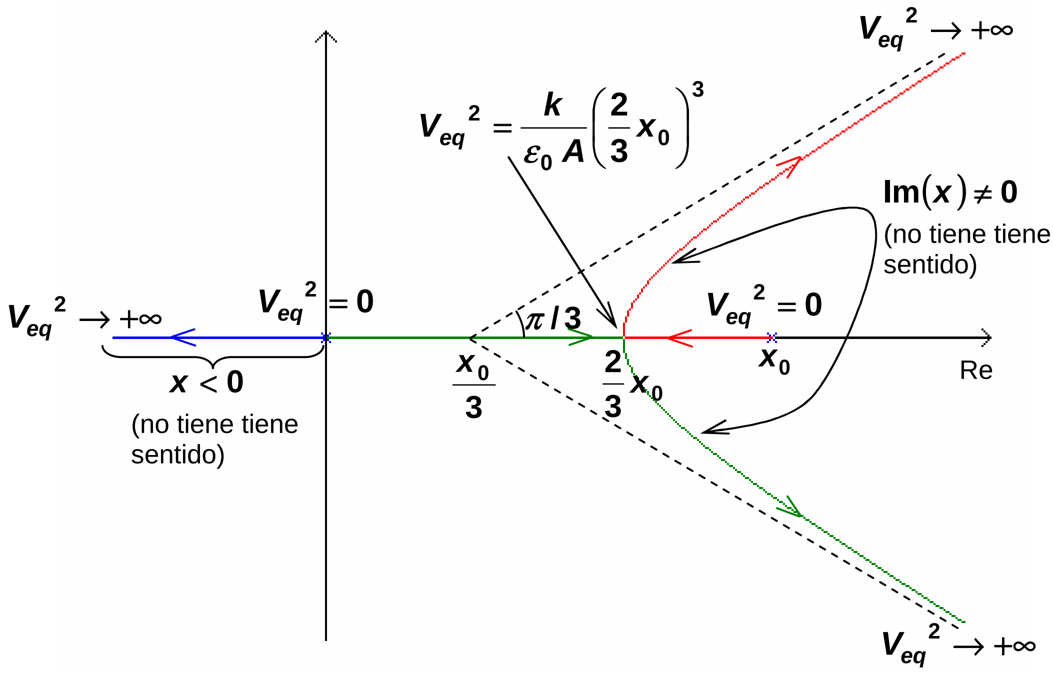
Sustituyendo en (I) se obtiene la ecuación del movimiento de la placa superior:

$$\boldsymbol{m\ddot{x} = -k(x - x_0) - b\dot{x} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2}.$$

2) <u>Puntos de equilibrio (2+5p)</u>

Para $\boldsymbol{V = V_{eq} > 0}$ constante, los puntos de equilibrio son las raíces reales positivas del polinomio: $\boldsymbol{2k(x - x_0)x^2 + V_{eq}{}^2\varepsilon_0 A}$.

El lugar geométrico positivo de las raíces de este polinomio, paramétrico en $\boldsymbol{V_{eq}{}^2}$, es el siguiente:



Centroide: $\dfrac{x_0}{3}$.

Condición necesaria para que x sea un punto múltiple:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-x_0)x^2}\right) = \frac{2x_0-3x}{(x-x_0)x^3} = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{2}{3}x_0.$$

El candidato a punto múltiple pertenece al lugar geométrico positivo sobre el eje real, luego es un punto múltiple. El valor de $V_{eq}{}^2$ correspondiente se calcula de la siguiente forma:

$$1+V_{eq}{}^2 \left.\frac{\varepsilon_0 A}{2k(x-x_0)x^2}\right|_{x=\frac{2}{3}x_0} = 0 \ \Rightarrow\ V_{eq} = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon_0 A}}\left(\frac{2}{3}x_0\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Discusión:

- Si $V_{eq} = 0$, el único punto de equilibrio es x_0.

- Si $0 < V_{eq} < \sqrt{\dfrac{k}{\varepsilon_0 A}}\left(\dfrac{2}{3}x_0\right)^{\frac{3}{2}}$, existen dos puntos de equilibrio: uno menor que $\dfrac{2}{3}x_0$ y otro mayor que $\dfrac{2}{3}x_0$, ambos en el intervalo $(0, x_0)$.

- Si $V_{eq} = \sqrt{\dfrac{k}{\varepsilon_0 A}}\left(\dfrac{2}{3}x_0\right)^{\frac{3}{2}}$, existe un único punto de equilibrio en $\dfrac{2}{3}x_0$.

- Si $V_{eq} > \sqrt{\dfrac{k}{\varepsilon_0 A}}\left(\dfrac{2}{3}x_0\right)^{\frac{3}{2}}$, no existen puntos de equilibrio.

3) <u>Representación en variables de estado (1+2,5+2,5p)</u>

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\dfrac{k}{m}(x-x_0)-\dfrac{b}{m}\dot{x}-\dfrac{1}{2m}\dfrac{\varepsilon_0 A}{x^2}V^2 \end{bmatrix} \\ x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Linealización

Sean $\tilde{x} = x - x_{eq}$ y $\tilde{V} = V - V_{eq}$. Modelo linealizado:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\varepsilon_0 A V_{eq}^2}{x_{eq}^3}-k\right) & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\varepsilon_0 A V_{eq}}{m\, x_{eq}^2} \end{bmatrix}\tilde{V} \\ \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Función de transferencia:

$$H(s) = \frac{\tilde{X}}{\tilde{V}}(s) = \frac{-\dfrac{\varepsilon_0 A V_{eq}}{m\, x_{eq}^2}}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{1}{m}\left(k - \dfrac{\varepsilon A V_{eq}^2}{x_{eq}^3}\right)}.$$