Segundo Parcial - Geometría y Álgebra Lineal 1

Sábado 18 de noviembre de 2023

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La duración del parcial es de tres horas y media.
Cada respuesta correcta suma 6 puntos.
Cada respuesta incorrecta resta 1 punto.

Versión 1

(1) Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa

(A) Si $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ son conjuntos linealmente independientes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cup B$ es linealmente independiente.
(B) Sea $T\colon V \to U$ una transformación lineal. Si $N(T) = 0_V$, entonces T es inyectiva.
(C) Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ genera V, entonces A es una base de V.
(D) Sean $T\colon V \to V$ una transformación lineal y A una base de V. Si ${}_A(T)_A$ es invertible, entonces T es invertible.
(E) Si un conjunto A es generador de V, entonces existe $A' \subseteq A$ tal que A' es base de V.

(2) Sea el conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indicar la opción verdadera:

(A) A es linealmente independiente para todo valor de a y b.
(B) A es linealmente dependiente para todo valor de a y b.
(C) Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, A es linealmente independiente.
(D) Si $a = 2$ y $b \neq -1$, A es linealmente independiente.
(E) Si $a = b = 0$, A es linealmente independiente.

(3) Sea la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Las coordenadas de $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en la base B son:

(A) $(1, 1, 1, 0)$. **(B)** $(1, -1, 0, 2)$. **(C)** $(1, -1, 1, 0)$. **(D)** $(0, 0, 1, 2)$. **(E)** $(-2, 0, -2, -1)$.

(4) Sea la recta $r\colon \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$

La distancia entre el punto $a = (1, 0, 3)$ a la recta r es:

(A) 1. **(B)** $\sqrt{\frac{2}{11}}$. **(C)** $\sqrt{\frac{4}{5}}$. **(D)** $\sqrt{\frac{2}{5}}$. **(E)** $\sqrt{\frac{4}{11}}$.

(5) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ y los subespacios $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(x) = p(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{ax^3 + (a+b)x + b \colon a, b \in \mathbb{R}\}$. Indicar la opción correcta:

(A) La suma de S_1 y S_2 es directa y $x^2 \notin S_1 + S_2$
(B) La suma de S_1 y S_2 es directa y $x^3 \notin S_1 + S_2$
(C) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$
(D) La suma de S_1 y S_2 es directa y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}_3[x]$
(E) La suma de S_1 y S_2 no es directa y $x \notin S_1 + S_2$.

(6) Considere la transformación lineal identidad $Id \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y las bases $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Entonces la matriz ${}_B(Id)_A$ es:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **(C)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(E)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) Sea $T \colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A + A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Indicar la opción correcta

(A) $\dim N(T) = 0$ y $\dim Im(T) = 2$.
(B) $\dim N(T) = 1$ y $\dim Im(T) = 3$.
(C) $\dim N(T) = 1$ y $\dim Im(T) = 1$.
(D) $\dim N(T) = 2$ y $\dim Im(T) = 2$.
(E) $\dim N(T) = 0$ y $\dim Im(T) = 4$.

(8) Se consideran $\mathbb{R}^3$ y el subespacio $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \colon a + b = 0,\ b + c = 0\}$. Sea $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(T) = S$, $T(0,1,1) = (1,2,3)$ y $T(0,0,1) = (0,0,2)$. Entonces $T(1,0,1)$ es igual a

(A) $(1,-1,1)$. **(B)** $(1,1,-1)$. **(C)** $(1,2,-1)$. **(D)** $(1,2,1)$. **(E)** $(2,-1,-1)$.

(9) Indique cuál de los siguientes subconjuntos $S \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es un subespacio.

(A) $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon det(A) = 0\}$.
(B) $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon det(A) = 1\}$.
(C) $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon tr(A) = 0\}$.
(D) $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon tr(A) = 1\}$.
(E) $S = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \colon det(A) = tr(A)\}$.

(10) Sea $T \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(0), p(1))$. Una base del núcleo de T es

(A) $\{x^2 - x, 1\}$.
(B) $\{x^2, x\}$.
(C) $\{x^2 - x\}$.
(D) $\{x^2 - x + 1\}$.
(E) $\{x^2, x, 1\}$.