1 Ejercicios de desarrollo 3

Regla de la cadena y coordenadas polares

Consideremos la función $z = f(x, y)$ diferenciable con respecto a las variables x e y que se compone de la funciónes $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, también diferenciables con respecto a las variables u y v. Ya sabemos por la regla de la cadena que las derivadas respecto de u y v de la función compuesta se pueden calcular y obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Aplicación: Uno de los cambios de variable más usando en el cálculo es el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Consideremos el caso de una función diferenciable $z = f(x, y)$ y las funciones usuales del cambio de varaible dadas por

$$x = x(r, \phi) = rcos\phi$$

$$y = y(r, \phi) = rsen\phi$$

1. Determine las expresiones de $\frac{\partial f}{\partial r}$ y $\frac{\partial f}{\partial \phi}$.

2. Una de las ecuaciones más importantes en la ingeniería es la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función de dos variables que satisface la ecuación de Laplace. Demostrar que $z = f(x - 2y, 2x + y)$ también la satisface.

3. Dada una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (suficientemente diferenciable), se le asocia a ella su laplaciano, denotado por $\nabla^2 f$ y definido por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(Obsérvese que la Ecuación de Laplace del ejemplo anterior es $\nabla^2 f = 0$)

¿Cúal es la expresión del laplaciano en coordenadas polares?

Razones de cambio

4. Dos aeronaves, que salieron al mismo tiempo desde un mismo punto, van, una, hacia el norte y, la otra, hacia el noreste. Sus velocidad son $10\frac{Km}{h}$ y $15\frac{Km}{h}$, respectivamente. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellas?