Wednesday, October 2, 2024 7:46 PM

# Propiedades prod. interno.

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

Recordemos? Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores.

El producto interno $\langle\,,\,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

(Toma dos vectores, devuelve un real).

está definido como:

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$. (definición).

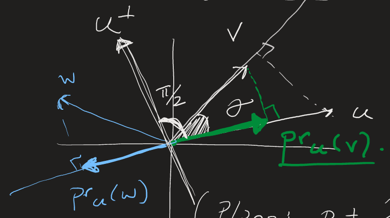
Obs: Lo puedo pensar como el producto de 2 matrices: una fila por una columna.

$$(u_1, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \langle u, v \rangle.$$

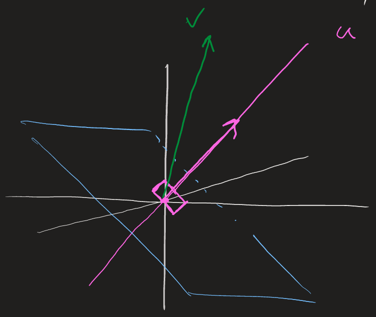
Interpretación geométrica:

$$\boxed{\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta}$$

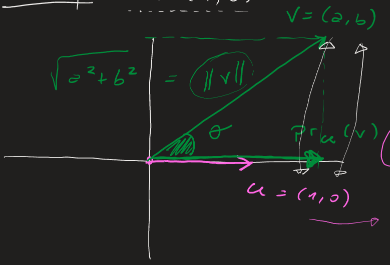
donde $\theta$ es el ángulo entre $u$ y $v$.



(Plano: $p + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$) Si tomo dos vectores, comparten un plano que pasa por el $\vec{0}$.



Caso choto: $u = (1,0)$.



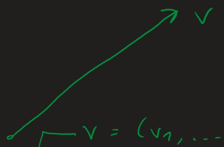
$$\boxed{\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ &= a\end{aligned}}$$

$\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$

$1 \cdot a = a$.

$$\boxed{\mathrm{pr}_u(v) = (a, 0)} \checkmark$$

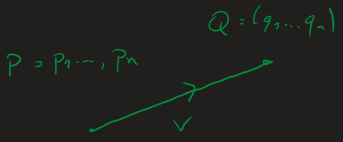
$$a = \|\mathrm{pr}_u(v)\| = \|v\| \cdot \cos\theta \Leftarrow \cos\theta = \frac{\|\mathrm{pr}_u(v)\|}{\|v\|}$$



$v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\boxed{\|v\| = \text{medida del vector} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}$$

distancia entre dos puntos P, Q:



El vector que los une es $Q - P$

$= (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$

$\|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots (q_n - p_n)^2}$

De nuevo: $\boxed{u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta.} = \langle u, v \rangle$.

Asumamos que $\|u\| = 1$. En ese caso, $\langle u, v \rangle = \|v\| \cos a$.

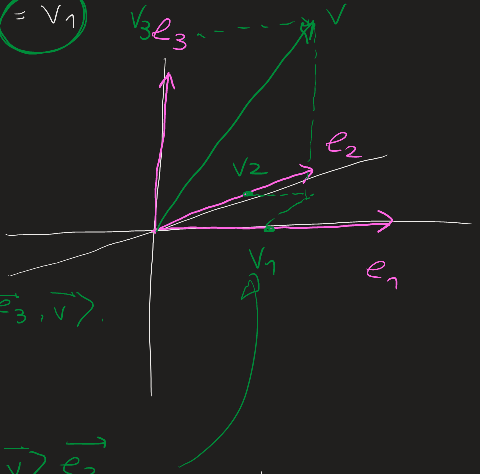
$$= \| pr_u (v) \|.$$

Observación: Si tomo en $\mathbb{R}^n$, $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ $\|e_1\| = 1$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \Longrightarrow \underline{\langle \boxed{e_1} \, v \rangle} = v_1 . 1 + v_2 . 0 + \dots + v_n . 0$

$\boxed{= v_1}$

Cuánto del vector v, está en la dirección de $e_1$?



$v = (v_1, v_2, v_3)$.

$v_1 = \langle \vec{e_1}, \vec{v} \rangle$, $v_2 = \langle \vec{e_2}, \vec{v} \rangle$, $v_3 = \langle \vec{e_3}, \vec{v} \rangle$.

$V = \underline{v_1} . \vec{e_1} + \underline{v_2} \vec{e_2} + \underline{v_3} \vec{e_3}$

$= \langle \vec{e_1}, \vec{v} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{e_2}, \vec{v} \rangle \vec{e_2} + \langle \vec{e_3}, \vec{v} \rangle \vec{e_3}$

Notación

$\langle u, v \rangle = u . v$

## Propiedades del producto interno.

① $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ $\forall$ $u, v \in \mathbb{R}^n$.

② $\langle a u, v \rangle = \langle u, a v \rangle = a \langle u, v \rangle$, $\forall$ $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. /

③ $\langle \underline{u + u'}, v \rangle = \underline{\langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle}$ $\forall$ $u, u', v \in \mathbb{R}^n$.

④ $\langle v, v \rangle \geq 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$, además $\langle v, v \rangle = 0$ sii $v = \vec{0}$.

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$
$\langle v, u \rangle = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$ lo mismo.

Dem 3:

$\langle u + u', v \rangle = (u_1 + u_1') . v_1 + (u_2 + u_2') v_2 + \dots + (u_n + u_n') v_n$

$\langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

$+ \; u_1' v_1 + u_2' v_2 + \dots + u_n' v_n$

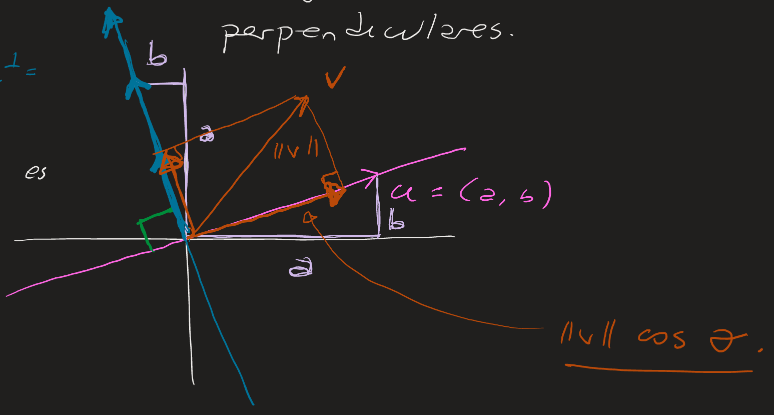
Distributiva.

Lo mismo.

④ $\langle v, v \rangle = v_1 v_1 + \dots + v_n v_n = \underline{v_1^2 + \dots + v_n^2} \geq 0$.

$= \|v\|^2 = \|v\| . \|v\| . \underbrace{\cos 0}_{1}$.

Importante: $\langle u, v\rangle = 0 \iff u \perp v$ (ortogonales) perpendiculares.



Cuenta en $\mathbb{R}^2$: Si $u = (a, b)$, $u^\perp =$

entonces su dirección ortogonal es

$u^\perp = (-b, a)$.

Si hacemos $\langle u, u^\perp \rangle$

$= a(-b) + b.a = 0$.

Si tomo $\lambda u^\perp = (\lambda(-b), \lambda a)$, entonces $\langle u, \lambda u^\perp \rangle$.

$= a(\lambda(-b)) + b(\lambda a) = 0$.

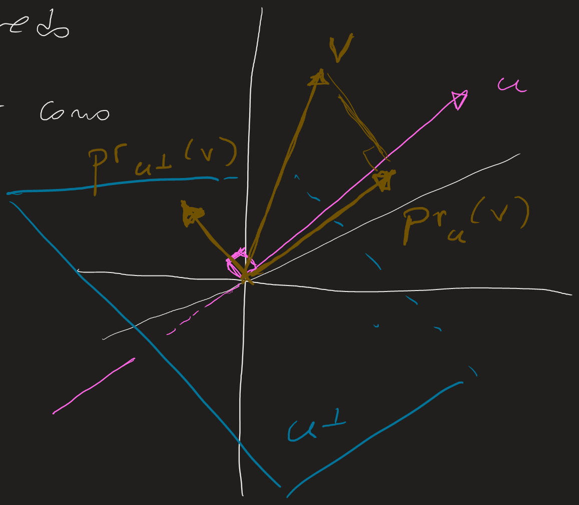
Dado cualquier v en $\mathbb{R}^2$, escribo $v = pr_u(v) + pr_{u^\perp}(v)$

$$\boxed{pr_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|}.\vec{u} = \frac{\|v\|.\cancel{\|u\|}.\cos\theta}{\cancel{\|u\|}}\vec{u}}$$

Dado $u \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces puedo escribir cualquier otro vector v como

$v = pr_u(v) + pr_{u^\perp}(v)$, donde

$$pr_u(v) = \underbrace{\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}}_{\text{número}} \underbrace{\vec{u}}_{\text{vector}}$$



$\to \boxed{pr_{u^\perp}(v) = v - pr_u(v)}$ (lo que sobra).

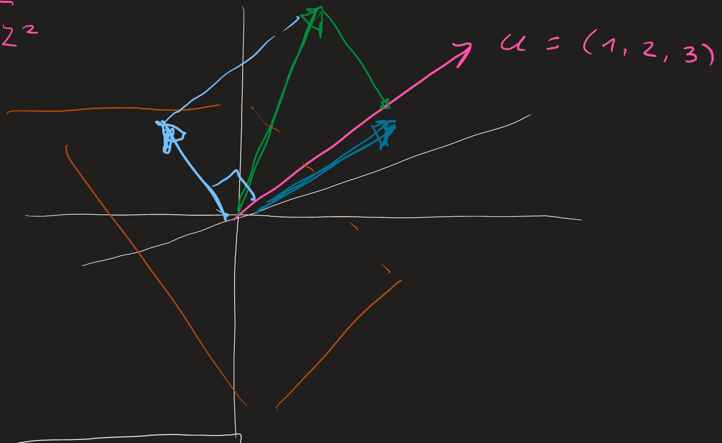
$\boxed{\begin{array}{l} u = (1, 2, 2) \\ v = (-2, 5, 0) \end{array}} \to \|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$$pr_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}\vec{u}$$

$\langle u, v\rangle = 1(-2) + 2.5 + 2.0$

$= -2 + 10 = 8$



$$\longrightarrow pr_u(v) = \frac{8}{3}u. = \boxed{\frac{8}{3}(1, 2, 2)} = (8/3, 16/3, 16/3)$$

$$pr_{u^\perp}(v) = v - pr_u(v) = (-2, 5, 0) - \frac{8}{3}(1, 2, 2)$$

$$= \left(-\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

ejercicio: chequear las cuentas. $pr_{u^\perp}(v) \perp u$.

$$\langle pr_u(v), u\rangle = \langle v, u\rangle$$

$$\langle pr_{u^\perp}(v), u\rangle = 0.$$

Cauchy-Schwarz: $-1 \le \boxed{\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}} \le 1$

(me permite definir el ángulo entre $u$ y $v$, como $\cos^{-1}\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)$)

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \cos\theta.$$

COINCIDE CON LA NOCIÓN GEOMÉTRICA.

Hacemos la prueba en $\mathbb{R}^2$:

Dem: Necesito $\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2} \le 1.$ ✓

Escribo quién es quién.

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \le (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$ ✓

$$\cancel{u_1^2v_1^2} + \cancel{u_2^2v_2^2} + 2u_1v_1u_2v_2 \overset{?}{\le} \cancel{u_1^2v_1^2} + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + \cancel{u_2^2v_2^2}$$ ✓

$$0 \le u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$ ✓