Método Simplex en *Optimización de Problemas de Producción*

Equipo Docente:
Fernando Islas - Carlos Testuri
Colaboran:
Héctor Cancela - Antonio Mauttone - Pedro Piñeyro

Depto. Investigación Operativa. Instituto de Computación.
Facultad de Ingeniería. UdelaR

2023

Método Simplex

- Fundamentos del método Simplex: formulación, soluciones factibles, básicas y óptimas.
- Interpretación geométrica.
- Algoritmo del método Simplex. multiplicadores Simplex, precios sombra y nociones de dualidad.

Método Simplex

- Formulación **estándar** de un problema de programación lineal (PL):

$$\begin{cases} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- c y x vectores en $\mathbb{R}^n$.
- Matriz A en $\mathbb{R}^{m,n}$ de rango m con $m \leq n$.
- Formulaciones con desigualdades $\leq$, $\geq$.

- **Soluciones factibles**: los $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen las restricciones definen la *región factible*.
- **Soluciones óptimas**: Aquellas soluciones factibles x^* para las cuales $c^T x^* \leq c^T x$, para cualquier x de la región factible.
- El conjunto de soluciones factibles forman un **politopo convexo** en $\mathbb{R}^n$ (en R^3 es un poliedro y en R^2 es un polígono).

Método Simplex

- **Teorema Fundamental de la Programación Lineal**
  Si un problema de PL tiene solución óptima finita, entonces existe una solución óptima que está en un vértice del politopo convexo.
- En el caso de que haya más de una solución óptima, entonces hay infinitas soluciones óptimas.

Método Simplex

- Los vértices de la región factible se denominan **soluciones básicas factibles** (BFS por sus siglas en inglés), debido a que se pueden obtener a partir de una base de la matriz de restricciones.
- Las BFS son aquellas soluciones factibles x que se pueden representar como un conjunto de columnas linealmente independiente de la matriz A.

- Formulación estándar de un PL para BFS:

$$\begin{cases} \text{mín}\, z & \\ \text{s.a} & Bx_B + Nx_N = b \\ & c_B^T x_B + c_N^T x_N - z = 0 \\ & x_B \geq 0, x_N = 0 \end{cases}$$

- $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ no singular ($\exists\, B^{-1} : B^{-1}B = I$)
- $N \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}$
- $x_B \in \mathbb{R}^m$, $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$

Método Simplex

- Formulación canónica

$$\begin{cases} \min z & \\ \text{s.a} & Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N - z = -c_B^T B^{-1}b \\ & x_B \geq 0, x_N = 0 \end{cases}$$

Método Simplex

- Tableau inicial con variables artificiales:

x_B	x_N	y	LD
B	N	I	b
c_B^T	c_N^T	0	0

Método Simplex

- Tableau final con base B óptima:

x_B	x_N	y	LD
I	$B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$
0	$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$-c_B^T B^{-1}$	$-c_B^T B^{-1} b$

Método Simplex

- **Idea del algoritmo**: comenzando en una BFS, recorrer las BFS adyacentes una a la vez, hasta que se cumpla una de las condiciones de finalización: se encontró una solución óptima o bien el problema es no acotado.
- **Observación 1**: Hay una cantidad finita de soluciones básicas factibles (vértices del politopo convexo que forma la región factible).
- **Observación 2**: El valor de la función objetivo en cada paso es mejor o igual que en el paso anterior.

Método Simplex: condiciones de factibilidad y optimalidad

- Para cada matriz básica **B**, la solución básica factible correspondiente esta dada por:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0, \quad x_N = 0$$

- Para la solución óptima se cumple que (caso min.):

$$\bar{c}_B^T = 0, \quad \bar{c}_N^T = c_N^T - pN = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

con $\bar{c}$ el vector de **costos reducidos** y p los **multiplicadores del simplex** o **precios sombra**.

Método Simplex

- **Entra** a la base alguna variable no básica x_{N_k} para la que se cumple que:

$$\bar{c}_{N_k} < 0$$

- **Sale** la variable básica x_{B_i} para la cual se cumple que:

$$\min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} > 0 \right\} \text{ con } \bar{A} = B^{-1}N.$$

- En nuevo valor objetivo se reduce en $\bar{c}_{N_k} x_{N_k} < 0$.
- Si no existe un $\bar{a}_{ik} > 0$ el problema es no acotado.

Algoritmo del Método Simplex

1. Determinar una BFS inicial (Fase 1)[1]
2. Si todos los costos reducidos son no negativos: FIN.
3. Determinar variable no básica k que entra a la base.
4. Si no existe $\bar{a}_{ik} > 0$, entonces el problema es no acotado: FIN.
5. Determinar variable básica que sale de la base.
6. Actualizar la tabla mediante pivoteo.
7. Volver a 2.

---

[1] Considera el problema auxiliar de minimizar la suma de las variables artificiales. Si el valor óptimo es 0, se pasa a fase 2. En caso contrario, el problema no tiene solución factible.

Algoritmo del Método Simplex

- Empíricamente el algoritmo termina en promedio en una cantidad de pasos (pivoteos) que está entre m y $3m$ iteraciones, con m la cantidad de restricciones.
- El orden del algoritmo en el peor caso es no polinomial.
- Existen implementaciones más eficientes computacionalmente, como por ejemplo la de Simplex Revisado.

Método Simplex y Dualidad

- Para todo problema PL P se puede definir otro problema de PL D que se llama **problema Dual**. El original se denomina **Primal**.
- **Teorema**: Si P tiene solución óptima, entonces D tiene solución óptima y el valor óptimo de ambos coincide.
- El tableau final del Método Simplex aplicado al problema primal P nos da también la solución del problema dual D.

Método Simplex y Dualidad

- Primal:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} \min c^T x & & \\ Ax & = & b \\ x \geq 0 & & \end{array}\right.$$

- Dual:

$$(D)\left\{\begin{array}{lcl} \max \lambda^T b & & \\ \lambda^T A & \leq & c^T \\ \lambda \in R^n & & \end{array}\right.$$

Método Simplex

- $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ es solución óptima del problema D, con **B** la matriz básica optimal del problema P.

$$\lambda^T A = [\lambda^T B, \lambda^T N] = [c_B^T, c_B^T B^{-1} N] \leq [c_B^T, c_N^T] = c^T$$

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

- $p = c_B^T B^{-1}$ son los Multiplicadores Simplex que aparecen en la última fila del tableau final del algoritmo del Método Simplex.

Método Simplex: Ejemplo

- Una empresa produce 3 tipos de productos x, y, z para los cuales necesita 2 tipos de recursos b_1 y b_2 de acuerdo a la siguiente tabla:

	x	y	z	Máx.
b_1	1/2	2	1	24
b_2	1	2	4	60
Precio	6	14	13	

- La empresa desea maximizar la venta de los productos cumpliendo con las restricciones de los recursos con los que dispone.

Método Simplex: Ejemplo

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} \text{máx} & 6x+14y+13z & \\ \text{sujeto a:} & & \\ & \frac{1}{2}x+2y+z & \leq \quad 24 \\ & x+2y+4z & \leq \quad 60 \\ & x,y,z & \geq \quad 0 \end{array}\right.$$

Método Simplex: Ejemplo

$$
(P') \left\{ \begin{array}{lll}
\text{mín} & -6x - 14y - 13z & \\
\text{sujeto a:} & & \\
 & \frac{1}{2}x + 2y + z + s_1 & = & 24 \\
 & x + 2y + 4z + s_2 & = & 60 \\
 & x, y, z, s_1, s_2 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

Método Simplex: Ejemplo

- Tableau #1

sale ↓

x	y	z	s_1	s_2	LD	
1/2	2	1	1	0	24	
1	2	④	0	1	60	
-6	-14	-13	0	0	0	F II
-3/2	-4	-5	0	0	-84	F I

↑ entra

Método Simplex: Ejemplo

- Tableau #2

			sale ↓			
x	y	z	s_1	s_2	LD	
1/4	$\textcircled{3/2}$	0	1	-1/4	9	
1/4	1/2	1	0	1/4	15	
-11/4	-15/2	0	0	13/4	195	F II
-1/4	-3/2	0	0	5/4	-9	F I
	↑ entra					

Método Simplex: Ejemplo

- Tableau #3

sale ↓

x	y	z	s_1	s_2	LD	
1/6	1	0	2/3	-1/6	6	
1/6	0	1	-1/3	1/3	12	
-3/2	0	0	5	2	240	F II
0	0	0	1	1	0	F I

↑ entra

Método Simplex: Ejemplo

- Tableau #4

x	y	z	s_1	s_2	LD
1	6	0	4	-1	36
0	-1	1	-1	1/2	6
0	9	0	11	1/2	294

- Todos los costos reducidos son no negativos: FIN

Método Simplex: Ejemplo

$$(D)\left\{\begin{array}{lll} \text{máx} & 24\lambda_1 + 60\lambda_2 & \\ \text{sujeto a:} & & \\ & \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 & \leq \quad -6 \\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq \quad -14 \\ & \lambda_1 + 4\lambda_2 & \leq \quad -13 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} & \end{array}\right.$$

Método Simplex: Ejemplo

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (-6 \quad -13)$$

$$p = c_B^T B^{-1} = (-11 \quad -1/2) = \lambda^T$$

Método Simplex: Ejemplo

- Los Multiplicadores Simplex se pueden interpretar como el valor asignado a los recursos. Por eso se denominan también **precios sombra**.
- El precio sombra es el precio máximo que la empresa debería pagar por su correspondiente recursos.
- Por cada nueva unidad de recurso, el valor óptimo mejora según los **costos marginales** de cada nueva unidad.
- En el ejemplo anterior, el costo marginal del recurso b_1 es de 11 unidades y el del recurso b_2 es de $1/2$ unidades.

Método Simplex: Bibliografía

- “Linear Programming and Extensions”, G.B. Dantzig, Princeton University Press, 1963.
- “Programación Lineal y No Lineal”, David G. Luenberger, Addison-Wesley Ed., 2da edición.
- “Linear Programming”, Katta G. Murty, Wiley Ed., 1era edición.
- “Applied Mathematical Programming”, Bradley, Hax and Magnati, Addison-Wesley Ed., disponible en `http://web.mit.edu/15.053/www/`