Señales y Sistemas

Práctico 10
Diseño de Filtros en Tiempo Discreto

2020

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

Referencia bibliográfica: Papoulis, a partir de la página 173.

★ Ejercicio 1

Se desea diseñar un derivador de banda limitada que responda a la siguiente transferencia:

$$H_a(j\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$$

(a) Hallar la respuesta al impulso de este filtro.

(b) Se desea implementar este derivador en forma de un filtro en tiempo discreto transversal con frecuencia de muestreo $f_s > 2\frac{\omega_0}{2\pi}$. Se dispone de $2N$ celdas de retardo. Se utilizará el método habitual de truncar la respuesta al impulso del filtro deseado, de forma de minimizar el error cuadrático medio. Hallar la transferencia $H(e^{j\theta})$ del filtro que se desea diseñar en función de la respuesta del filtro $H_a(j\omega)$.

(c) Diseñar este filtro utilizando una ventana triangular. Este filtro se diseñará con $2N$ retardos. Hallar la transferencia $H(e^{j\theta})$ de este filtro en función de $H_a(j\omega)$.

(d) Comparar las transferencias de los filtros de las partes dos partes anteriores.

★ Ejercicio 2

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada $[-W_x, W_x]$ y módulo acotado por 1. Sea un filtro lineal de respuesta impulsiva $h(t)$, y sea $y(t)$ la respuesta a la entrada $x(t)$ de ese filtro.

(a) Hallar el ancho de banda de $y(t)$.

(b) Se consideran las señales muestreadas $x_1[n] = x(nT)$ e $y_1[n] = y(nT)$. Determinar el intervalo entre muestras T máximo para que las señales x e y se puedan recuperar a partir de sus muestras.

(c) Se supone $T < T_{max}$. Mostrar que $y_1[n]$ es la respuesta a $x_1[n]$ de un filtro cuya respuesta impulsiva $h_1[n]$ se hallará.

(d) Hallar la respuesta frecuencial $H_1(e^{j\theta})$ y bosquejarla, comparándola con $H(j\omega)$.

(e) En particular, sea $y(t) = x'(t)$, o sea que el filtro es un derivador. Hallar $h(t)$.

(f) Hallar $h_1[n]$. Expresar la derivada de $x(t)$ en función de los valores $x(nT)$.

⋆ Ejercicio 3

Determinar si los siguientes filtros distorsionan la fase.

(a) $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 6x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-4]$

(b) $y[n] = x[n] + 0.5y[n-1]$

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 3

(a) La respuesta en frecuencia del filtro está dada por

$$H(e^{j\theta}) = 1 + 2e^{-j\theta} + 6e^{-j2\theta} + 2e^{-j3\theta} + e^{-j4\theta}$$

sacando $e^{-j2\theta}$ de factor común en la expresión anterior tenemos

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j2\theta}(6 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta)$$

es fácil ver que $6 + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta > 0$ para todo θ, por lo tanto el filtro es de fase lineal y no distorsiona la fase.
El retardo de grupo en este caso es de 2 muestras.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\theta}}$$

Es fácil probar que derivada de su fase no es constante por lo que el filtro distorsiona la fase.