SOLUCIÓN

Ejercicio 1

1)

Función de transferencia: $G(s)=\frac{A}{(s+c)(s+a-jb)(s+a+jb)}=\frac{A}{(s+c)(s^2+2as+a^2+b^2)}$

donde $a=11$; $b=3\sqrt{3}$; $c=2$ y $A=2\mathrm{c}(a^2+b^2)=592$. Entonces:

$$G(s)=\frac{592}{(s+2)(s^2+22s+148)}=\frac{592}{s^3+24s^2+192s+296} \quad .$$

Relación de amportiguamiento: $\zeta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{11}{2\sqrt{37}}\approx 0{,}904$.

Frecuencia natural de oscilación no amortiguada: $\omega_n=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{37}\approx 12{,}2$.

2)

$G(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}$ donde $P(s)=s^3+24s^2+192s+296$ y $Q(s)=592$.

Sean $n=gr(P)=3$ y $m=gr(Q)=0$.

I) Polos de lazo abierto $(K=0)$: $s_1=-2$; $s_2=-11+j3\sqrt{3}$; $s_3=-11-j3\sqrt{3}$.

ii) Ceros de lazo abierto $(K\to+\infty)$: $s\to\infty$ (cero triple en infinito, es decir tres asíntotas para $K\to+\infty$).

Iii) Número de ramas: $max\{n,m\}=3$.

iv) Simetría: con respecto al eje real.

v) Número de asíntotas: $|n-m|=3$.

vi) Ángulos de las asíntotas: $\theta_k=\frac{(2\mathrm{k}+1)\pi}{n-m}$ $\quad k=0,1,\ldots,|n-m|$.

En este caso: $\pi/3$; π y $5\pi/3$.

vii) Centroide:

$$\sigma=\frac{\sum parte\,real\,de\,los\,polos\,finitos\,de\,G(s)-\sum parte\,real\,de\,los\,ceros\,finitos\,de\,G(s)}{n-m}$$

En este caso: $\sigma=\frac{\Re(s_1)+\Re(s_2)+\Re(s_3)}{3}=\frac{-2-11-11}{3}=-8$.

viii) LGP sobre el eje real: aquellos puntos del eje real tales que la cantidad de polos y ceros reales de $G(s)$ a su derecha es impar.

En este caso: $(-\infty,-2)$

ix) Ángulos de partida y de llegada: Se calculan a partir de la condición $arg(G(s))=(2k+1)\pi$, donde $k\in\mathbb{Z}$, haciendo s tender al punto en cuestión.

El ángulo de partida de $s_1=-2$ es π , ya que $(-\infty,-2)$ es parte del LGP.

El ángulo de partida de $s_2=-11+j3\sqrt{3}$ es: α tal que:

$-\alpha-\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}+arctg(\frac{11-2}{3\sqrt{3}}))=(2k+1)\pi$ donde $k\in\mathbb{Z}$.

Entonces: $\alpha=-arctg(\sqrt{3})=\frac{-\pi}{3}$.

Ángulos de llegada: No hay ceros finitos de $G(s)$, así que no hay que calcular ángulos de llegada (los ángulos de llegada a los ceros infinitos son los ángulos de las asíntotas ya calculados).

x) Intersecciones con el eje imaginario: se calculan aplicando el criterio de Routh-Hurwitz.

En este caso:

$\Delta(s)=P(s)+KQ(s)=s^3+24s+192s+296+592K$

s^3	1	192
s^2	24	$592K+296$
s^1	$\frac{4312-592K}{24}$	
s^0	$592K+296$	

Cruces del LGP con el eje imaginario para $K=K_I=\frac{4312}{592}=\frac{539}{74}\approx 7{,}28$ en s tal que:

$$(24s^2+592K+296)_{K=\frac{539}{74}}=0\ ;$$

$$24s^2+4608=0\ ;$$

$$s^2+192=0\ .$$

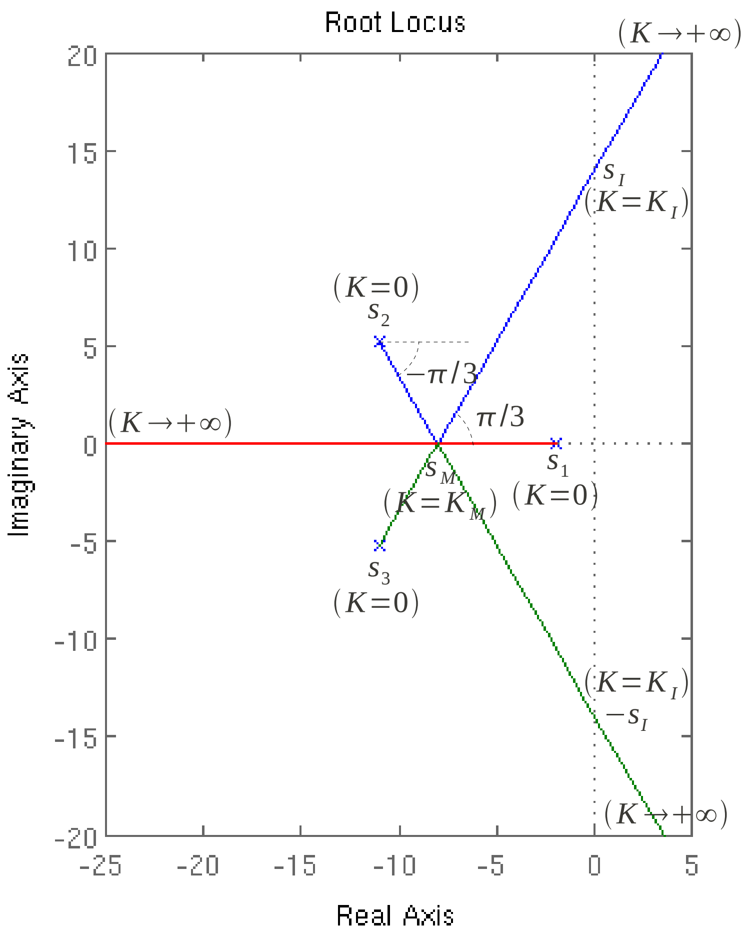
Los cruces del LGP con el eje imaginario son los puntos $s=\pm s_I$, donde $s_I=j8\sqrt{3}\approx j\,13{,}9$, correspondientes a $K=K_I=\frac{4312}{592}=\frac{539}{74}\approx 7{,}28$.

xi) Puntos multiples: Si existen, deben verifcar $\frac{dG(s)}{ds}=0$ y $1+KG(s)=0$ con $K>0$.

$$\frac{dG(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{592}{s^3+24s^2+192s+296}\right)=-1776\frac{(s+8)^2}{(s^3+24s^2+192s+296)^2}\ .$$

$s=s_M=-8$ es raíz doble de $\frac{dG(s)}{ds}$ y verifica $1+KG(s)=0$ con $K>0$ ya que $s_M\in(-\infty,-2)$ y el intervalo $(-\infty,-2)$ es parte del LGP.

Entonces $s_M=\sigma=-8$ (coincide con el centroide) es un punto triple del LGP, correspondiente a $K=K_M=\frac{-1}{G(s_M)}=\frac{216}{592}=\frac{27}{74}\approx 0{,}365$.



3)

a. El sistema realimentado exhibe una respuesta con error en régimen nulo ante una entrada escalón.	FALSO $\forall\, K\in\mathbb{R}$	Los puntos s_1 , s_2 y s_3 del LGP, correspondientes a $K=0$, son los polos de la transferencia en lazo abierto. Como $0\notin\{s_1, s_2, s_3\}$ el sistema realimentado es de tipo 0 independientemente del valor de K .
b. El sistema realimentado exhibe una respuesta sin componentes sinusoidales ante una entrada escalón.	VERDADERO si y solo si $K=K_M=\dfrac{27}{74}$	En cualquier otro caso $(K\neq K_M)$ el sistema realimentado tiene polos con parte imaginaria no nula lo cual da origen a componentes sinusoidales en la respuesta. Si $K=K_M$ todos los polos del sistema realimentado son reales y por lo tanto la respuesta no tiene componentes sinusoidales.
c. El sistema realimentado exhibe una respuesta con componente sinusoidal de amplitud creciente linealmente con el tiempo ante alguna entrada sinusoidal.	VERDADERO si y solo si $K=K_I=\dfrac{539}{74}$	En cualquier otro caso $(K\neq K_I)$ la parte real de cada uno de los polos del sistema realimentado es no nula y por lo tanto el crecimiento/decaimiento de cada término de la respuesta temporal es exponencial. Si $K=K_I$ dos de los polos del sistema realimentado se encuentran sobre el eje imaginario en $s=\pm s_I=\pm j\,8\sqrt{3}$ y aplicando una entrada sinusoidal de frecuencia angular $8\sqrt{3}$ la respuesta tiene un término sinusoidal de igual frecuencia angular y amplitud creciente linealmente con el tiempo.

4)

Se desea tener polos con parte real igual a -1 .

Los cortes del LGP con la recta $s=-1$ se pueden encontrar aplicando el criterio de Routh Hurwitz a

$$\Delta(w-1)=((w-1)+2)((w-1)+11-j3\sqrt{3})((w-1)+11+j3\sqrt{3})+592\mathrm{K}$$

$$\Delta(w-1)=(w+1)(w^2+20\mathrm{w}+127)+592\mathrm{K}=w^3+21\mathrm{w}^2+147\mathrm{w}+127+592\mathrm{K}$$

w^3	1	147
w^2	21	$592\mathrm{K}+127$
w^1	$\frac{2960-592\mathrm{K}}{21}$	
w^0	$592\mathrm{K}+127$	

Cruces del LGP con la recta $s=-1$ para $K=K_{sol}=\frac{2960}{592}=5$ en $-1\pm w_C$ donde w_C es solución de:

$$(21\mathrm{w}^2+592\mathrm{K}+127)_{K=5}=0 \quad ;$$
$$21\mathrm{w}^2+3087=0 \quad ;$$
$$w^2+147=0 \quad .$$

Los cruces del LGP con la ecta $s=-1$ son los puntos $-1\pm j7\sqrt{3}\approx-1\pm j12{,}1$ correspondientes a $K=K_{sol}=5$.

Cuando $K=K_{sol}=5$ dos de los polos del sistema realimentado están en $p_{1,2}=-1\pm j7\sqrt{3}$; el tercer polo está en $s=p_3$ donde p_3 se obtiene de la siguiente igualdad entre polinomios:

$$P(s)+5Q(s)=(s-p_3)(s+1-j7\sqrt{3})(s+1+j7\sqrt{3})$$
$$s^3+24s^2+192s+296+5\times592=(s-p_3)(s^2+2s+148)\ ;$$
$$s^3+24s^2+192s+3256=s^3+(2-p_3)s^2+(148-2p_3)s-148p_3\ .$$

De donde se obtiene: $p_3=-22$.

Entonces cuando $K=K_{sol}=5$ el sistema realimentado presenta dos polos en $p_{1,2}=-1\pm j7\sqrt{3}$ y un tercer polo en $p_3=-22$. En estas condiciones, como $|\Re(p_1)|,|\Re(p_2)|\ll|\Re(p_3)|$, los primeros dos polos son dominantes sobre el tercero y la función de transferencia de lazo cerrado puede aproximarse de la siguiente forma:

$$\frac{K_{sol}G(s)}{1+K_{sol}G(s)}=\frac{592K_{sol}}{s^3+24s^2+192s+296+592K_{sol}}=\frac{2960}{(s+22)(s^2+2s+148)}\approx\frac{\frac{1480}{11}}{s^2+2s+148}\quad .$$

Ejercicio 2

$$\frac{d^3 y}{d t^3}+5\frac{d^2 y}{d t^2}+7\frac{d y}{d t}+3y=2\frac{d^2 u}{d t^2}+\frac{d u}{d t}+4u$$

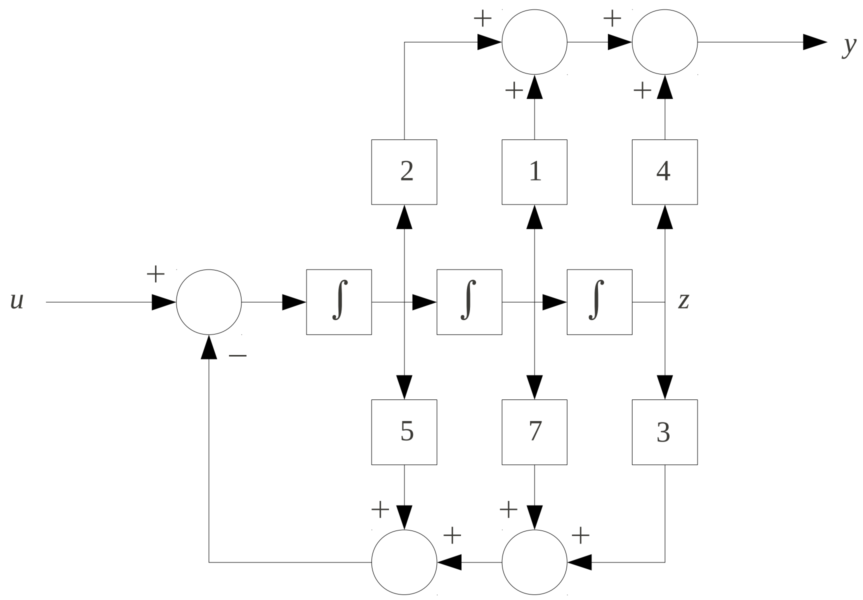
a) Una forma de resolverlo:

$$(s^3+5s^2+7s+3)Y(s)=(2s^2+s+4)U(s)$$

Sea $Z(s)=\dfrac{U(s)}{s^3+5s^2+7s+3}$.

Entonces:

$$s^3 Z(s)=U(s)-(5s^2+7s+3)Z(s) \quad \text{y} \quad Y(s)=(2s^2+s+4)Z(s) \quad .$$



b) Otra forma de resolverlo:

$$4u-3y=\frac{d^3 y}{d t^3}+5\frac{d^2 y}{d t^2}+7\frac{d y}{d t}-2\frac{d^2 u}{d t^2}-\frac{d u}{d t}$$

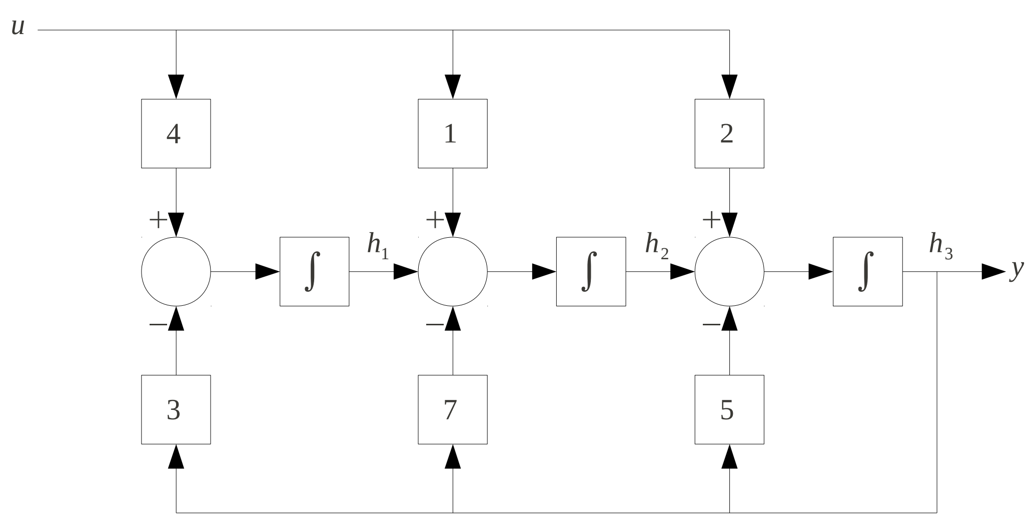
$$h_1=\int(4u-3y)\,dt=\frac{d^2 y}{d t^2}+5\frac{d y}{d t}+7y-2\frac{d u}{d t}-u$$

$$h_1-7y+u=\frac{d^2 y}{d t^2}+5\frac{d y}{d t}-2\frac{d u}{d t}$$

$$h_2=\int(h_1-7y+u)\,dt=\frac{d y}{d t}+5y-2u$$

$$h_2-5y+2u=\frac{d y}{d t}$$

$$h_3=\int(h_2-5y+2u)\,dt=y$$



Ejercicio 3

1) Ecuaciones

Balance volúmetrico total: $\frac{d}{dt}(S\,H)=U+A-Q$.

Balance volumétrico al líquido 1: $\frac{d}{dt}(S\,H\,X)=U-X\,Q$.

Sobrepresión en el fondo del tanque: $\Delta P=\rho_m g\,H$.

Densidad de la mezcla: $\rho_m=X\,\rho_1+(1-X)\,\rho_2$.

Caudal de salida: $Q=K\sqrt{\rho_m g\,H}$.

Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son las siguientes:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{1}{S}\left(U+A-K\sqrt{\left(X\rho_1-(1-X)\rho_2\right)gH}\right) \quad ;$$
$$\frac{dX}{dt}=\frac{1}{SH}\left((1-X)U-XA\right) \quad ;$$
$$Q=K\sqrt{\left(X\rho_1+(1-X)\rho_2\right)gH} \quad .$$

2) Linealización

En el punto de operación:

$Q_0=U_0+A_0=K\sqrt{\rho_{m0}\,g\,H_0}$ donde $\rho_{m0}=X_0\rho_1+(1-X_0)\rho_2$ y $(1-X_0)U_0=X_0A_0$.

Enconces:

$U_0=X_0Q_0$; $A_0=\left(1-X_0\right)Q_0$ y $X_0=\dfrac{U_0}{U_0+A_0}$.

Sean:

$u=U-U_0$; $a=A-A_0$; $h=H-H_0$; $x=X-X_0$ y $q=Q-Q_0$.

Modelo lineal para los apartamientos con respecto al punto de operación:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{K\sqrt{\rho_{m0}\,g}}{2S\sqrt{H_0}}h-\frac{K\sqrt{gH_0}\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2S\sqrt{\rho_{m0}}}x+\frac{u}{S}+\frac{a}{S}=-\frac{Q_0}{2SH_0}h-\frac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2S\rho_{m0}}x+\frac{u}{S}+\frac{a}{S} \quad ;$$
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{(1-X_0)U_0-X_0A_0}{SH_0^2}h-\frac{U_0+A_0}{SH_0}x+\frac{1-X_0}{SH_0}u-\frac{X_0}{SH_0}a=-\frac{Q_0}{SH_0}x+\frac{1-X_0}{SH_0}u-\frac{X_0}{SH_0}a \quad ;$$
$$q=\frac{K\sqrt{\rho_{m0}\,g}}{2\sqrt{H_0}}h+\frac{K\sqrt{gH_0}\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2\sqrt{\rho_{m0}}}x=\frac{Q_0}{2H_0}h+\frac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2\rho_{m0}}x \quad .$$

En forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}h\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{Q_0}{2SH_0} & -\dfrac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2S\rho_{m0}}\\ 0 & -\dfrac{Q_0}{SH_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{S} & \dfrac{1}{S}\\ \dfrac{1-X_0}{SH_0} & -\dfrac{X_0}{SH_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\a\end{bmatrix} \quad ;$$

$$\begin{bmatrix}x\\q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{Q_0}{2H_0} & \dfrac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2\rho_{m0}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\x\end{bmatrix} \quad .$$

3) Error

Según el modelo no lineal, en régimen:

$$X_{NL}^{*}=\frac{1{,}1\,U_0}{1{,}1\,U_0+0{,}9\,A_0}=\frac{1{,}1\,X_0 Q_0}{1{,}1\,X_0 Q_0+0{,}9\left(1-X_0\right)Q_0}=\frac{1{,}1\,X_0}{0{,}2\,X_0+0{,}9}=0{,}55 \quad ;$$

$$Q_{NL}^{*}=1{,}1\,U_0+0{,}9\,A_0=1{,}1\,X_0 Q_0+0{,}9\left(1-X_0\right)Q_0=\left(0{,}2\,X_0+0{,}9\right)Q_0=0{,}6 \quad .$$

Según el modelo lineal, los valores de régimen de las variaciones son h_∞ , x_∞ y q_∞ tales que:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{Q_0}{2SH_0} & -\dfrac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2S\rho_{m0}}\\ 0 & -\dfrac{Q_0}{SH_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_\infty\\x_\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{S} & \dfrac{1}{S}\\ \dfrac{1-X_0}{SH_0} & -\dfrac{X_0}{SH_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}1\,U_0\\-0{,}1\,A_0\end{bmatrix} \quad ;$$

$$q_\infty=\frac{Q_0}{2H_0}h_\infty+\frac{Q_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2\rho_{m0}}x_\infty \quad ;$$

donde $\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_{mo}}=\dfrac{\rho_1-\rho_2}{X_0\rho_1+(1-X_0)\rho_2}=\dfrac{1}{X_0+1}$; $U_0=X_0 Q_0$ y $A_0=\left(1-X_0\right)Q_0$.

Sustituyendo:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}12 & -0{,}2\\ 0 & -0{,}24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_\infty\\x_\infty\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0{,}2 & -0{,}2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}03\\-0{,}03\end{bmatrix} \quad ;$$

$$q_\infty=0{,}12\,h_\infty+0{,}2\,x_\infty \quad .$$

De donde resulta: $h_\infty=-\dfrac{1}{12}\approx-0{,}0833$; $x_\infty=0{,}05$ y $q_\infty=0$.

Entonces según el modelo lineal:

$$X_L^{*}=X_0+x_\infty=0{,}5+0{,}05=0{,}55 \quad ;$$

$$Q_L^{*}=Q_0+q_\infty=0{,}6+0=0{,}6 \quad .$$

Entonces:

$$e_X^{rel}=\frac{X_{NL}^{*}-X_L^{*}}{X_{NL}^{*}}=\frac{0{,}55-0{,}55}{0{,}55}=0 \quad \text{y} \quad e_Q^{rel}=\frac{Q_{NL}^{*}-Q_L^{*}}{Q_{NL}^{*}}=\frac{0{,}6-0{,}6}{0{,}6}=0 \quad .$$

Ejercicio 4

Respuesta a impulso	¿Es BIBO estable?		¿Es causal y de parámetros concentrados?	
	SI	NO	SI	NO
$sen(2t+\pi/6)\cdot Y(t)$		X	X	
$e^{-3t} sen(5t+\pi/4)\cdot Y(t+1)$	X			X
$Y(t-1)$		X		X
$\delta(t)$	X		(*)	X
$\delta(t-1)$	X			X

(*) Estrictamente el sistema es algebraico, pero se consideró que es válida cualquiera de las dos respuestas.

Ejercicio 5

Caso I:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=F_B-F_A \quad ; \quad F_A=k_A x \quad ; \quad F_B=k_B(L-x)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+(k_A+k_B)x=k_B L$$

$$m(s^2X(s)-Ls-V)+b(sX(s)-L)+(k_A+k_B)X(s)=\frac{k_B L}{s}$$

$$X(s)=\frac{\frac{k_B L}{s}+mLs+mV+bL}{ms^2+bs+k_A+k_B} \quad ; \quad sX(s)=\frac{k_B L+mLs^2+(mV+bL)s}{ms^2+bs+k_A+k_B}$$

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=\frac{k_B}{k_A+k_B}L$ ya que todos los polos de $sX(s)$ tienen parte real negativa.

En este caso A gana y B pierde si $\frac{k_B}{k_A+k_B}<\frac{1}{10}$; en caso contrario A pierde y B gana.

Caso II:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=F_B-F_A \quad ; \quad F_A=k_A\frac{dx}{dt} \quad ; \quad F_B=k_B(L-x)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+(b+k_A)\frac{dx}{dt}+k_B x=k_B L$$

$$m(s^2X(s)-Ls-V)+(b+k_A)(sX(s)-L)+k_B X(s)=\frac{k_B L}{s}$$

$$X(s)=\frac{\frac{k_B L}{s}+mLs+mV+\left(b+k_A\right)L}{ms^2+\left(b+k_A\right)s+k_B} \quad ; \quad sX(s)=\frac{k_B L+mLs^2+\left(mV+\left(b+k_A\right)L\right)s}{ms^2+\left(b+k_A\right)s+k_B}$$

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=L$ ya que todos los polos de $sX(s)$ tienen parte real negativa.

En este caso A pierde y B gana $\forall\, k_A, k_B>0$.

Caso III:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=F_B-F_A \quad ; \quad F_A=k_A x \quad ; \quad F_B=k_B\frac{d}{dt}(L-x)=-k_B\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\left(b+k_B\right)\frac{dx}{dt}+k_A x=0$$

$$m\left(s^2X(s)-Ls-V\right)+\left(b+k_B\right)\left(sX(s)-L\right)+k_A X(s)=0$$

$$X(s)=\frac{mLs+mV+\left(b+k_B\right)L}{ms^2+\left(b+k_B\right)s+k_A} \quad ; \quad sX(s)=\frac{mLs^2+\left(mV+\left(b+k_B\right)L\right)s}{ms^2+\left(b+k_B\right)s+k_A}$$

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=0$ ya que todos los polos de $sX(s)$ tienen parte real negativa.

En este caso A gana y B pierde $\forall\, k_A, k_B>0$.

Caso IV:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}=F_B-F_A \quad ; \quad F_A=k_A\frac{dx}{dt} \quad ; \quad F_B=k_B\frac{d}{dt}(L-x)=-k_B\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\left(b+k_A+k_B\right)\frac{dx}{dt}=0$$

$$m\left(s^2X(s)-Ls-V\right)+\left(b+k_A+k_B\right)\left(sX(s)-L\right)=0$$

$$X(s)=\frac{mLs+mV+\left(b+k_A+k_B\right)L}{s\left(ms+b+k_A+k_B\right)} \quad ; \quad sX(s)=\frac{mLs+mV+\left(b+k_A+k_B\right)L}{ms+b+k_A+k_B}$$

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=\frac{mV+\left(b+k_A+k_B\right)L}{b+k_A+k_B}$ ya que todos los polos de $sX(s)$ tienen parte real negativa.

En este caso A gana y B pierde si $\frac{mV+\left(b+k_A+k_B\right)L}{b+k_A+k_B}<\frac{L}{10}$; pero esto es imposible porque:

$$\frac{mV+\left(b+k_A+k_B\right)L}{b+k_A+k_B}=L+\frac{mV}{b+k_A+k_B}>L>\frac{L}{10} \quad .$$

Entonces, en este caso A pierde y B gana $\forall\, k_A, k_B>0$.

Caso	F_A	F_B	¿Es posible que el resultado de la contienda sea: "A gana y B pierde"? (Complete **SI** o **NO**)	¿Qué condiciones deben verificar k_A y k_B para que el resultado de la contienda sea: "A gana y B pierde"? (Responda solamente en los casos que corresponda)
I	$k_A x$	$k_B(L-x)$	SI	$\frac{k_B}{k_A+k_B}<\frac{1}{10}$
II	$k_A \frac{dx}{dt}$	$k_B(L-x)$	NO	
III	$k_A x$	$k_B \frac{d(L-x)}{dt}=-k_B \frac{dx}{dt}$	SI	
IV	$k_A \frac{dx}{dt}$	$k_B \frac{d(L-x)}{dt}=-k_B \frac{dx}{dt}$	NO	