Resolución del examen del 9/12/23

① Alcanza observar que $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ tiene rango 2 y traza $A=0$

② **2.1** $|A|=\begin{vmatrix}2&2\\-1&b+a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a\\2&2\end{vmatrix}$

$=2(b+a)+2+2-2a=2b+4$

Entonces $|A|=0 \longleftrightarrow b=-2$.

Si $b=-2$ $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\1&-1&a-2\end{pmatrix}$

rango $A=2$ y la 3$^{ra}$ fila es la 1$^{ra}$ menos la segunda fila

**2.2** ${}_B(T)_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$

Sea $v$ / $\text{coord}_B\, v=(a,b,c)$

$v\in N(T) \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}a+b=0\\2b+2c=0\\a-b-2c=0\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}a=-b\\c=-b\end{array}$

$(-b,b,-b)$ Entonces $N(T)=[-1+1+x-1-x^2]$

$N(T)=[-x^2+x-1]=[x^2-x+1]$

**2.3** El plano $\pi$ está generado por los vectores $(1,0,1)$ y $(1,2,-1)$ que son las dos primeras filas de $A$

La recta $r$ está generada por el vector $(0,2,-2)$ que es la tercer fila de $A$

Para este caso, rango $A=2$, Entonces.

$r \parallel \pi$

Veamos si el punto $(1,2,3)\in\pi$

$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=0\\2\beta=1\\\alpha-\beta=2\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta=1/2\\\alpha=5/2\\1/2+5/2\neq 0\end{array}\right\}$ S.I

Entonces $r\cap\pi=\phi$

**3.1** $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&m\\1&2&-1&0\\0&2&-2&n\end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&m\\0&2&-2&-m\\0&2&-2&n\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&m\\0&2&-2&-m\\0&0&0&m+n\end{array}\right)\Rightarrow$ Si $m=-n$ el sistema es C.I.

4.1) $\det(A)=1$

**4.2** $\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\10&20&-1&0&0&0&1&0\\5&-8&0&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&20&-1&0&-10&0&1&0\\0&-8&0&-1&-5&0&0&1\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&-10&-20&1&0\\0&0&0&-1&-5&8&0&1\end{array}\right)$

$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\10&20&1&0\\5&-8&0&-1\end{pmatrix}=A$

Entonces: $A+A^{-1}=2A$

**5.1** $S_1$: $ax^3+bx^2+cx+d$.

$3ax^2+2bx+c$

$a+b+c+d=3a+2b+c$

$\Rightarrow d=2a+b$

$ax^3+bx^2+cx+2a+b$

$=a(x^3+2)+b(x^2+1)+cx$

Además, como el conjunto $A=(x^3+2,x^2+1,x)$ es l.i entonces $A$ es base de $S_1$

**5.2** $S_2$: $ax^3+bx^2+cx+d$

$-a+b-c+d=0\rightarrow d=a-b+c$

$ax^3+bx^2+cx+a-b+c=$

$=a(x^3+1)+b(x^2-1)+c(x+1)$

Notar que $\underbrace{x+1}_{\in S_2}\underbrace{-x}_{\in S_1}=1$

Entonces $1\in S_1+S_2$

Luego $\{x^3+2,\ x^2+1,\ x,\ 1\}\xrightarrow{b} S_1+S_2$

Como dim $\mathbb{R}_3[x]=4$ entonces $S_1+S_2=\mathbb{R}_3[x]$

**5.3** Notar que $\{x^3+1, x^2-1, x+1\}$ es una base de $S_2$.

Entonces existe una única (T.l) $T$ tal que: $T(x^3+1)=x+1$

$T(x^2-1)=x-4$

$T(x+1)=x^2+x$

Como $x^3+2x+3=(x^3+1)+2(x+1)$, tendría que cumplirse que:

$T(x^3+2x+3)=x+1+2(x^2+x)=2x^2+3x+1$

Entonces la opción correcta es que existe una única T.l con la condición que $T(x^3+2x+3)=2x^2+3x+1$