Parcial

① La opción falsa es:

Si $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ son conjuntos l.i y $A\cap B=\emptyset$ entonces $A\cup B$ es l.i

Para ver esto alcanza tomar los siguientes conjuntos: $A=\{(1,0),(0,1)\}$ y $B=\{(2,0),(0,2)\}$

En este caso $A\cap B=\emptyset$ y $A\cup B$ no es l.i

② $A=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ b & 2\end{pmatrix}\right\}$

Estudiamos: $\alpha\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ b & 2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, obteniendo:

$$\begin{cases} a\alpha + 0\beta + \gamma + 2\delta = 0 \\ 0\alpha - \beta - 2\gamma - \delta = 0 \\ 0\alpha + \beta + 2\gamma + b\delta = 0 \\ -a\alpha + 0\beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases}$$

Calculemos $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & b \\ -a & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix}$

$$= a\left(-1\begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + a\left(-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & b \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= a\left(-(4-b) - 1(-4+1) - (-b+1)\right) = a(2b-2)$$

Entonces el sistema es C.D si y sólo si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, luego la opción Si $a \neq 0$ y $b \neq 1$, A es l.i es la opción correcta

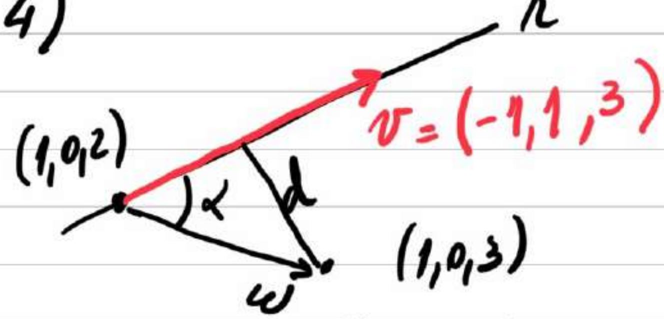
3) Para este ejercicio lo más facil es probar c/opción hasta ver cual es la verdadera

Como:

$$1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la opción correcta es: $(1, -1, 1, 0)$

4)



Lo más facil es calcular $\|v \wedge w\|$,

ya que $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \underbrace{\|w\| \operatorname{sen} \alpha}_{d}$.

d es la distancia buscada. $(w = (1,0,3) - (1,0,2))$

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 0) \Rightarrow \|v \wedge w\| = \sqrt{2}$$

$\|v\| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$. Entonces $d = \sqrt{\frac{2}{11}}$

5) S_1: $ax^3 + bx^2 + cx + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d \cdot \forall x$

Entonces $a = c = 0$, luego $S_1 = \{bx^2 + d : b, d \in \mathbb{R}\}$,

$S_1 = [\{x^2, 1\}]$

S_2: $ax^3 + (a+b)x + b = a(x^3 + x) + b(x+1)$

$S_2 = [\{x^3 + x, x+1\}]$

Notar que $\{x^2, 1, x^3 + x, x+1\}$ es un conjunto l.i

Entonces $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}_3[x]$

6) $Id(1,0,0) = (1,0,0)$; $\underset{B}{coord}(1,0,0) = (0,0,1)$

$Id(0,1,0) = (0,1,0)$; $\underset{B}{coord}(0,1,0) = (0,1,-1)$

$Id(0,0,1) = (0,0,1)$; $\underset{B}{coord}(0,0,1) = (1,0,0)$

Entonces $(Id)_{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} a = d = 0 \\ c+b = 0 \end{array}$

$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces $\dim N(T) = 1$, luego $\dim Im(T) = 3$

8) $S:\quad \begin{array}{l} a+b=0 \longrightarrow a=-b \\ b+c=0 \longrightarrow c=-b \end{array}$

$S=\{(-b,b,-b): b\in\mathbb{R}\}$; $S=[\{(1,-1,1)\}]$

$(1,0,1)=\alpha(0,1,1)+\beta(0,0,1)+\gamma(1,-1,1)$

Entonces $\gamma=1$, $\alpha=1$, $\beta=-1$, luego:

$T(1,0,1)=1T(0,1,1)-1T(0,0,1)+1T(1,-1,1)=$

$=(1,2,3)-(0,0,2)+1(0,0,0)=(1,2,1)$

9) La verdadera es: $S=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})/tr(A)=0\}$

10) $T(ax^2+bx+c)=(c,\ a+b+c)$

$N(T):\quad \left.\begin{array}{l} c=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} c=0 \\ a=-b \end{array}$

$N(T):\ -bx^2+bx = b(-x^2+x)$

Entonces una base del núcleo es $\{x^2-x\}$