Método Branch & Bound en *Optimización de Problemas de Producción*

Equipo Docente:
Fernando Islas - Carlos Testuri
Colaboran:
Héctor Cancela - Antonio Mauttone - Pedro Piñeyro

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación.
Facultad de Ingeniería. UdelaR

2023

Programación lineal entera-mixta

Formulación que incluye variables continuas y discretas:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a} & A_1 x + A_2 y = b, \\ & x \geq 0, \\ & y \geq 0 \text{ entera.} \end{array} \tag{1}$$

Se asume que los componentes de la matriz **A** y de los vectores c y b toman valores enteros.

Integridad de variables: no convexidad de región factible

- Exigencias de integralidad determinan decisiones enteras.
- Un caso particular es cuando las variables enteras toman valores binarios, $\{0, 1\}$. Están asociadas a las decisiones del tipo "si o no" realizar una actividad o acción.
- Los problemas de programación lineal entera (ILP) o programación lineal entera-mixta (MILP) son más difíciles de resolver que los problemas de programación lineal (LP).
  La dificultad radica en que las regiones factibles de ILP y MILP no son convexas, a diferencia de LP que si lo es.

Casos especiales en que su relajación a LP mantiene integralidad

Existen casos en los que se puede relajar (quitar) la exigencia de que las variables sean enteras; resolver el ILP o MILP como un problema LP y asegurar que la solución óptima obtenida es entera:

- La matriz de restricciones **A** es totalmente unimodular.
- Los problemas se pueden formular como problemas de flujo en red. Incluye casos especiales del problema: problemas de máximo flujo, transporte y asignación.

Resolución mediante branch and boud

El esquema de resolución mediante *branch and boud* (ramificado y acotamiento) utiliza la técnica de "dividir y conquistar" el espacio de soluciones factibles.

El esquema de resolución mediante *branch and boud* (ramificado y acotamiento) utiliza la técnica de "dividir y conquistar" el espacio de soluciones factibles.

En el caso de que el problema es difícil de resolver, se divide el espacio de soluciones (ramificado) generando subproblemas más simples y se determinan cotas del valor objetivo para evitar resolver algunos de los subproblemas (acotamiento).

El esquema de resolución mediante *branch and boud* (ramificado y acotamiento) utiliza la técnica de “dividir y conquistar” el espacio de soluciones factibles.

En el caso de que el problema es difícil de resolver, se divide el espacio de soluciones (ramificado) generando subproblemas más simples y se determinan cotas del valor objetivo para evitar resolver algunos de los subproblemas (acotamiento).

A su vez cada subproblema puede dividirse nuevamente, generando un esquema jerárquico de particiones.

El método enumera todas las soluciones factibles (enumerativo).

Esquema de resolución mediante branch and boud

Sea el problema

$$\begin{aligned} z = \quad & \max \quad c^\tau x \\ & \text{s.a} \quad\ \ x \in X \subset \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

se particiona el conjunto factible X en subconjuntos X_k, con $k = 1, ..., K$, y se resuelven separadamente los subproblemas

$$\begin{aligned} z^k = \quad & \max \quad c^\tau x \\ & \text{s.a} \quad\ \ x \in X_k. \end{aligned}$$

Esquema de resolución mediante branch and boud

Sea el problema

$$z = \begin{array}{ll} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in X \subset \mathbb{Z}, \end{array}$$

se particiona el conjunto factible X en subconjuntos X_k, con $k = 1, ..., K$, y se resuelven separadamente los subproblemas

$$z^k = \begin{array}{ll} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in X_k. \end{array}$$

La resolución del problema original es equivalente a

$$z = \max_{k \in K} z^k.$$

La división recurrente de subproblemas se puede representar con un árbol de enumeración.

Ejemplos de ramificación

Dado el conjunto factible $X \subseteq \{0,1\}^n$, se lo puede particionar en $X_0 = \{x \in X : x_1 = 0\}$ y en $X_1 = \{x \in X : x_1 = 1\}$.
A su vez X_0 se podría particionar en $X_{00} = \{x \in X_0 : x_2 = 0\}$ y en $X_{01} = \{x \in X_0 : x_2 = 1\}$.

Ejemplos de ramificación

Dado el conjunto factible $X \subseteq \{0,1\}^n$, se lo puede particionar en $X_0 = \{x \in X : x_1 = 0\}$ y en $X_1 = \{x \in X : x_1 = 1\}$.
A su vez X_0 se podría particionar en $X_{00} = \{x \in X_0 : x_2 = 0\}$ y en $X_{01} = \{x \in X_0 : x_2 = 1\}$.

Dado el conjunto factible $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, y cierto $r \in \mathbb{R}$ se lo puede particionar en $X_{<r} = \{x \in X : x_1 \leq \lfloor r \rfloor\}$ y en $X_{>r} = \{x \in X : x_1 \geq \lceil r \rceil\}$.

Ejemplos de ramificación

Dado el conjunto factible $X \subseteq \{0,1\}^n$, se lo puede particionar en $X_0 = \{x \in X : x_1 = 0\}$ y en $X_1 = \{x \in X : x_1 = 1\}$.
A su vez X_0 se podría particionar en $X_{00} = \{x \in X_0 : x_2 = 0\}$ y en $X_{01} = \{x \in X_0 : x_2 = 1\}$.

Dado el conjunto factible $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, y cierto $r \in \mathbb{R}$ se lo puede particionar en $X_{<r} = \{x \in X : x_1 \leq \lfloor r \rfloor\}$ y en $X_{>r} = \{x \in X : x_1 \geq \lceil r \rceil\}$.

Dado el conjunto factible $X \subseteq \{a,b,c\}^n$, se lo puede particionar en $X_a = \{x \in X : x_1 = a\}$, en $X_b = \{x \in X : x_1 = b\}$, y en $X_c = \{x \in X : x_1 = c\}$.

La cantidad total de particiones crece exponencialmente con los niveles de particionado. ¿Cómo acotar el proceso de particionado?

Mientras resolver un subproblema puede ser difícil, obtener cotas de su valor objetivo puede ser fácil. Un método para obtener cotas superiores es mediante una relajación a programación lineal. Las cotas inferiores se pueden obtener mediante soluciones factibles.

Se asume que existe la posibilidad de determinar, en forma eficiente, cotas sobre los valores objetivos, z^k, de los subproblemas X_k.
Sean $\overline{z}^k$ y $\underline{z}^k$, las cotas superiores e inferiores de los subproblemas,

$$\underline{z}^k \leq z^k \leq \overline{z}^k.$$

Acotamiento

Mientras resolver un subproblema puede ser difícil, obtener cotas de su valor objetivo puede ser fácil. Un método para obtener cotas superiores es mediante una relajación a programación lineal. Las cotas inferiores se pueden obtener mediante soluciones factibles.

Se asume que existe la posibilidad de determinar, en forma eficiente, cotas sobre los valores objetivos, z^k, de los subproblemas X_k.
Sean $\bar{z}^k$ y $\underline{z}^k$, las cotas superiores e inferiores de los subproblemas,

$$\underline{z}^k \leq z^k \leq \bar{z}^k.$$

Las cotas permiten evitar resolver suproblemas, estableciendo lo que se denomina *podas* en el árbol de enumeración.

Poda por optimalidad

Si $\underline{z}^k = \bar{z}^k = z^k$ entonces la solución óptima del subproblema se ha alcanzado, por lo que no es necesario continuar revisando X_k y su rama correspondiente en el árbol de enumeración puede podarse.

Podas por optimalidad, acotamiento e infactibilidad

Poda por optimalidad
Si $\underline{z}^k = \bar{z}^k = z^k$ entonces la solución óptima del subproblema se ha alcanzado, por lo que no es necesario continuar revisando X_k y su rama correspondiente en el árbol de enumeración puede podarse.

Poda por acotamiento
Dada la división de X en dos subconjuntos X_1 y X_2.
Si $\bar{z}^1 < \underline{z}^2$ entonces la solución óptima del problema no puede tener valor menor a $\underline{z}^2$, y como el valor máximo de X_1 no lo puede superar la rama del árbol de enumeración correspondiente a X_1 puede podarse.

Poda por optimalidad
Si $\underline{z}^k = \bar{z}^k = z^k$ entonces la solución óptima del subproblema se ha alcanzado, por lo que no es necesario continuar revisando X_k y su rama correspondiente en el árbol de enumeración puede podarse.

Poda por acotamiento
Dada la división de X en dos subconjuntos X_1 y X_2.
Si $\bar{z}^1 < \underline{z}^2$ entonces la solución óptima del problema no puede tener valor menor a $\underline{z}^2$, y como el valor máximo de X_1 no lo puede superar la rama del árbol de enumeración correspondiente a X_1 puede podarse.

Poda por infactibilidad
Si X_k es vacío la rama del árbol de enumeración correspondiente puede podarse.

Seudocódigo

El proceso implica llevar una lista de subproblemas *activos*: que no han sido podados o que necesitan explorarse. Sea $\underline{z}$ el valor del objetivo de la mejor solución factible encontrada hasta el momento.

Ramificado y acotamiento

1. Agregar a la lista el problema inicial. Establecer $\underline{z} := -\infty$ y $x^* := \{\}$.
2. Mientras la lista no esté vacía, seleccionar un subproblema activo, X_k.
3. Resolver la relajación del subproblema y obtener su cota superior, $\bar{z}^k$.
4. Si el subproblema es infactible, se lo descarta. Ir al paso 2.
5. Si $\bar{z}^k \leq \underline{z}$, se lo descarta por acotamiento. Ir al paso 2.
6. Si $x^k(relaj.)$ es entero, actualizar la cota $\underline{z}$ y la solución corriente x^*. Si no lo es dividirlo en nuevos subproblemas. Agregar los nuevos subproblemas a la lista de problemas activos. Ir al paso 2.
7. Reportar solución óptima x^*.

Esquema de resolución con múltiples opciones

- Cotas inferiores provistas por soluciones factibles.
- Cotas superiores provistas por relajación o problemas duales. Compromiso entre cotas débiles, calculadas con menor esfuerzo, y cotas fuertes, calculadas con mayor esfuerzo.
- Partición de la región factible; ¿se establece una regla general o evoluciona a medida que se resuelve el problema?
- Orden de evaluación de subproblemas; ¿ordenamiento de cola o priorizar según mayor cota superior?

Dado el siguiente problema con región factible denominada X,

$$\begin{aligned} z = \quad \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras.} \end{aligned}$$

Para **establecer las cotas** se relaja el problema a programación lineal.

Dado el siguiente problema con región factible denominada X,

$$\begin{array}{rll} z = & \max & x_1 + 2x_2 \\ & \text{s.a} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}. \end{array}$$

Para **establecer las cotas** se relaja el problema a programación lineal.
La solución del problema relajado da la cota superior $\overline{z} = \frac{13}{2}$ con solución $\overline{x} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, la cota inferior se asume $\underline{z} = 0$.
Dada la diferencia de las cotas se debe ramificar.

Ejemplo ilustrativo (2/5)

Para **ramificar** se elige una variable básica que no es entera en la solución, dividiendo la región factible en dos a partir de restricciones excluyentes de esta.
Dada $x_1 = \frac{3}{2}$, se particiona la región factible X en
$X_1 = X \cap \{x : x_1 \leq \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1\}$ y $X_2 = X \cap \{x : x_1 \geq \lceil \frac{3}{2} \rceil = 2\}$, generando dos nuevos vértices activos en el árbol.

Ejemplo ilustrativo (2/5)

Para **ramificar** se elige una variable básica que no es entera en la solución, dividiendo la región factible en dos a partir de restricciones excluyentes de esta.
Dada $x_1 = \frac{3}{2}$, se particiona la región factible X en
$X_1 = X \cap \{x : x_1 \leq \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1\}$ y $X_2 = X \cap \{x : x_1 \geq \lceil \frac{3}{2} \rceil = 2\}$, generando dos nuevos vértices activos en el árbol.

Se selecciona el vértice X_1 para continuar.
Se resuelve la relajación lineal del vértice X_1.
La solución del problema relajado da la cota superior $\bar{z}^1 = 5$ con solución entera $\bar{x}^1 = (1, 2)$.

Se selecciona el vértice X_2 para continuar.
Se resuelve la relajación lineal del vértice X_2.
La solución del problema relajado da la cota superior $\bar{z}^2 = \frac{16}{3}$ con solución entera $\bar{x}^2 = (2, \frac{5}{3})$. Por lo que X_2 no puede ser podado.

Dada $\bar{x}_2^2 = \frac{5}{3}$, se particiona la región factible X_2 en $X_{21} = X_2 \cap \{x : x_2 \leq \lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1\}$ y $X_{22} = X_2 \cap \{x : x_2 \geq \lceil \frac{5}{3} \rceil = 2\}$, generando dos nuevos vértices activos en el árbol.

Se selecciona el vértice X_{21} para continuar.
Se resuelve la relajación lineal del vértice X_{21}.
La solución del problema relajado da la cota superior $\bar{z}^{21} = \frac{22}{5} = 4{,}4$ con solución $\bar{x}^{21} = (\frac{12}{5} = 2{,}4, 1)$. Dado que su cota superior es inferior a la de X_1 el vértice X_{21} es *podado por acotamiento*.

Ejemplo ilustrativo (5/5)

Se selecciona el vértice X_{22} para continuar.
Se resuelve la relajación lineal del vértice X_{22}.
El problema relajado correspondiente no es factible, X_{22} es *podado por infactibilidad*.

Se selecciona el vértice X_{22} para continuar.
Se resuelve la relajación lineal del vértice X_{22}.
El problema relajado correspondiente no es factible, X_{22} es *podado por infactibilidad*.

Habiendo agotado la lista de subproblemas activos, se determina que la solución óptima del problema es la establecida en el vértice X_1: $z^* = 5$ con solución $x^* = (1, 2)$.