Respuesta temporal, sistema de orden 2, Mp

Transparencias

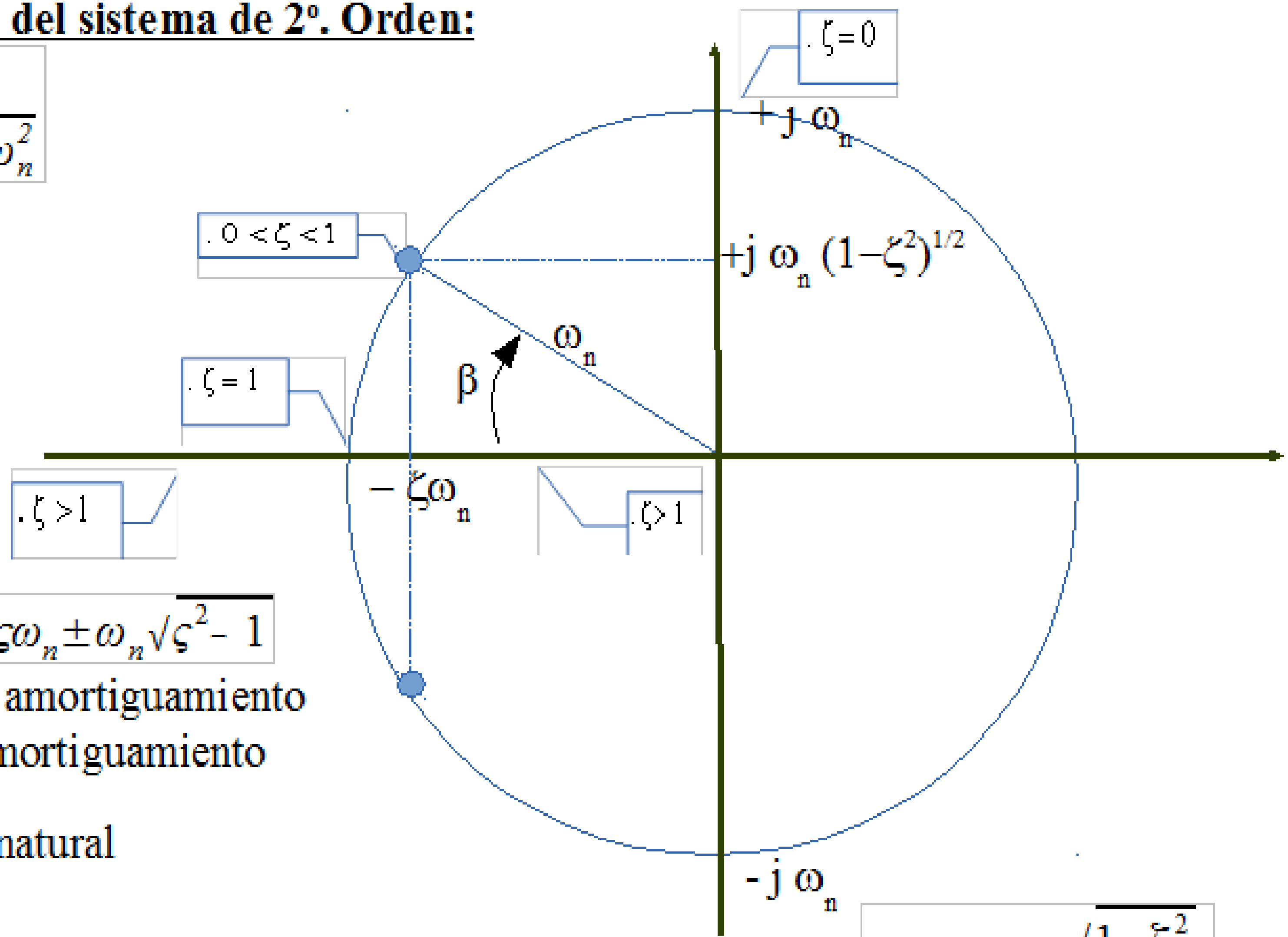
Introducción a la Teoría de Control

R. Canetti 2013

IIE-Fing-UdelaR

Respuesta temporal del sistema de 2º. Orden:

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$



polos en: $p_1, p_2 = -\varsigma\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}$

ζ -relación de amortiguamiento

$\zeta\omega_n$ -factor de amortiguamiento

ω_n -frecuencia natural

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$ -frecuencia real o natural amortiguada

$$\beta = artg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Sistema de orden 2: $H(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$ **RESPUESTA A IMPULSO**

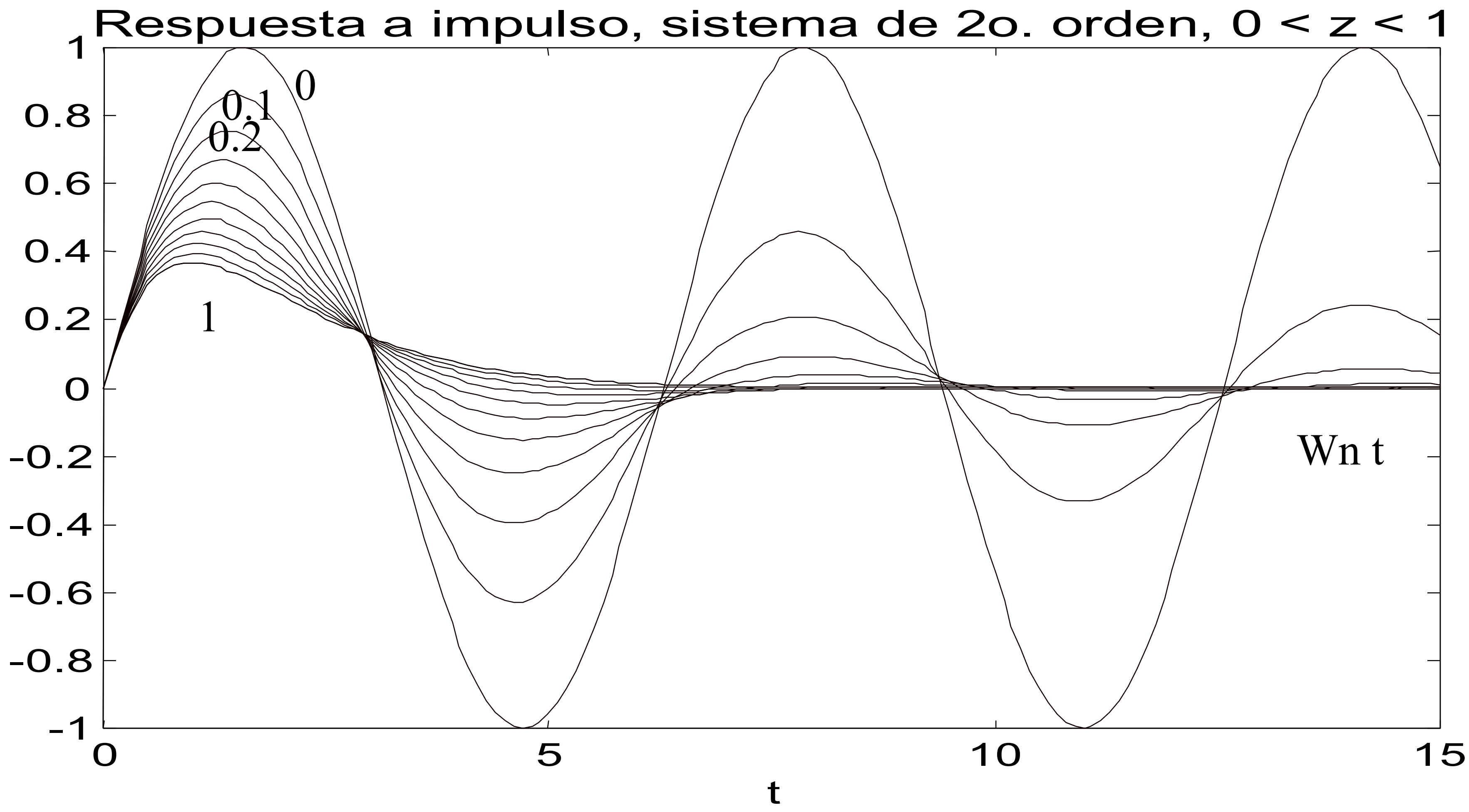
$\varsigma=0$ $$y(t)=\omega_n sen(\omega_n t)$$

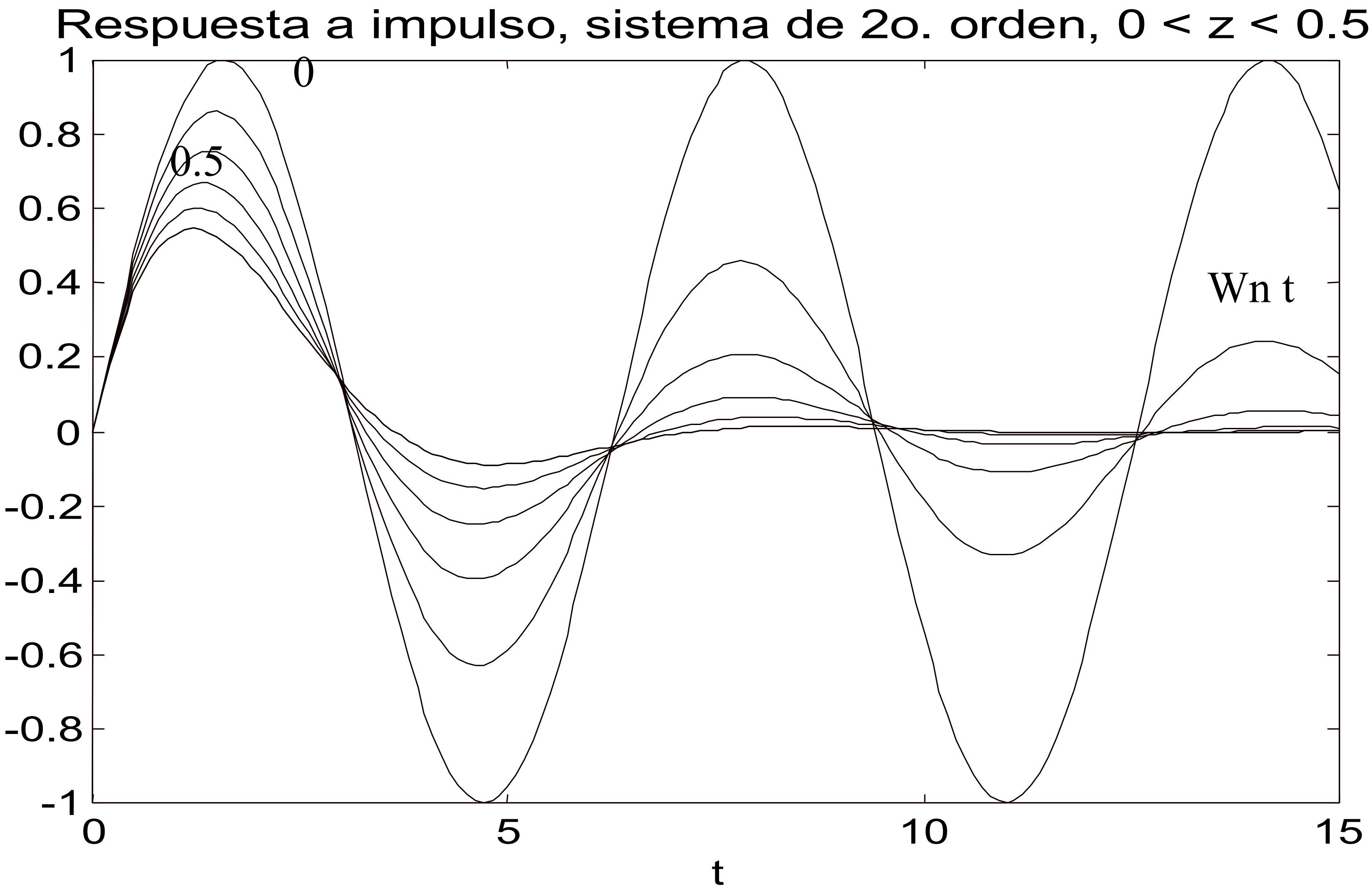
$0<\varsigma<1$ $$y(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}}e^{-\varsigma\omega_n t}sen(\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}t)$$

$\varsigma=1$ $$y(t)=\omega_n^2 te^{-\omega_n t}$$

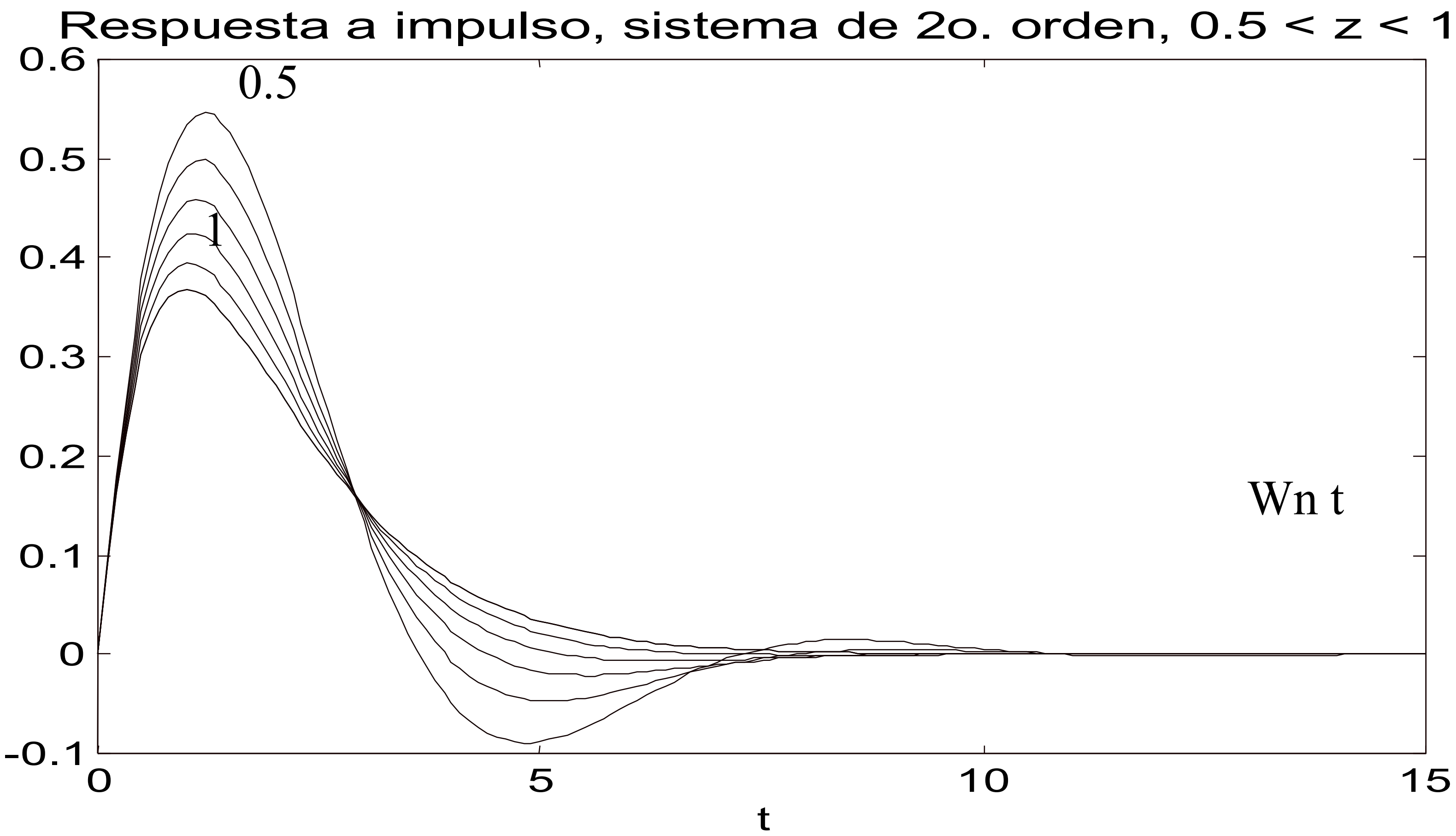
$\varsigma>1$ $$y(t)=\frac{\omega_n(e^{-Bt}-e^{-At})}{2\sqrt{\varsigma^2-1}}$$

con: $A=\omega_n(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1})$ $B=\omega_n(\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1})$ (posición de $-p_i$)


Respuesta a impulso, sistema de 2o. orden, 0 < z < 1
0
0.1
0.2
1
Wn t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
t



Respuesta a impulso, sistema de 2o. orden, 0 < z < 0.5
0
0.5
Wn t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
t


Respuesta a impulso, sistema de 2o. orden, 0.5 < z < 1
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0.5
1
Wn t
0
5
10
15
t

Respuesta a escalón:

$\varsigma = 0$ $$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

$0 < \varsigma < 1$ $$y(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}} sen(\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}_{\omega_d} t + \underbrace{artg\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}}_{\beta})$$

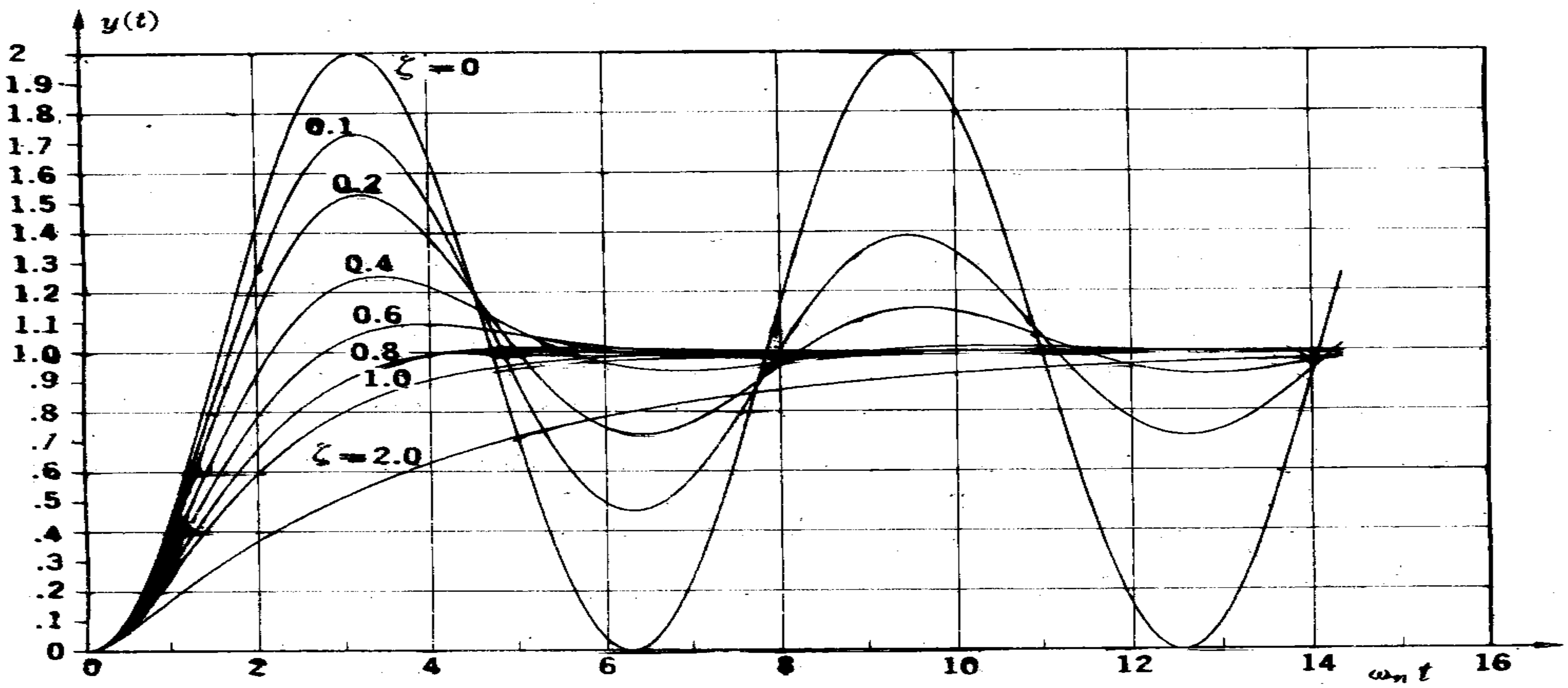
$\varsigma = 1$ $$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

$\varsigma > 1$ $$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2 - 1}}\left(\frac{e^{-At}}{A} - \frac{e^{-Bt}}{B}\right)$$

con: $A = \omega_n(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1})$ $B = \omega_n(\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1})$ (posición de $-p_i$)

Respuesta a escalón, sistema de segundo orden si 0<ζ<1.

Sist.: $H(s)=\dfrac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$ Respuesta: $y(t)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,sen(\omega_d t+artg(\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}))$



La gráfica muestra la respuesta del sistema subamortiguado (ζ < 1) vs. tiempo generalizado w_n.t

Determinación de Mp y tp

Mp es el máximo exceso por encima del valor asintótico final. (en p.u. o en %).

Para determinar Mp, calcularemos el instante que ocurre el pico (tp), y luego evaluaremos Mp = y(tp) - 1

Los extremos relativos de y(t) se obtienen anulando la derivada y'(t). Pero la derivada de la respuesta a escalón es la respuesta a impulso.

y'(t) = 0 $\Rightarrow$ $$y'(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-\varsigma\omega_n t} sen(\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}\, t) = 0$$

Como los dos primeros factores no se anulan (solo la función seno), eso se cumple en los instantes t*:

$$(\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}\, t^*) = l\pi \quad \text{con } l=0,1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}}}$$ (el primer máximo)

$$M_p = y(t_p) - 1 = \frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} sen(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t_p + artg(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}))$$

sustituyendo tp por su valor:

$$M_p = \frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \underbrace{sen\left(\pi + artg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)}_{\text{-sen(artg())}} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \underbrace{sen(\overbrace{artg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)}^{\beta})}_{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Recordando que

$$\beta = artg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad \text{entonces} \quad sen(\beta) = \sqrt{1-\zeta^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$

El sobretiro es una función monótona decreciente de ζ. Cuando $\zeta = 0$, Mp = 1. Cuando $\zeta = 1$, Mp = 0.

$$M_P = e^{-\frac{\pi . \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$