Análisis de Sensibilidad en *Optimización de Problemas de Producción*

Docentes: Fernando Islas - Carlos Testuri
Colaboradores: Héctor Cancela - Antonio Mauttone - Pedro Piñeyro

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación.
Facultad de Ingeniería. UdelaR

2023

Contenido

El objetivo es poder analizar la sensibilidad de la solución de un problema ante cambios de los parámetros de este.

En particular es analizar la dependencia del valor del óptimo y la solución óptima con respecto a los coeficientes de las restricciones, los términos independientes y los coeficientes de la función objetivo.

Ejemplo de problema de planificación de la producción

Una empresa produce los productos *1* y *2* a partir de la disponibilidad de los insumos *A* y *B*. Los productos *1* y *2* se venden a precios \$4 y \$5 la unidad, respectivamente. Se cuenta con los siguientes insumos disponibles, requerimientos y capacidades de estos según los productos:

Insumos	Disponible	Requerimientos	
		Producto *1*	Producto *2*
A	12	2	3
B	9	2	2
Capacidad		3	-

Ejemplo de problema de planificación de la producción

Una empresa produce los productos *1* y *2* a partir de la disponibilidad de los insumos *A* y *B*. Los productos *1* y *2* se venden a precios \$4 y \$5 la unidad, respectivamente. Se cuenta con los siguientes insumos disponibles, requerimientos y capacidades de estos según los productos:

Insumos	Disponible	Requerimientos	
		Producto *1*	Producto *2*
A	12	2	3
B	9	2	2
Capacidad		3	-

El objetivo es determinar la cantidad de productos a producir que maximiza el beneficio sujeto a la disponibilidad de insumos y según los requerimientos de insumos para cada producto y las capacidades de producción.

Ejemplo planificación de la producción: variables y restricciones

Por cada producto se debe tomar una decisión de la cantidad a producir :

- x_1 : cantidad de producto *1* a producir
- x_2 : cantidad de producto *2* a producir

Ejemplo planificación de la producción: variables y restricciones

Por cada producto se debe tomar una decisión de la cantidad a producir :

- x_1 : cantidad de producto *1* a producir
- x_2 : cantidad de producto *2* a producir

La disponibilidad de insumos es lo que limita el plan de producción.
Para cada insumo se plantean restricciones de que la cantidad de insumo usado no debe superar a la cantidad de insumo disponible:

- *Insumo A*
  cantidad de insumo usado: $2x_1 + 3x_2$
  cantidad de insumo disponible: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

- *Insumo B*: $2x_1 + 2x_2 \leq 9$
- *Cap. producción producto 1*: $x_1 \leq 3$

No negatividad de las variables de decisión: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Ejemplo planificación de la producción: objetivo

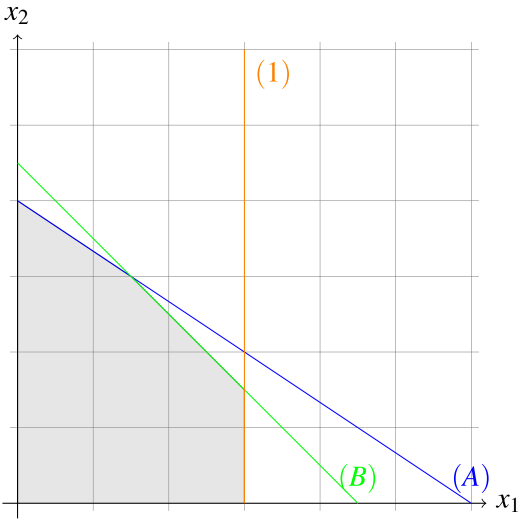
El objetivo es establecer un plan de producción que maximize el beneficio. El beneficio esta dado por las ventas de los productos en términos de precios por unidad y cantidades de unidades producidas.

Por lo que la función objetivo a ser maximizada es:

$$z = 4x_1 + 5x_2$$

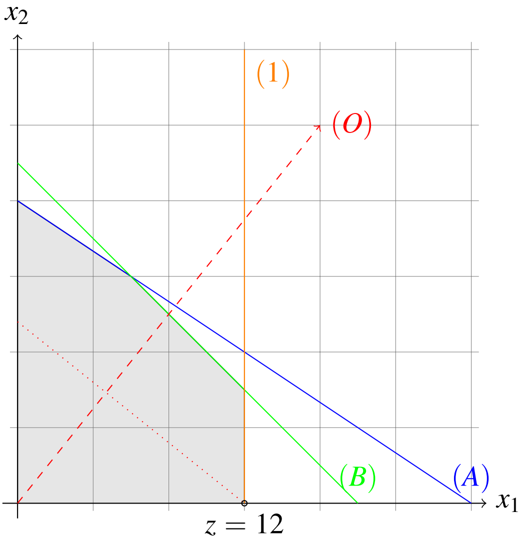
Ejemplo planificación de la producción: formulación y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



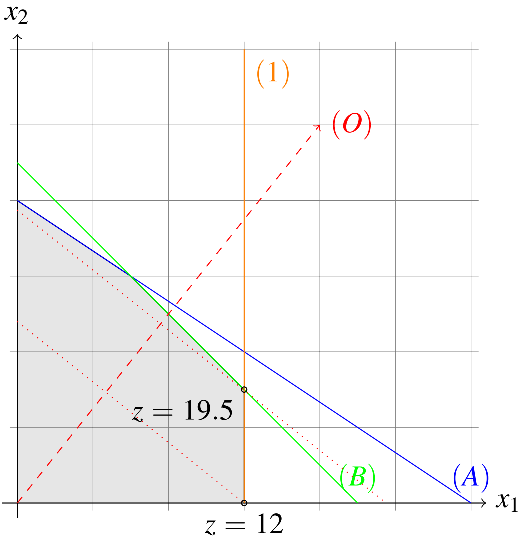
Ejemplo planificación de la producción: formulación y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
& x_1 \leq 3, & (1) \\
& x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



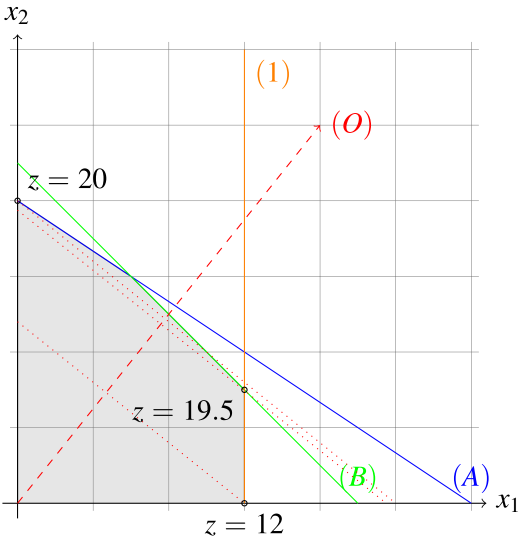
Ejemplo planificación de la producción: formulación y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



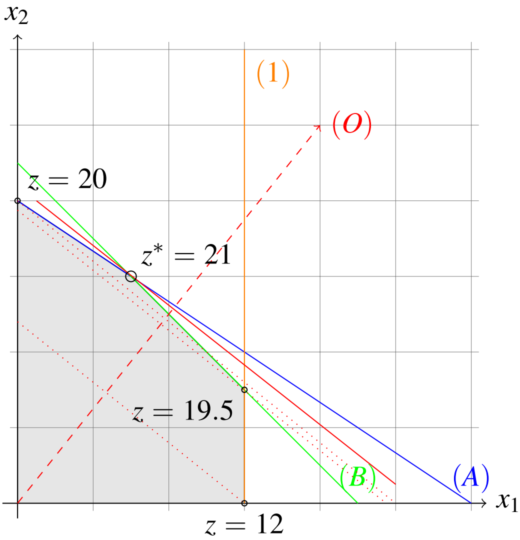
Ejemplo planificación de la producción: formulación y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



Ejemplo planificación de la producción: formulación y resolución gráfica

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



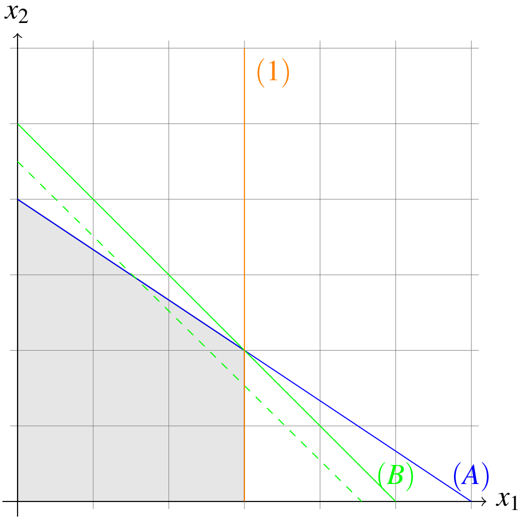
Ejemplo planificación de la producción: cambio término independiente

¿Qué ocurre si se dispone de una unidad adicional del insumo B?

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9 + 1 \quad (B)$$

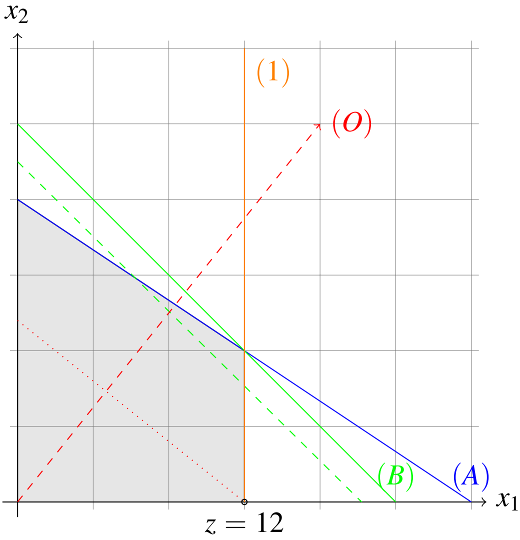
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en término independiente

$$
\begin{array}{rll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{10}, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



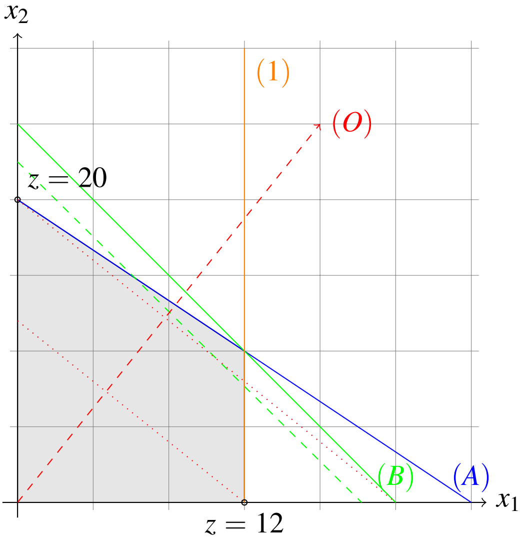
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en término independiente

$$\begin{array}{lll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{10}, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



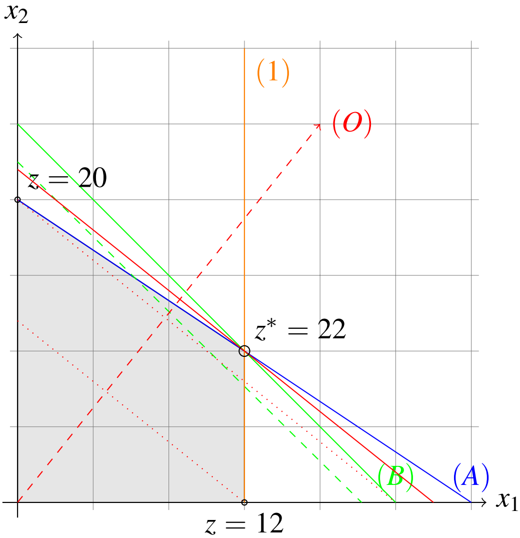
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en término independiente

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{10}, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en término independiente

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{10}, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



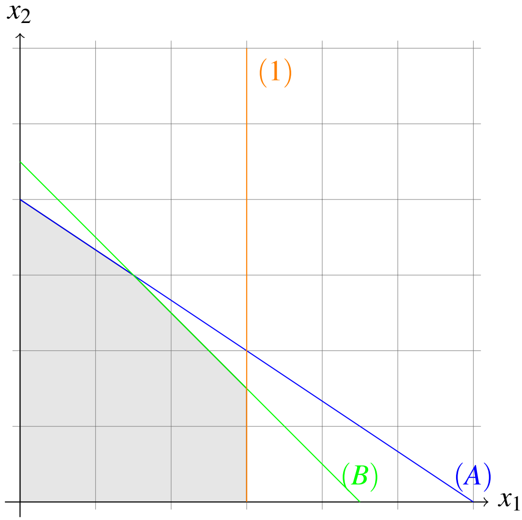
Ejemplo planificación de la producción: cambio en coeficiente función objetivo

¿Qué ocurre si se disminuye en una unidad el precio del producto 1?

$$z = (4-1)x_1 + 5x_2$$

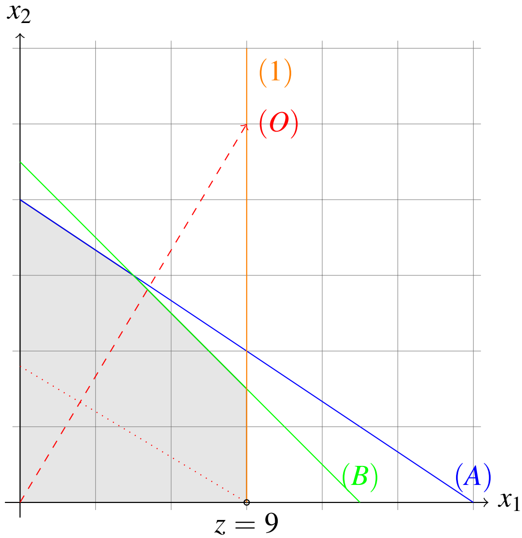
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en coeficiente función objetivo

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{3}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



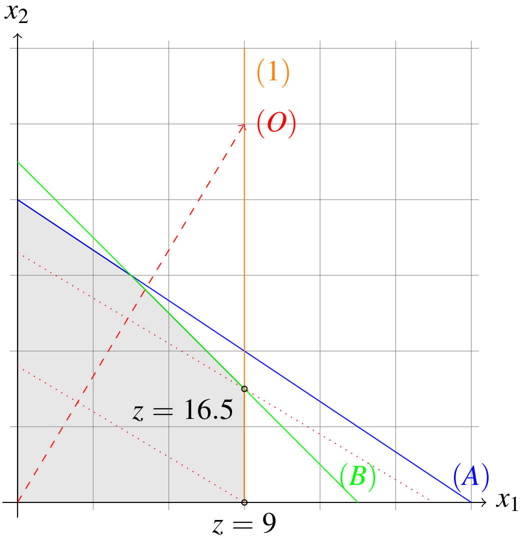
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en coeficiente función objetivo

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{3}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



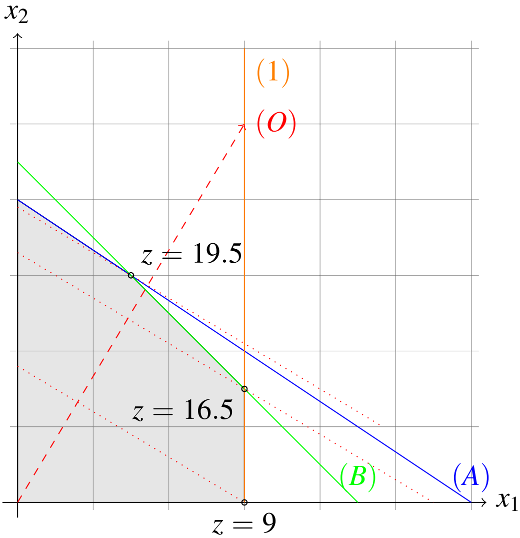
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en coeficiente función objetivo

$$\begin{array}{lll} \max & z = \mathbf{3}x_1 + 5x_2 & (O) \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\ & x_1 \leq 3, & (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0. & \end{array}$$



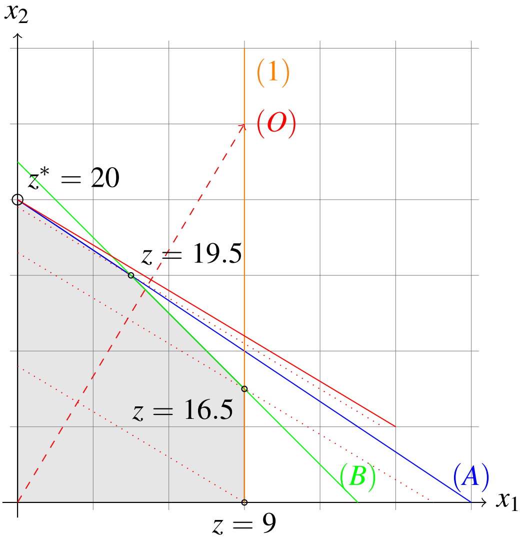
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en coeficiente función objetivo

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{3}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



Ejemplo: formulación y resolución gráfica con cambio en coeficiente función objetivo

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{3}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
& x_1 \leq 3, & (1) \\
& x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



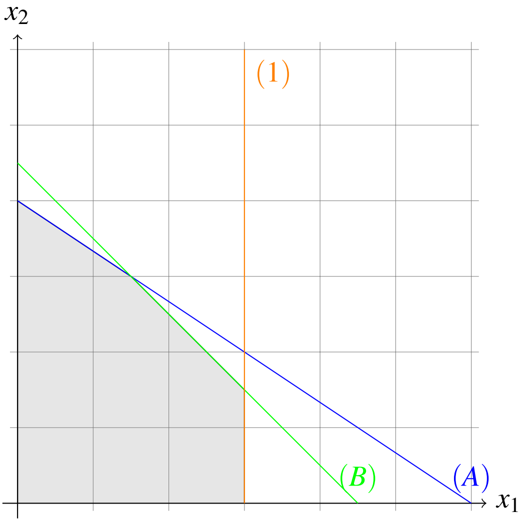
Ejemplo planificación de la producción: multiples soluciones

¿Qué ocurre si se aumenta en una unidad el precio del producto 1?

$$z = (4+1)x_1 + 5x_2$$

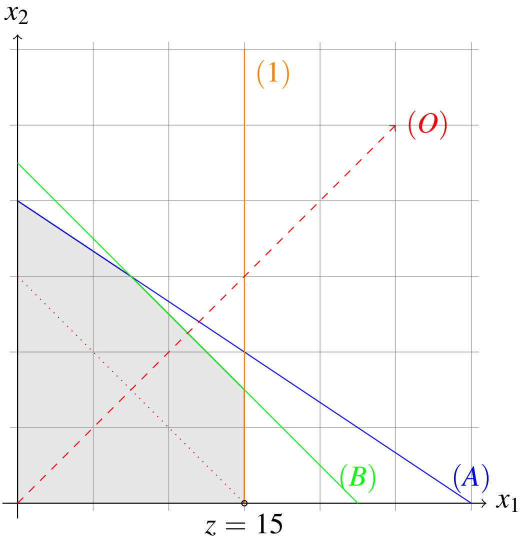
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con multiples soluciones

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{5}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



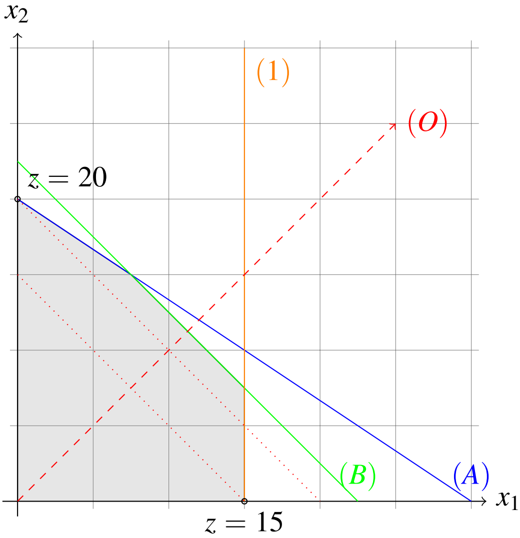
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con multiples soluciones

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{5}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



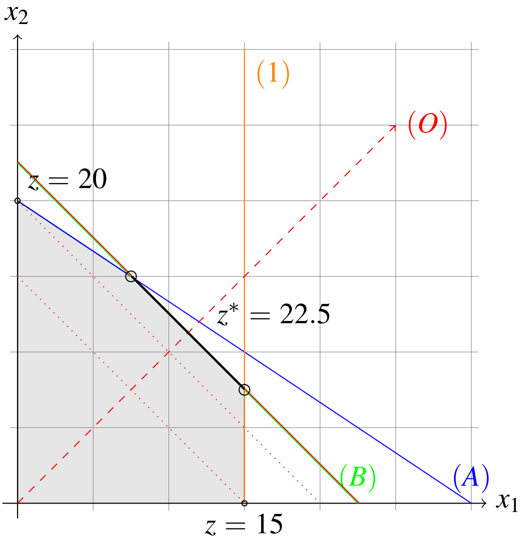
Ejemplo: formulación y resolución gráfica con multiples soluciones

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{5}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



Ejemplo: formulación y resolución gráfica con multiples soluciones

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \mathbf{5}x_1 + 5x_2 & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 9, & (B) \\
 & x_1 \leq 3, & (1) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$



Dado el problema de programación lineal,

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^{\tau}\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

con parámetros: matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y los vectores columnas $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}$ y la variable de decisión: vector columna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}$.

Dado el problema de programación lineal,

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^{\tau}\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

con parámetros: matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y los vectores columnas $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y la variable de decisión: vector columna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dadas la base óptima $\mathbf{B}$ y su solución óptima asociada $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_B, 0)$, se tienen las condiciones:

- *Factibilidad*: $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- *Optimalidad*: $\overline{\mathbf{c}}^{\tau} = \mathbf{c}^{\tau} - \mathbf{c}_B^{\tau}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$

Cuando cambia algún parámetro, si las condiciones se mantienen entonces la base $\mathbf{B}$ se mantiene óptima.

Ejemplo planificación de la producción: condiciones de factibilidad y optimalidad

El problema en forma estándar es

$$
\begin{array}{lllr}
-\min & -z = -4x_1 - 5x_2 & & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 + \quad x_4 & = 9, & (B) \\
 & x_1 + \qquad\qquad\quad x_5 & = 3, & (1) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Ejemplo planificación de la producción: condiciones de factibilidad y optimalidad

El problema en forma estándar es

$$
\begin{array}{llrl}
-\min & -z = -4x_1 - 5x_2 & & (O) \\
\text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 12, & (A) \\
 & 2x_1 + 2x_2 + \quad x_4 & = 9, & (B) \\
 & x_1 + \qquad\qquad x_5 & = 3, & (1) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

La base óptima esta formada por las variables $\{1, 2, 5\}$, con lo que las condiciones son

$$
\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},
$$

$$
\overline{\mathbf{c}}^{\tau} = \mathbf{c}^{\tau} - \mathbf{c}_B^{\tau}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.
$$

Cambio en término independiente 1/2

Sea el valor del término independiente b_i que cambia a $b_i + d$. Se busca determinar el rango de valores de d para los cuales la base de solución actual permanece óptima.

Solo dependen de **b** las condiciones de factibilidad.

Cambio en término independiente 1/2

Sea el valor del término independiente b_i que cambia a $b_i + d$. Se busca determinar el rango de valores de d para los cuales la base de solución actual permanece óptima.

Solo dependen de $\mathbf{b}$ las condiciones de factibilidad.

Sean $\mathbf{B}^{-1}_{\cdot i}$ la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{e}_i$ el vector unitario en i.

Entonces el cambio sobre la condición de factiblidad $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + d\mathbf{e}_i) \geq \mathbf{0}$ es

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + d\mathbf{B}^{-1}_{\cdot i} = \mathbf{x}_B + d\mathbf{B}^{-1}_{\cdot i} \geq \mathbf{0}.$$

La cual en términos de sus componentes $j = 1, ..., m$ es

$$x_{B(j)} + dB^{-1}_{ji} \geq 0.$$

Cambio en término independiente 2/2

La condición de factibilidad cambiada, en términos de sus componentes $j = 1, ..., m$, es

$$x_{B(j)} + dB^{-1}_{ji} \geq 0.$$

La condición de factibilidad cambiada, en términos de sus componentes $j = 1, ..., m$, es

$$x_{B(j)} + dB^{-1}_{ji} \geq 0.$$

De forma equivalente y dependiendo del signo de $q_j = B^{-1}_{ji}$ se tiene el rango de variación de d

$$\max_{\{j|q_j>0\}} \left\{ -\frac{x_{B(j)}}{q_j} \right\} \leq d \leq \min_{\{j|q_j<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(j)}}{q_j} \right\}.$$

Ejemplo planificación de la producción: cambio en término independiente

Para el caso de $i = 1$, $b_1 = 12$ el cambio sobre la condición de factiblidad $x_{B(j)} + dB^{-1}_{ji} \geq 0$ en términos de sus componentes $j = 1, ..., m$ es

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo planificación de la producción: cambio en término independiente

Para el caso de $i = 1$, $b_1 = 12$ el cambio sobre la condición de factiblidad $x_{B(j)} + dB_{ji}^{-1} \geq 0$ en términos de sus componentes $j = 1, ..., m$ es

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dependiendo del signo de B_{ji}^{-1} se tiene el rango de variación de d

$$\max_{\{j|B_{ji}^{-1}>0\}}\{-3, -1.5\} \leq d \leq \min_{\{j|B_{ji}^{-1}<0\}}\{1.5\}.$$

$$-1.5 \leq d \leq 1.5.$$

Por lo que la base, $\{1, 2, 5\}$, permanence óptima si $b_1 \in [10.5, 13.5]$.

Cambio en coeficiente función objetivo 1/2

Sea el valor del coeficiente de la función objetivo c_j que cambia a $c_j + d$. Se busca determinar el rango de valores de d para los cuales la base de solución actual permanece óptima.

Solo dependen de $\mathbf{c}$ las condiciones de optimalidad: $\overline{\mathbf{c}}^{\tau} = \mathbf{c}^{\tau} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\tau}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Cambio en coeficiente función objetivo 1/2

Sea el valor del coeficiente de la función objetivo c_j que cambia a $c_j + d$. Se busca determinar el rango de valores de d para los cuales la base de solución actual permanece óptima.

Solo dependen de $\mathbf{c}$ las condiciones de optimalidad: $\bar{\mathbf{c}}^\tau = \mathbf{c}^\tau - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Sea $\mathbf{A}_{\cdot j}$ la j-ésima columna de $\mathbf{A}$.

Si c_j es el *coeficiente de una variable que no pertenece a la base*, entonces $\mathbf{c}_B$ no cambia, y la única condición que cambia es la correspondiente al costo reducido de x_j, entonces se tiene

$$c_j + d - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\cdot j} \geq 0$$

o equivalentemente

$$d \geq -c_j + \mathbf{c}_\mathbf{B}^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\cdot j} = -\bar{c}_j.$$

Lo que permite establecer el rango de variación de d.

Cambio en coeficiente función objetivo 2/2

Si c_j es el *coeficiente de la variable básica* k-ésima, $j = B(k)$, entonces $\mathbf{c}_B$ cambia a $\mathbf{c}_B + d\mathbf{e}_k$ y todas las condiciones de optimalidad están involucradas.
Dado que x_j es una variable básica, su costo reducido, $\overline{c}_j^{\tau}$, siempre es cero, por lo que no necesita condicionarse.
Entonces las condiciones de optimalidad cambiadas para toda variable $j' \neq j$ son

$$c_{j'} - (\mathbf{c}_B + d\mathbf{e}_k)^{\tau}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j'} \geq 0.$$

Cambio en coeficiente función objetivo 2/2

Si c_j es el *coeficiente de la variable básica* k-ésima, $j = B(k)$, entonces $\mathbf{c}_B$ cambia a $\mathbf{c}_B + d\mathbf{e}_k$ y todas las condiciones de optimalidad están involucradas. Dado que x_j es una variable básica, su costo reducido, $\overline{c}_j^\tau$, siempre es cero, por lo que no necesita condicionarse.

Entonces las condiciones de optimalidad cambiadas para toda variable $j' \neq j$ son

$$c_{j'} - (\mathbf{c}_B + d\mathbf{e}_k)^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j'} \geq 0.$$

De forma equivalente

$$c_{j'} - \mathbf{c}_B^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j'} = \overline{c}_{j'} \geq d\mathbf{e}_k^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j'}, \quad \forall j' \neq j.$$

Dependiendo del signo de $q_{j'} = \mathbf{e}_k^\tau \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j'}$ se tiene el rango de variación de d

$$\max_{\{j' | q_{j'} < 0\}} \left\{ \frac{\overline{c}_{j'}}{q_{j'}} \right\} \leq d \leq \min_{\{j' | q_{j'} > 0\}} \left\{ \frac{\overline{c}_{j'}}{q_{j'}} \right\}.$$

Ejemplo planificación de la producción: cambio en coeficiente objetivo

Para el caso de $j = 1$, se tiene que $k = 1$ y $c_1 = -4$, y dado que es un coeficiente de una variable básica se debe cumplir la condición $\bar{c}_{j'} \geq dq_{j'}$, para todo $j' \neq j$, donde $q_{j'} = \mathbf{e}_k^\tau \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j'}$.
Entonces para $j' = 2, 3, 4, 5$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq d \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo planificación de la producción: cambio en coeficiente objetivo

Para el caso de $j = 1$, se tiene que $k = 1$ y $c_1 = -4$, y dado que es un coeficiente de una variable básica se debe cumplir la condición $\bar{c}_{j'} \geq dq_{j'}$, para todo $j' \neq j$, donde $q_{j'} = \mathbf{e}_k^\tau \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{\cdot j'}$.
Entonces para $j' = 2, 3, 4, 5$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq d \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dependiendo del signo de $q_{j'}$ se tiene el rango de variación de d

$$\max_{\{\forall j' \neq j | q_{j'} < 0\}} \{-1\} \leq d \leq \min_{\{\forall j' \neq j | q_{j'} > 0\}} \{2/3\},$$

$$-1 \leq d \leq 2/3.$$

Por lo que la base $\{1, 2, 5\}$ permanence óptima si $c_1 \in [-5, -10/3]$.

La teoría de dualidad establece la relación estructural complementaria entre dos problemas de programación lineal: uno denominado *primal* y el otro denominado *dual*.

Permite establecer una variación del método de resolución Simplex, y a nivel de resolución de los problemas, propiedades que vinculan las soluciones de ambos.

El problema trata de la selección de alimentos que satisfacen requisitos nutricionales a costo mínimo.

Ejemplo: Problema de la dieta

El problema trata de la selección de alimentos que satisfacen requisitos nutricionales a costo mínimo.

Dado un conjunto de alimentos, con su información nutricional y precio, el objetivo es seleccionar las cantidades de los alimentos a adquirir de forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales. Estos requisitos se establecen como cotas mínimas de algunos nutrientes (componentes) de los alimentos.

Sean cinco alimentos con precios y contenidos de tres nutrientes, y requisitos mínimos de los nutrientes de la dieta:

		Nutrientes		
Alimento (u)	Precio ($/u)	Grasas (g/u)	Proteínas (g/u)	Carbohidratos (g/u)
Leche (L)	24	20	34	49
Carne (kg)	190	250	180	0
Arroz (kg)	32	2.5	67	780
Papa (kg)	25	1	21	170
Tomate (kg)	50	2	11	47
	Requisitos (g)	60	120	280

Problema de la dieta: formulación

El objetivo es determinar la cantidad diaria de cada alimento a adquirir mediante las variables x_L, x_C, x_A, x_P, y x_T.
De forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales.

El objetivo es determinar la cantidad diaria de cada alimento a adquirir mediante las variables x_L, x_C, x_A, x_P, y x_T.
De forma de minimizar el costo de la dieta, mientras se cumple con requisitos nutricionales.

La formulación del problema es

$$
\begin{array}{lll}
\min & 24x_L + 190x_C + 32x_A + 25x_P + 50x_T & \\
\text{s.a} & 20x_L + 250x_C + 2.5x_A + x_P + 2x_T \geq 60, & \text{(Grasas)} \\
& 34x_L + 180x_C + 67x_A + 21x_P + 11x_T \geq 120, & \text{(Proteínas)} \\
& 49x_L + 780x_A + 170x_P + 47x_T \geq 280, & \text{(Carbohidratos)} \\
& x_L, x_C, x_A, x_P, x_T \geq 0. &
\end{array}
$$

Problema de la dieta: resolución

Se resuelve el problema y se obtiene la dieta óptima con valor: $ 80.3187 que satisface los requerimientos a partir de la selección de las *cantidades* de

Leche (L)	2.9641
Carne (kg)	0
Arroz (kg)	0.2869
Papa (kg)	0
Tomate(kg)	0

Problema dual de la dieta: formulación de suplemento alimenticio

Se considera el problema de formular suplementos alimenticios, a partir de nutrientes, para la venta en el mercado.
El objetivo es determinar el precio de cada nutriente a vender mediante las variables p_G, p_P y p_C, de forma de maximizar el beneficio del suplemento mientras no se superan los precios de los alimentos del mercado.

Problema dual de la dieta: formulación de suplemento alimenticio

Se considera el problema de formular suplementos alimenticios, a partir de nutrientes, para la venta en el mercado.
El objetivo es determinar el precio de cada nutriente a vender mediante las variables p_G, p_P y p_C, de forma de maximizar el beneficio del suplemento mientras no se superan los precios de los alimentos del mercado.

La formulación es

$$\begin{array}{rll}
\max & 60p_G + 120p_P + 280p_C & \\
\text{s.a} & 20p_G + 34p_P + 49p_C \leq 24, & \text{(Leche)} \\
& 250p_G + 180p_P \leq 190, & \text{(Carne)} \\
& 2.5p_G + 67p_P + 780p_C \leq 32, & \text{(Arroz)} \\
& p_G + 21p_P + 170p_C \leq 25, & \text{(Papa)} \\
& 2p_G + 11p_P + 47p_C \leq 50, & \text{(Tomate)} \\
& p_G, p_P, p_C \geq 0. &
\end{array}$$

Se resuelve el problema, se obtiene la formulación óptima con valor
$ 80.3187,
que satisface los requerimientos a partir de la selección de los *precios* de

Grasa ($/g)	0.4143
Proteína ($/g)	0.4622
Carbohidratos ($/g)	0

Problema de la dieta: relación entre soluciones del primal y el dual

En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).

Problema de la dieta: relación entre soluciones del primal y el dual

En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).

Las soluciones óptimas de los *precios de los nutrientes* en el dual establecen la valoración marginal de los *requisitos mínimos de los nutrientes* en el primal.

Problema de la dieta: relación entre soluciones del primal y el dual

En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).

Las soluciones óptimas de los *precios de los nutrientes* en el dual establecen la valoración marginal de los *requisitos mínimos de los nutrientes* en el primal. Por ejemplo, para el nutriente Grasa se tiene el precio de 0.4143 $/g, el cual determina el valor marginal del cambio en el requisito mínimo de la Grasa, es decir que si se aumenta el requisito de 60 g en una unidad, el valor del óptimo ($ 80.3187) asciende en $ 0.4143.

Problema de la dieta: relación entre soluciones del primal y el dual

En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).

Las soluciones óptimas de los *precios de los nutrientes* en el dual establecen la valoración marginal de los *requisitos mínimos de los nutrientes* en el primal. Por ejemplo, para el nutriente Grasa se tiene el precio de 0.4143 $/g, el cual determina el valor marginal del cambio en el requisito mínimo de la Grasa, es decir que si se aumenta el requisito de 60 g en una unidad, el valor del óptimo ($ 80.3187) asciende en $ 0.4143.

Las soluciones óptimas de las *cantidades de los alimentos* en el primal establecen la valoración marginal de los *precios de los alimentos* en el dual.

Problema de la dieta: relación entre soluciones del primal y el dual

En el óptimo los valores de ambos problemas coinciden: el costo del comprador de la dieta (primal) iguala el beneficio del vendedor de la formulación (dual).

Las soluciones óptimas de los *precios de los nutrientes* en el dual establecen la valoración marginal de los *requisitos mínimos de los nutrientes* en el primal. Por ejemplo, para el nutriente Grasa se tiene el precio de 0.4143 $/g, el cual determina el valor marginal del cambio en el requisito mínimo de la Grasa, es decir que si se aumenta el requisito de 60 g en una unidad, el valor del óptimo ($ 80.3187) asciende en $ 0.4143.

Las soluciones óptimas de las *cantidades de los alimentos* en el primal establecen la valoración marginal de los *precios de los alimentos* en el dual. Por ejemplo, para el alimento Leche se tiene la cantidad 2.9641 L, el cual determina el valor marginal del cambio en el precio de la Leche, es decir que si se aumenta el precio de la Leche de 24 $/L en una unidad, el valor del óptimo ($ 80.3187) asciende en $ 2.9641.

Problema de la dieta: comparación entre soluciones primal y dual

	Primal	**Dual**
Alimento	Variable	Restricción (Valor$\leq$TI)
Leche	2.9641	$24 \leq 24$
Carne	0	$186.773 < 190$
Arroz	0.2869	$32 \leq 32$
Papa	0	$10.120 < 25$
Tomate	0	$5.912 < 50$
Nutriente	Restricción (Valor$\geq$TI)	Variable
Grasa	$60 \geq 60$	0.4143
Proteína	$120 \geq 120$	0.4622
Carbohidrato	$368.988 > 280$	0

Se puede ver que cuando el valor de la restricción no coincide con el valor del término independiente (TI), es decir que la restricción no esta activa, la variable correspondiente en el problema primal o dual es cero.
Por ejemplo, para el alimento Carne, en el caso del problema dual se tiene que su restricción no esta activa, el valor de los nutrientes que aporta la carne es menor que el precio del mercado. Ocurre lo mismo para la Papa y el Tomate.

Problemas primal y dual

La dualidad es una propiedad algebraica que establece un problema dual equivalente al problema primal: con igualdad de los valores óptimos, y relaciones ente las soluciones óptimas y la valoración de los términos independientes en relación al objetivo.

Problemas primal y dual

La dualidad es una propiedad algebraica que establece un problema dual equivalente al problema primal: con igualdad de los valores óptimos, y relaciones ente las soluciones óptimas y la valoración de los términos independientes en relación al objetivo.

Para el caso del problema en formato estándar

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\textit{Primal}} \\
\hline
\min & \mathbf{c}^{\tau}\mathbf{x} \\
\text{s.a} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \leftarrow \mathbf{p} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\textit{Dual}} \\
\hline
\max & \mathbf{p}^{\tau}\mathbf{b} \\
\text{s.a} & \mathbf{p}^{\tau}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^{\tau}.
\end{array}
$$

Se asocia una variable dual, **p**, a cada restricción del problema primal, que puede verse como la penalidad por no cumplir la restricción; entonces se buscan los valores de la variable ante los cuales la presencia de las restricciones no afecta el valor objetivo.

Formulación general del problema dual

Sean $\mathbf{a}_i$ la fila i-ésima y $\mathbf{A}_j$ la columna j-ésima de la matriz $\mathbf{A}$.
La conversión estructural del problema primal de minimización al problema dual de maximización queda establecida término a término según componentes:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\textit{Primal}} \\
\hline
\min & \mathbf{c}^\tau \mathbf{x} \\
\text{s.a} & \mathbf{a}_i^\tau \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1 \\
& \mathbf{a}_i^\tau \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2 \\
& \mathbf{a}_i^\tau \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3 \\
& x_j \geq 0, \quad j \in N_1 \\
& x_j \leq 0, \quad j \in N_2 \\
& x_j \text{ libre}, \quad j \in N_3
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\textit{Dual}} \\
\hline
\max & \mathbf{p}^\tau \mathbf{b} \\
\text{s.a} & p_i \geq 0, \quad i \in M_1 \\
& p_i \leq 0, \quad i \in M_2 \\
& p_i \text{ libre}, \quad i \in M_3 \\
& \mathbf{p}^\tau \mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1 \\
& \mathbf{p}^\tau \mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2 \\
& \mathbf{p}^\tau \mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3.
\end{array}
$$

Por otra parte se cumple que $\quad \max\,(\cdot) \equiv -\min -(\cdot).$

- *Dualidad débil*
  Sean $\hat{\mathbf{x}}$ solución primal factible y $\hat{\mathbf{p}}$ solución dual factible entonces

$$\mathbf{c}^{\mathcal{T}}\hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{p}}^{\mathcal{T}}\mathbf{b}.$$

- *Dualidad débil*
  Sean $\hat{\mathbf{x}}$ solución primal factible y $\hat{\mathbf{p}}$ solución dual factible entonces
  $$\mathbf{c}^\tau \hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{p}}^\tau \mathbf{b}.$$
- *Dualidad fuerte*
  Existe $\mathbf{x}^*$ solución óptima si y solo si existe $\mathbf{p}^*$ solución óptima, tales que
  $$\mathbf{c}^\tau \mathbf{x}^* = (\mathbf{p}^*)^\tau \mathbf{b}.$$

- *Dualidad débil*
  Sean $\hat{\mathbf{x}}$ solución primal factible y $\hat{\mathbf{p}}$ solución dual factible entonces
  $$\mathbf{c}^{\tau}\hat{\mathbf{x}} \geq \hat{\mathbf{p}}^{\tau}\mathbf{b}.$$

- *Dualidad fuerte*
  Existe $\mathbf{x}^*$ solución óptima si y solo si existe $\mathbf{p}^*$ solución óptima, tales que
  $$\mathbf{c}^{\tau}\mathbf{x}^* = (\mathbf{p}^*)^{\tau}\mathbf{b}.$$

- *Holgura complementaria*
  Sean $\hat{\mathbf{x}}$ solución primal factible y $\hat{\mathbf{p}}$ solución dual factible, $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$ son soluciones óptimas si y solo si
  $$\hat{p}_i(\mathbf{a}_i\hat{\mathbf{x}} - b_i) = 0, \quad i = 1, ..., m,$$
  $$(c_j - \hat{\mathbf{p}}^{\tau}\mathbf{A}_j)\hat{x}_j = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Resolución de los problemas primal y dual

El algoritmo Simplex aplicado a uno de los problemas resuelve ambos simultáneamente.

Resolución de los problemas primal y dual

El algoritmo Simplex aplicado a uno de los problemas resuelve ambos simultáneamente.

En el caso de aplicarlo al primal, se obtienen $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\mathbf{p} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\tau}\mathbf{B}^{-1}$ tales que cumplen las condiciones de factibilidad y optimalidad:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0},$$

$$\overline{\mathbf{c}}^{\tau} = \mathbf{c}^{\tau} - \mathbf{p}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}.$$

El esfuerzo computacional de resolver un problema es en promedio proporcional a la cantidad de restricciones, lo cual permite determinar que formulación es más eficiente de resolver.

Posibles soluciones de los problemas primal y dual

Toda instancia de un problema de programación lineal tiene como resolución posible una de las tres:

- que tenga solución óptima (valor óptimo finito),
- que el problema sea no acotado (valor óptimo infinito), o
- que el problema sea no factible (la región factible es vacía).

Posibles soluciones de los problemas primal y dual

Toda instancia de un problema de programación lineal tiene como resolución posible una de las tres:

- que tenga solución óptima (valor óptimo finito),
- que el problema sea no acotado (valor óptimo infinito), o
- que el problema sea no factible (la región factible es vacía).

Las posibles combinaciones de soluciones de los problemas primal y dual son

	Dual		
Primal	Optimo finito	No acotado	No factible
Optimo finito	✓	×	×
No acotado	×	×	✓
No factible	×	✓	✓

Una *empresa acopiadora* requiere transportar bienes en cantidades $b_i > 0$ desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n mediante una red vial.
La red esta definida por un conjunto A de caminos dirigidos entre pares de lugares. Sea c_{ij} el costo unitario de transporte en el camino $(i, j) \in A$.

El problema consiste en determinar la cantidad a transportar x_{ij} que satisface los requisitos a costo mínimo,

Una *empresa acopiadora* requiere transportar bienes en cantidades $b_i > 0$ desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n mediante una red vial.
La red esta definida por un conjunto A de caminos dirigidos entre pares de lugares. Sea c_{ij} el costo unitario de transporte en el camino $(i, j) \in A$.

El problema consiste en determinar la cantidad a transportar x_{ij} que satisface los requisitos a costo mínimo,

Una formulación del problema es

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{k:(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = b_i, \quad i = 1, ..., n, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A, \end{array}$$

donde $b_n = -\sum_{i=1}^{n-1} b_i$.

Ejercicio. Problema de transporte: caso Transportista - Dual

Por otra parte, se considera una *empresa transportista* que ofrece trasladar bienes desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n a precio unitario de transporte p_i.

Ejercicio. Problema de transporte: caso Transportista - Dual

Por otra parte, se considera una *empresa transportista* que ofrece trasladar bienes desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n a precio unitario de transporte p_i.

Al transportar de i a j el acopiador incurre en un costo unitario c_{ij}. Si el transportista se encarga del transporte de j a n, el costo total es $c_{ij} + p_j$.

Por otra parte, se considera una *empresa transportista* que ofrece trasladar bienes desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n a precio unitario de transporte p_i.

Al transportar de i a j el acopiador incurre en un costo unitario c_{ij}. Si el transportista se encarga del transporte de j a n, el costo total es $c_{ij} + p_j$.

El transportista conoce el costo de transporte c_{ij}.
1. ¿Qué condición debe establecer él al precio p_i para que sea competitivo y anime al acopiador a usar su servicio?

Ejercicio. Problema de transporte: caso Transportista - Dual

Por otra parte, se considera una *empresa transportista* que ofrece trasladar bienes desde los lugares $i = 1, ..., n-1$ al lugar n a precio unitario de transporte p_i.

Al transportar de i a j el acopiador incurre en un costo unitario c_{ij}. Si el transportista se encarga del transporte de j a n, el costo total es $c_{ij} + p_j$.

El transportista conoce el costo de transporte c_{ij}.
1. ¿Qué condición debe establecer él al precio p_i para que sea competitivo y anime al acopiador a usar su servicio?

El transportista conoce las cantidades a transportar b_i del acopiador.
2. ¿Cuál es el objetivo que él procuraría al ofrecer su servicio?