

# Confiabilidad estructural de componentes mecánicos con daño

R. Mussini & H. Cancela

2020

# Referencias

Principal:

[1] Transparencias del Prof. R. Mussini.

Complementarias:

[2] M. Lemaire, *Structural Reliability*, ISTE Ltd. and John Wiley and Sons Inc., 2009.

[3] Robert E. Melchers and Andre T. Beck, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2018.

[4] Hasofer, A. M, and Lind, N. C., "Exact and Invariant Second-Moment Code Format," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE 100, EM1, 1974, pp. 111-121.

# Resumen

- Limitaciones del índice de Cornell
- Índice de Hasofer-Lind
- Ejemplo de cálculo del índice de Hasofer-Lind
- Comentarios

# Definiciones

# Términos

$\phi(x)$  - distribución normal estándar

$\Phi(x)$  - distribución normal estándar acumulada

# Teoría de Confiabilidad Estructural

Métodos de momentos de segundo orden  
(continuación)

# Limitaciones del índice de Cornell

El índice  $\beta_C$  sólo es correcto en el caso en que,

- 1) las variables  $R$  y  $S$  sean gaussianas
- 2) la función de margen de seguridad,  $Z$  es lineal en el espacio físico ( $Z = R - S$ )

Por ejemplo, si  $Z = R/(S - 1)$ , el cálculo de su media,  $m_Z$  y su desviación estándar,  $\sigma_Z$  no es posible analíticamente y  $Z$  ya no es una distribución normal.

# Indice de Hasofer-Lind

Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974



# Indice de Hasofer-Lind

- Hasofer y Lind propusieron una definición del índice de confiabilidad,  $\beta_{HL}$  la cual es independiente de la formulación matemática de la función de estado límite.
- En el caso del índice de confiabilidad  $\beta_{HL}$  se considera que cada variable de entrada integra el llamado “**espacio aleatorio físico**” (**espacio  $X$** ) . Dicho espacio luego es transformado en un nuevo “**espacio aleatorio gaussiano estándar**” (**espacio  $U$** ) integrado por variables gaussianas estándar, las cuales son estadísticamente independientes entre sí.

$$X_i \rightarrow U_i ; m_{U_i} = 0, \sigma_{U_i} = 1$$

$$X_j \rightarrow U_j ; m_{U_j} = 0, \sigma_{U_j} = 1$$

$$\rho_{U_i U_j} = 0$$

- Nota: este desarrollo difiere en el algo con el realizado por el autor Lemaire [2].

# Transformación de espacios en el caso de variables de entrada gaussianas independientes y función de estado límite lineal

En este caso, la transformación es inmediata,

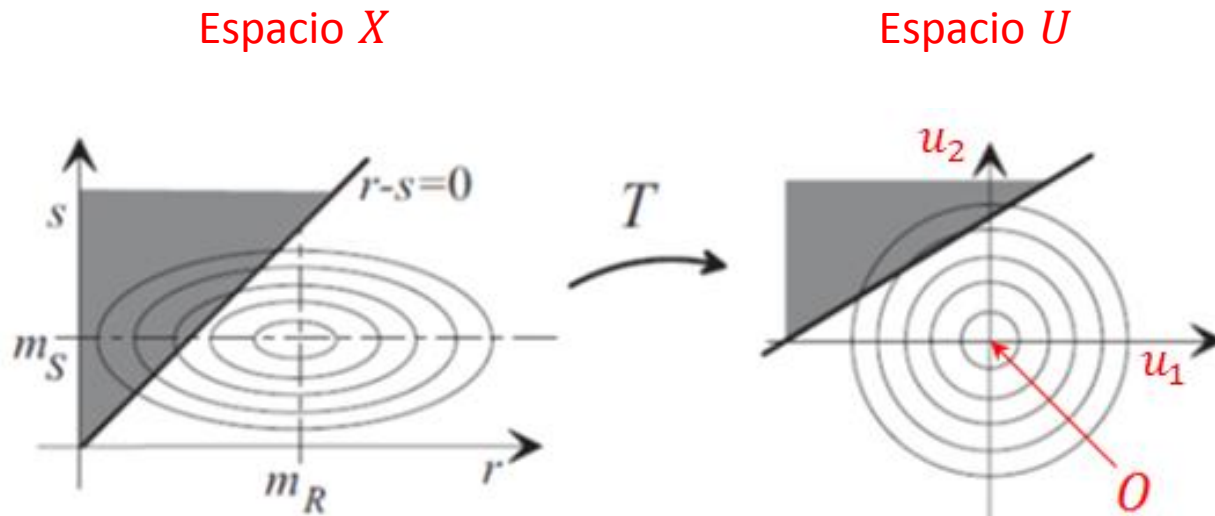
$$u_1 = \frac{x_1 - m_{x_1}}{\sigma_{x_1}}; \quad u_2 = \frac{x_2 - m_{x_2}}{\sigma_{x_2}}$$

Se mantiene la linealidad de la función de estado límite en el espacio  $U$  luego de realizar la transformación.

## Aplicación al caso $R - S$

Aplicando el concepto anterior al caso  $R - S$ , siendo  $x_1 = r$  y  $x_2 = s$ , entonces se tiene

$$u_1 = \frac{r - m_R}{\sigma_R}; \quad u_2 = \frac{s - m_S}{\sigma_S}$$



## Comentarios para el caso $R - S$

Nótese que luego de hacer la transformación del espacio  $X$  al espacio  $U$ :

- la función de estado límite se conserva lineal
- las curvas de nivel están centradas en el origen de coordenadas  $O$
- las curvas de nivel son circunferencias

# Transformación de espacios en el caso de variables de entrada de cualquier tipo, independientes entre sí

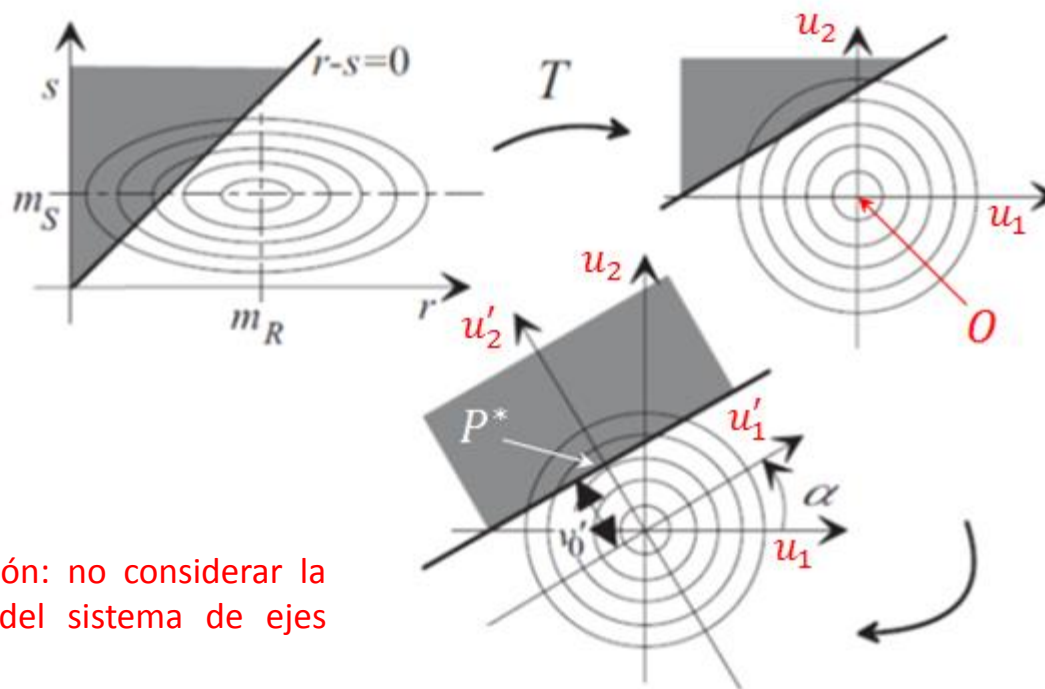
$$u = \Phi^{-1}(F_X(x))$$

La transformación resultante es denominada transformación isoprobabilística; ella es designada como "*T*".

Para el caso en que las variables de entrada son dependientes, Rosenblatt ha sugerido una forma general de transformación.

# Representación

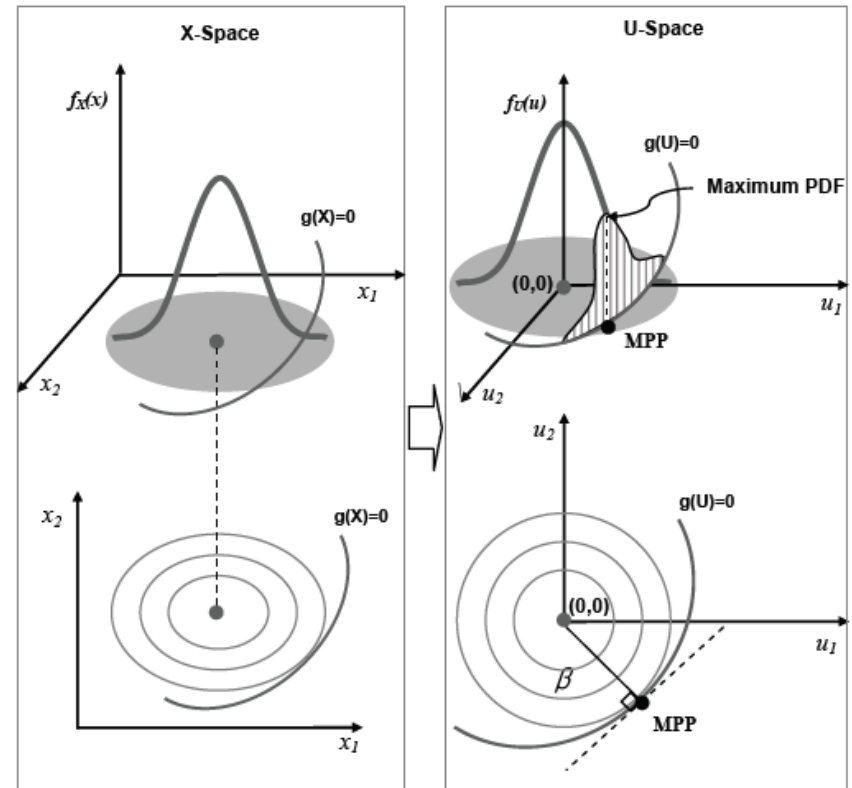
En el espacio  $U$  el índice de confiabilidad,  $\beta_{HL} = v'_0$  es representado por la distancia entre el origen,  $O$  y el punto  $P^*$  más próximo a la función (superficie) de estado límite. La zona gris oscura representa el dominio de falla.



Observación: no considerar la rotación del sistema de ejes  $u_1 - u_2$ .

# Punto mas probable de falla

- El punto  $P^*$  es el denominado “punto mas probable de falla”. Algunas veces designado con el acrónimo “MPP”.
- En la figura se muestra el punto MPP en el el espacio  $U$  para el caso donde la función (superficie) de estado límite es no lineal, tanto en el espacio  $X$  como en el  $U$ .
- Por convención, el índice de confiabilidad,  $\beta$  es considerado positivo si el origen,  $O$  pertenece al dominio de seguridad; de lo contrario,  $\beta$  es considerado negativo.



# Ejemplo de índice de Hasofer-Lind aplicado al caso de una barra de acero traccionada

Datos:

$$m_P = 70 \text{ MN}$$

$$\sigma_P = 15 \text{ MN}$$

$$m_{f_y} = 272,72 \text{ MPa}$$

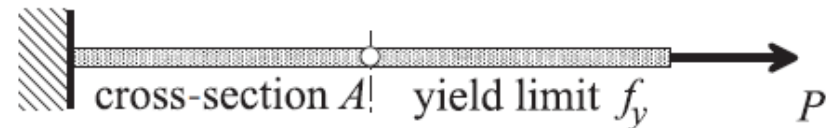
$$\sigma_{f_y} = 16,36 \text{ MPa}$$

$$A = 4,2 \exp^7 \text{ mm}^2$$

Se asume que el valor de tensión de fluencia nominal del acero,  $Nom_{f_y}$  es

$$Nom_{f_y} = m_{f_y} - 2\sigma_{f_y}$$

$$Nom_{f_y} = 240 \text{ MPa}$$





# Solución

Variables gaussianas  $R$  y  $S$  no correlacionadas entre sí en el espacio  $X$ .

$R = P_y$  (carga de fluencia de la barra)

$S = P$  (carga aplicada a la barra)

Transformación de variables al espacio  $U$ :

$$u_1 = \frac{r - m_R}{\sigma_R}; u_2 = \frac{s - m_S}{\sigma_S}$$

Función de estado límite en el espacio  $U$ :

$$\sigma_R u_1 - \sigma_S u_2 + m_R - m_S = 0; \text{ (lineal)}$$

$$\sigma_{P_y} = A\sigma_{f_y} = 6,87 \text{ MN}$$

$$\sigma_{P_y} u_1 - \sigma_P u_2 + m_{P_y} - m_P = 0$$

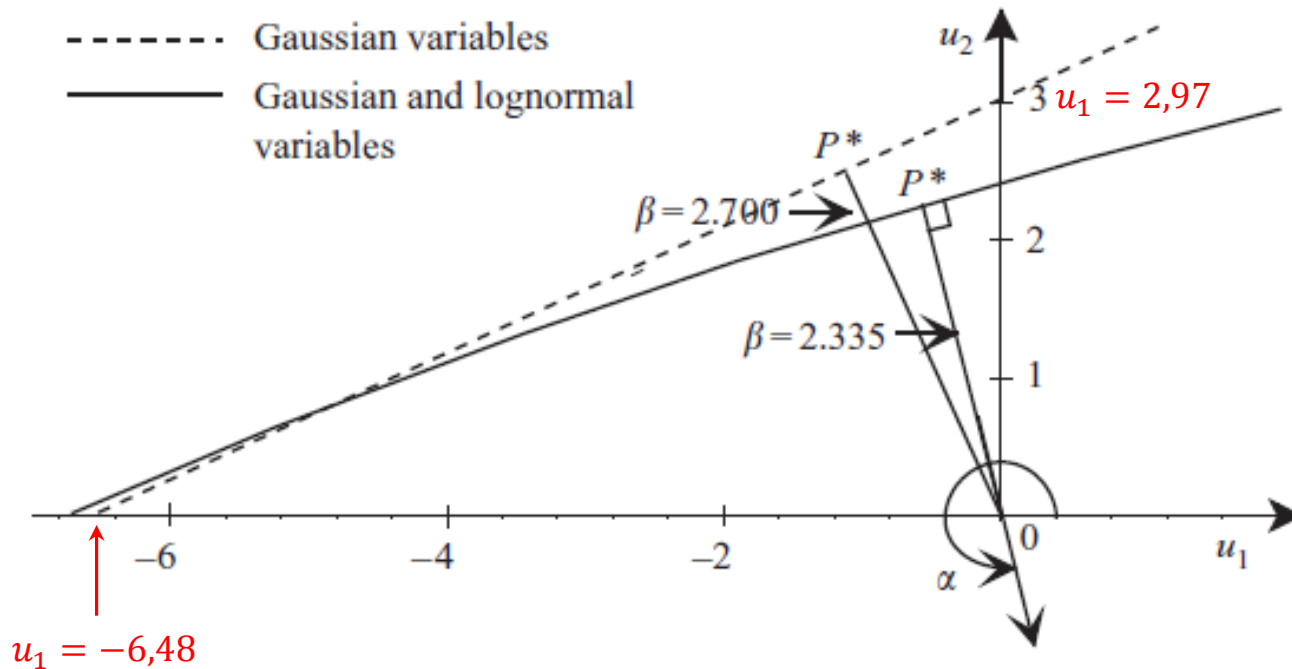
$$6,87u_1 - 15u_2 + 44,54 = 0$$

$$\beta_{HL} = \frac{m_{P_y} - m_P}{\sqrt{\sigma_{P_y}^2 + \sigma_P^2}}$$

$$\beta_{HL} = \frac{44,54}{\sqrt{47,21 + 225,1}} = 2,70$$

$$p_f = \Phi(-\beta_{HL}) = 0,00347$$

# Representación gráfica de $\beta_{HL} = \beta$ en el espacio $U$



El caso de la combinación de variables aleatorias de entrada gaussiana y lognormal en el espacio  $X$  no será desarrollado aquí.

# Comentarios

- El desarrollo histórico de los diferentes métodos de confiabilidad estructural muestra que los mismos han ido evolucionado en la dirección de considerar cada vez un mayor número de situaciones (cantidad de variables de entrada y tipos de *pdf*, orden de la función de estado límite, ...) utilizando un único método.
- Como podrá percibirse del desarrollo anterior de dos de los métodos pioneros tales como el índice de Cornell y de Hasofer-Lind, los mismos son relativamente restrictos en cuanto a sus factibilidades de aplicación en ingeniería. No obstante, en la actualidad algunos de éstos métodos pioneros siguen siendo parte de códigos, normas o procedimientos de diseño y fabricación; y también de evaluación de integridad de estructuras en servicio conteniendo daño. Esto último será tratado en la Parte III.

## Anexo A

### Independencia y correlación

# Independencia y correlación lineal

Dos variables aleatorias  $X_i$  y  $X_j$  están “no correlacionadas” cuando su coeficiente de correlación,  $\rho_{X_i X_j} = 0$ .

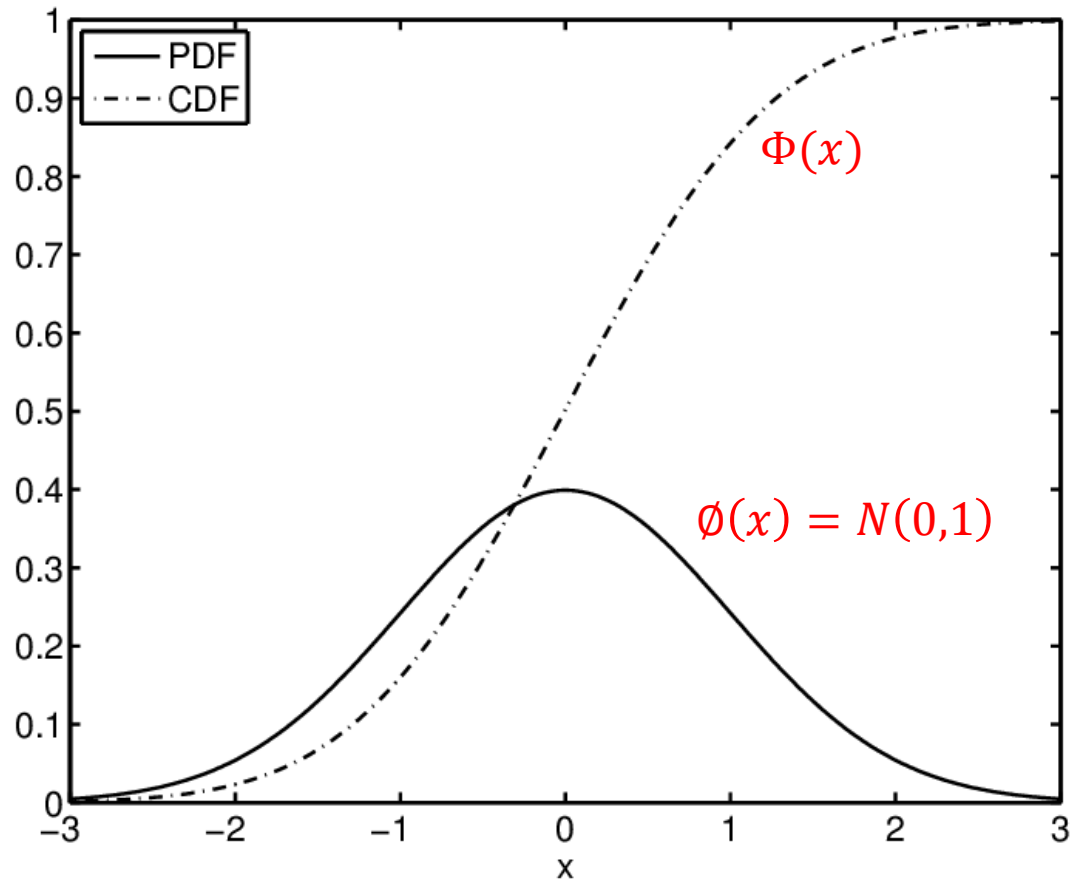
$$\rho_{X_i X_j} = \frac{\text{cov}[X_i X_j]}{\sqrt{\text{var}[X_i] \text{var}[X_j]}}$$

La condición de “independencia” requiere, además de la “no correlación” ( $\rho_{X_i X_j} = 0$ ), la siguiente condición:

$$f_{X_i X_j}(x_i, x_j) = f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j)$$

La “independencia” implica “no correlación”. Sin embargo en general, la “no correlación” necesariamente implica “independencia”. Sólo en el caso específico de que  $X_i$  y  $X_j$  sean gaussianas, la no correlación ( $\rho_{X_i X_j} = 0$ ), directamente implica la independencia entre ambas.

Distribución normal estándar,  $\phi(x) = N(0,1)$   
y distribución normal estándar acumulada,  $\Phi(x)$



## Anexo B

Tabla de valores de distribución normal  
estándar acumulada

## Normal Cumulative Distribution Function

$$P(X \leq -2.7) = 0.00347$$

—  $\mu = 0, \sigma = 1$

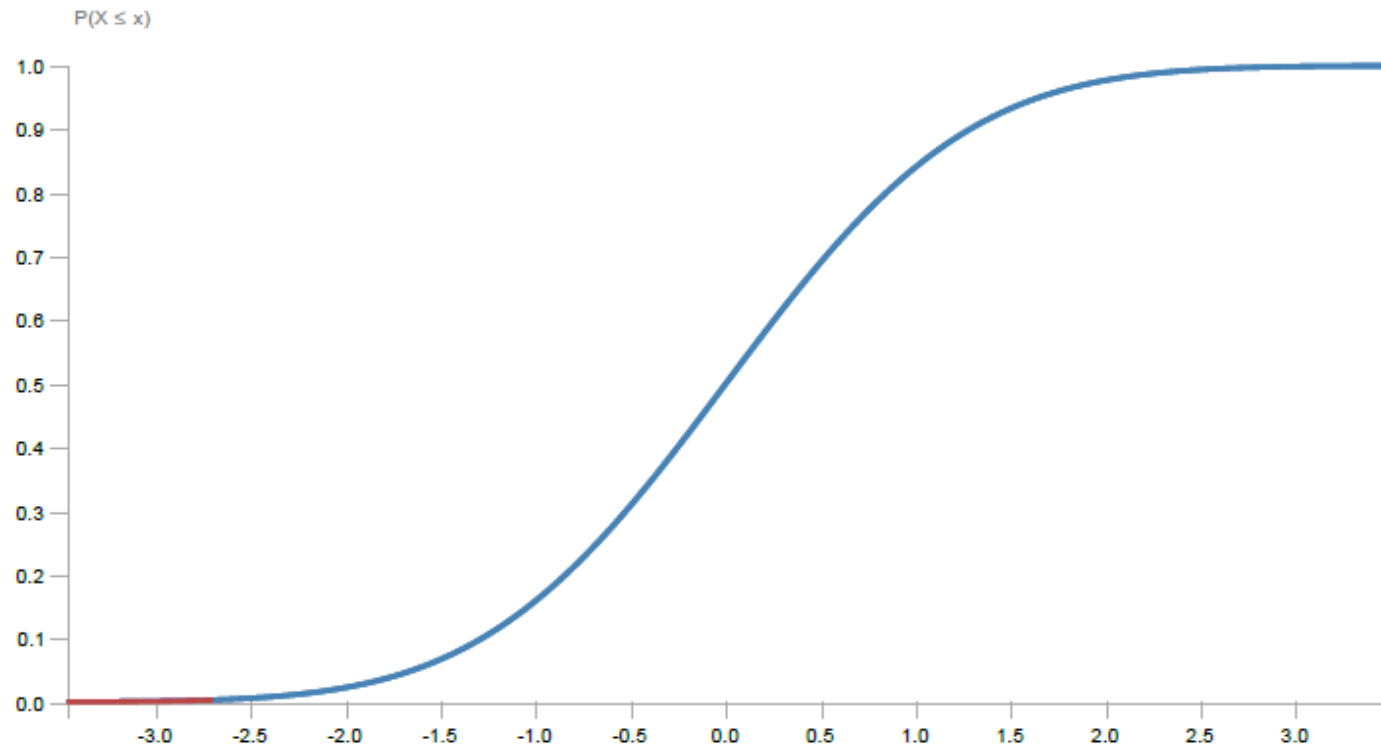




Table D.1 (Continued)

$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$	$\beta$	$\Phi(-\beta)$
1.2	$1.1507 \times 10^{-1}$	1.8	$3.59303 \times 10^{-2}$	2.4	$8.19754 \times 10^{-3}$
1.21	$1.13139 \times 10^{-1}$	1.81	$3.51479 \times 10^{-2}$	2.41	$7.97626 \times 10^{-3}$
1.22	$1.11232 \times 10^{-1}$	1.82	$3.43795 \times 10^{-2}$	2.42	$7.76025 \times 10^{-3}$
1.23	$1.09349 \times 10^{-1}$	1.83	$3.3625 \times 10^{-2}$	2.43	$7.54941 \times 10^{-3}$
1.24	$1.07488 \times 10^{-1}$	1.84	$3.28841 \times 10^{-2}$	2.44	$7.34363 \times 10^{-3}$
1.25	$1.0565 \times 10^{-1}$	1.85	$3.21568 \times 10^{-2}$	2.45	$7.14281 \times 10^{-3}$
1.26	$1.03835 \times 10^{-1}$	1.86	$3.14428 \times 10^{-2}$	2.46	$6.94685 \times 10^{-3}$
1.27	$1.02042 \times 10^{-1}$	1.87	$3.07419 \times 10^{-2}$	2.47	$6.75565 \times 10^{-3}$
1.28	$1.00273 \times 10^{-1}$	1.88	$3.0054 \times 10^{-2}$	2.48	$6.56912 \times 10^{-3}$
1.29	$9.85253 \times 10^{-2}$	1.89	$2.9379 \times 10^{-2}$	2.49	$6.38715 \times 10^{-3}$
1.3	$9.68005 \times 10^{-2}$	1.9	$2.87166 \times 10^{-2}$	2.5	$6.20967 \times 10^{-3}$
1.31	$9.50979 \times 10^{-2}$	1.91	$2.80666 \times 10^{-2}$	2.51	$6.03656 \times 10^{-3}$
1.32	$9.34175 \times 10^{-2}$	1.92	$2.74289 \times 10^{-2}$	2.52	$5.86774 \times 10^{-3}$
1.33	$9.17591 \times 10^{-2}$	1.93	$2.68034 \times 10^{-2}$	2.53	$5.70313 \times 10^{-3}$
1.34	$9.01227 \times 10^{-2}$	1.94	$2.61898 \times 10^{-2}$	2.54	$5.54262 \times 10^{-3}$
1.35	$8.8508 \times 10^{-2}$	1.95	$2.55881 \times 10^{-2}$	2.55	$5.38615 \times 10^{-3}$
1.36	$8.6915 \times 10^{-2}$	1.96	$2.49979 \times 10^{-2}$	2.56	$5.23361 \times 10^{-3}$
1.37	$8.53435 \times 10^{-2}$	1.97	$2.44192 \times 10^{-2}$	2.57	$5.08493 \times 10^{-3}$
1.38	$8.37933 \times 10^{-2}$	1.98	$2.38518 \times 10^{-2}$	2.58	$4.94002 \times 10^{-3}$
1.39	$8.22644 \times 10^{-2}$	1.99	$2.32955 \times 10^{-2}$	2.59	$4.7988 \times 10^{-3}$
1.4	$8.07567 \times 10^{-2}$	2.	$2.27501 \times 10^{-2}$	2.6	$4.66119 \times 10^{-3}$
1.41	$7.92698 \times 10^{-2}$	2.01	$2.22156 \times 10^{-2}$	2.61	$4.52711 \times 10^{-3}$
1.42	$7.78038 \times 10^{-2}$	2.02	$2.16917 \times 10^{-2}$	2.62	$4.39649 \times 10^{-3}$
1.43	$7.63585 \times 10^{-2}$	2.03	$2.11783 \times 10^{-2}$	2.63	$4.26924 \times 10^{-3}$
1.44	$7.49337 \times 10^{-2}$	2.04	$2.06752 \times 10^{-2}$	2.64	$4.1453 \times 10^{-3}$
1.45	$7.35293 \times 10^{-2}$	2.05	$2.01822 \times 10^{-2}$	2.65	$4.02459 \times 10^{-3}$
1.46	$7.2145 \times 10^{-2}$	2.06	$1.96993 \times 10^{-2}$	2.66	$3.90703 \times 10^{-3}$
1.47	$7.07809 \times 10^{-2}$	2.07	$1.92262 \times 10^{-2}$	2.67	$3.79256 \times 10^{-3}$
1.48	$6.94366 \times 10^{-2}$	2.08	$1.87628 \times 10^{-2}$	2.68	$3.68111 \times 10^{-3}$
1.49	$6.81121 \times 10^{-2}$	2.09	$1.83089 \times 10^{-2}$	2.69	$3.5726 \times 10^{-3}$
1.5	$6.68072 \times 10^{-2}$	2.1	$1.78644 \times 10^{-2}$	2.7	$3.46697 \times 10^{-3}$
1.51	$6.55217 \times 10^{-2}$	2.11	$1.74292 \times 10^{-2}$	2.71	$3.36416 \times 10^{-3}$
1.52	$6.42555 \times 10^{-2}$	2.12	$1.7003 \times 10^{-2}$	2.72	$3.2641 \times 10^{-3}$
1.53	$6.30084 \times 10^{-2}$	2.13	$1.65858 \times 10^{-2}$	2.73	$3.16672 \times 10^{-3}$
1.54	$6.17802 \times 10^{-2}$	2.14	$1.61774 \times 10^{-2}$	2.74	$3.07196 \times 10^{-3}$
1.55	$6.05708 \times 10^{-2}$	2.15	$1.57776 \times 10^{-2}$	2.75	$2.97976 \times 10^{-3}$
1.56	$5.93799 \times 10^{-2}$	2.16	$1.53863 \times 10^{-2}$	2.76	$2.89007 \times 10^{-3}$
1.57	$5.82076 \times 10^{-2}$	2.17	$1.50034 \times 10^{-2}$	2.77	$2.80281 \times 10^{-3}$
1.58	$5.70534 \times 10^{-2}$	2.18	$1.46287 \times 10^{-2}$	2.78	$2.71794 \times 10^{-3}$
1.59	$5.59174 \times 10^{-2}$	2.19	$1.42621 \times 10^{-2}$	2.79	$2.6354 \times 10^{-3}$