Primer parcial (16/9/2023)

Ejercicio 1 $\quad a, b, c$ pesos de los cajas.

Entonces $\begin{cases} a+b+c = 18 \\ a+b = c \\ c = 3(b-a) \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+c=18 \\ 2c = 18 \\ -6b-2c=-54 \end{cases}$

entonces $\boxed{c=9}$, $6b+18=54 \rightarrow \boxed{b=6}$

$a+9+6=18 \longrightarrow \boxed{a=3}$

Ejercicio 2

2.1 $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + 2(a-1)y + 2z = 4 \\ (a-2)y + az = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ (a-2)y + z = 3 \\ (a-2)y + az = 5 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ (a-2)y + z = 3 \\ (a-1)z = 2 \end{cases}$

Entonces si $a \neq 2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado

Si $a = 2$ se obtiene $z = 3$, $z = 2$, luego el sistema es incompatible

Si $a = 1$ se obtiene $0 \cdot z = 2$, luego el sistema es incompatible.

2.2 Si $\underline{a = 3}$

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $z = 1$, $y = 2$, $x = -6$ $\Rightarrow$ $S = \{(-6, 2, 1)\}$

Ejercicio 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.1

escalerizo la matriz A

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, entonces rango $A = 3$

3.2

Como rango $A = 3 \longrightarrow |A| = 0$ (para que el determinante fuera distinto de 0 el rango A debería ser 4)

3.3

$$A+A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplico el método para obtener $(A+A^t)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_4 \leftarrow F_4 - F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_4 \leftarrow F_4 - \frac{3}{2} F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13/2 & 0 & -1 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora debo multiplicar la fila 4 por $-2/13$

Entonces la respuesta es: $(0, 2/13, 3/13, -2/13)$

Ejercicio 4

4.1 $r_1 \begin{cases} x+y=3 \\ z=2 \end{cases}$ $\qquad r_2 \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = 1-z$

$$r_2 \begin{cases} x = 2+1-z \\ y = 3+1-z \end{cases}$$

$$r_1 \cap r_2 \rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=2 \\ x+z=3 \\ y+z=4 \end{cases}$$

$\rightarrow z=2 \rightarrow x+2=3 \rightarrow x=1, \; y+2=4 \rightarrow y=2$

verifico en la 1ª ecuación $1+2=3$ ✓

Entonces $\boxed{r_1 \cap r_2 = \{(1,2,2)\}}$.

$r_1) \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \longrightarrow$ dirección de $r_1 = (-1,1,0)$

dirección de $r_2 = (1,1,-1)$

$\langle(-1,1,0),(1,1,-1)\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 \perp r_2}$

4.2 El plano debe tener normal perpendicular a la dirección de r_2, $(1,1,-1)$

Entonces se descartan las opciones B, C y E.

Si un vector normal a π fuera el $(5,-4,1)$ entonces $\pi)\ 5x-4y+z=d$.

Como $(1,2,3)\in\pi \rightarrow 5-8+3=0=d$.

Entonces $\pi)\ 5x-4y+z=0$

Ahora si $r_2\subset\pi \longrightarrow (2,3,1)\in\pi$, pero

$10-12+1\neq 0 \Rightarrow (2,3,1)\notin\pi$.

Por lo tanto, la opción correcta es A.