Clase 21: Bases

Wednesday, October 23, 2024 7:33 PM

Recordemos: V e. vectorial, v vectores $\mathbb{K}$ cuerpo.

Definiciones: ① Combinación lineal

Diremos que v es combinación de $v_1, \dots, v_n$ si $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (escalares) tq

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

② Espacio generado: Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Definimos el espacio generado por A como $[A] = \{v \in V \text{ tq } v \text{ es comb. lineal de elementos de } A\}$.

- En este contexto, diremos que A es un generador de $[A]$.
- Más en general, diremos que A es generador de W si $[A] = W$.
- Ejercicio: Pruebe que, para cualquier $A \subset V$, se tiene que $[A]$ es un s.e.v. de V.

③ Diremos que $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente (LI) si la única combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ es tomando $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Si no es LI, diremos que es LD.

Ejemplos: $\underset{v_1}{(1,0,0)} + \underset{v_2}{(1,2,1)} + \underset{v_3}{(5,6,3)} = A$.

$\times 2$ $\quad \times 3$

$(2,0,0) + (3,6,3) - (5,6,3) = (0,0,0)$

$2v_1 + 3v_2 - v_3 = (0,0,0)$

$\Rightarrow A$ es LD (no es LI).

Hágalo!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo tanto: $(1,0,0), (1,2,0), (1,1,3)$ es LI?

Impongo $\alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (1,2,0) + \alpha_3 (1,1,3) = (0,0,0)$.

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Comp. determinado pues $Rg(A) = 3 \Rightarrow$ LI

Equivalencias: Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$.

- A es LI $\iff$ Ningún vector de A es comb. lineal de los otros elem. de A. $\iff$ Todo vector de $[A]$ se escribe de forma única como comb. lineal de elem de A.

A es LD $\iff \exists\, v_j \in A$ tq $v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$ $\iff$ Existe $v \in [A]$ que se puede obtener con varias comb. lineales diferentes.

Probarlo!

Def (base): Diremos que $A \subset V$ es una base de V si

① A es LI. ← pueda formar el 0?

② $[A] = V$.

Ejemplo tanto: $V = \mathbb{R}^3$ $\quad A = \{(2,-5,0), (-1,3,0)\}$.

no alineados → LI.

No es generador:

$\alpha_1 (2,-5,0) + \alpha_2 (-1,3,0)$

$= (\underbrace{2\alpha_1 - \alpha_2}_{x}, \underbrace{-5\alpha_1 + 3\alpha_2}_{y}, 0) \to z = 0$.

Probar que $[A] =$ plano $z = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & x \\ -5 & 3 & y \end{pmatrix} \quad \text{Rango } 2$$

$\Rightarrow$ No es base.

Pero: lo puedo completar a una base

Por ejemplo, agregando el $(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & x \\ -5 & 3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$ ← Siempre comp. determinado.

Para que $\{(2,-5,0), (-1,3,0), (0,0,1)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$, necesito que $\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se cumpla que $\exists!\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tq

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ ← Sistema comp. determinado!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & x \\ -5 & 3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_1 \cdot 5/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1/2 & 0 & y - 5/2\, x \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$\boxed{\alpha_3 = z}$ $\quad \boxed{\alpha_2 = 2y - 5x}$ $\quad 2\alpha_1 - \alpha_2 = x$

$\iff 2\alpha_1 - 2y + 5x = x$

$\boxed{\alpha_1 = y - 2x}$

$$\underset{V}{(x,y,z)} = \underset{V_1}{\overset{\alpha_1}{(y-2x)}}(2,-5,0) + \underset{V_2}{\overset{\alpha_2}{(2y-5x)}}(-1,3,0) + \underset{V_3}{\overset{\alpha_3}{z}}(0,0,1)$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Def: Sea $v \in V$ un vector, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Entonces $\exists!\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

A los escalares $\alpha_1 \dots \alpha_n$ les llamo coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$.

Notación: $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Ejemplo: ① (lo hicimos recién). Si $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x,y,z)$,

$\mathcal{B} = \{(2,-5,0), (-1,3,0), (0,0,1)\}$

$\to \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (y - 2x, 2y - 5x, z)$

$v = (11,3,4) \Rightarrow \text{coord}_{\mathcal{B}}(11,3,4) = (3 - 2 \cdot 11, 2 \cdot 3 - 6 \cdot 11, 4)$

$= (-19, -60, 4)$.

② $V = \mathbb{R}^n$ $\quad \mathcal{B} = \{\underset{e_1}{(1,0,0,\dots,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0,\dots,0)}, \dots, \underset{e_n}{(0,0,\dots,0,1)}\}$

Tomo $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow v = x_1 (1,0,\dots,0) + x_2 (0,1,\dots,0) + \dots + x_n (0,\dots,0,1)$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow \text{coord}_{\mathcal{B}}((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & & & x_3 \\ 0 & 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

Id!

③ (El orden importa!)

$V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(0,1), (1,0)\}$, $v = (x,y)$

$\to \text{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (y, x)$.

Afirmación: Supongamos que $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ es LD.

Más aún, supongamos que v_n es comb. lineal de elem de $A' = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$.

$\to [A] = [A']$. $\quad \{v \in V \text{ tq } v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1}\}$

$\{v \in V \text{ tq } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\}$ $\quad$ Terminar!

Consecuencia:

- Si $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ es LD, entonces existe $A' \subset A$ tq
  - A' es LI,
  - $[A'] = [A]$.
- Si $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un generador de V, entonces $\exists\, \mathcal{B} \subset A$ tq es $\mathcal{B}$ es base de V!

$\pi: \vec{0} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ $\quad \{v, w\}$ base de π.