Práctico 8
Deducción Natural e Identidad - Lógica de Predicados

Ejercicio 6

a. I. Formalizamos la relación de *hermanos* con la siguiente fórmula de `FORM`:

$$(P_1(x_1, x_2) \leftrightarrow ((\neg x_1 =' x_2) \wedge f_1(x_1) =' f_1(x_2)))$$

II. Construimos primero una derivación que prueba la propiedad irreflexiva de la relación *hermanos*:

H) $(\forall x)(\forall y)(P_1(x, y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$

T) $(\forall x)\neg P_1(x, x)$

Demo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))}{(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))}\,E\forall(*_3)}{P_1(x,x) \leftrightarrow ((\neg x =' x) \wedge (f_1(x) =' f_1(x)))}\,E\forall(*_2) \qquad [P_1(x,x)]^1}{(\neg x =' x) \wedge (f_1(x) =' f_1(x))}\,E\leftrightarrow}{\neg x =' x}\,E\wedge \qquad \dfrac{}{x =' x}\,RI_1}{\bot}\,E\neg}{\neg P_1(x,x)}\,I\neg(1)}{(\forall x)\neg P_1(x,x)}\,I\forall(*_1)$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P_1(x, y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))\})$.
$(*_2)$ x está libre para y en $(P_1(x, y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$.
$(*_3)$ x está libre para x en $(\forall y)(P_1(x, y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$.

Continuamos con la simetría de la relación *hermanos*.

H) $(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$

T) $(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \rightarrow P_1(y,x))$

Demo.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_3)$}
\UnaryInfC{$P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y))$}
\AxiomC{$[P_1(x,y)]^1$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$(\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$(\neg x =' y)$}
\AxiomC{$[\neg P(y,x)]^2$}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_8)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P_1(w,y) \leftrightarrow ((\neg w =' y) \wedge f_1(w) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_7)$}
\UnaryInfC{$P_1(w,x) \leftrightarrow ((\neg w =' x) \wedge f_1(w) =' f_1(x))$}
\RightLabel{$I\forall(*_6)$}
\UnaryInfC{$(\forall w)(P_1(w,x) \leftrightarrow ((\neg w =' x) \wedge f_1(w) =' f_1(x)))$}
\RightLabel{$I\forall(*_5)$}
\UnaryInfC{$(P_1(y,x) \leftrightarrow ((\neg y =' x) \wedge f_1(y) =' f_1(x)))$}
\AxiomC{$[(\neg y =' x)]^3$}
\AxiomC{$(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_3)$}
\UnaryInfC{$P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y))$}
\AxiomC{$[P_1(x,y)]^1$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$(\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$f_1(x) =' f_1(y)$}
\RightLabel{RI_2}
\UnaryInfC{$f_1(y) =' f_1(x)$}
\RightLabel{$I\wedge$}
\BinaryInfC{$(\neg y =' x) \wedge f_1(y) =' f_1(x)$}
\RightLabel{$E\leftrightarrow$}
\BinaryInfC{$P(y,x)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$RAA(3)$}
\UnaryInfC{$y =' x$}
\RightLabel{RI_2}
\UnaryInfC{$x =' y$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{$RAA(2)$}
\UnaryInfC{$P_1(y,x)$}
\RightLabel{$I\rightarrow(1)$}
\UnaryInfC{$P_1(x,y) \rightarrow P_1(y,x)$}
\RightLabel{$I\forall(*_2)$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(P_1(x,y) \rightarrow P_1(y,x))$}
\RightLabel{$I\forall(*_1)$}
\UnaryInfC{$(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \rightarrow P_1(y,x))$}
\end{prooftree}
$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))\})$.
$(*_2)$ $y \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))\})$.
$(*_3)$ y está libre para y en $P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y))$.
$(*_4)$ x está libre para x en $(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$.
$(*_5)$ y está libre para w en $(P_1(w,x) \leftrightarrow ((\neg w = x) \wedge f_1(w) =' f_1(x)))$.
$(*_6)$ $w \notin FV(\{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))\})$.
$(*_7)$ x está libre para y en $P_1(w,y) \leftrightarrow ((\neg w =' y) \wedge f_1(w) =' f_1(y))$.
$(*_8)$ w está libre para x en $(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \leftrightarrow ((\neg x =' y) \wedge f_1(x) =' f_1(y)))$.

b. **H1)** $(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \to P_1(y,x))$

H2) $(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y))$

H3) $(\forall x)(P_1(c,x) \to P_2(x))$

H4) $\neg P_2(c)$

T) $(\forall x)\neg P_1(x,c)$

Demo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P_2(c) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y))}{(\forall y)(P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y))}\,E\forall(*_3)}{P_1(x,c) \wedge P_2(x) \to P_2(c)}\,E\forall(*_2) \qquad \dfrac{[P_1(x,c)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(P_1(c,x) \to P_2(x))}{P_1(c,x) \to P_2(x)}\,E\forall(*_4) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \to P_1(y,x))}{(\forall y)(P_1(x,y) \to P_1(y,x))}\,E\forall(*_6)}{P_1(x,c) \to P_1(c,x)}\,E\forall(*_5) \qquad [P_1(x,c)]^1}{P_1(c,x)}\,E\to}{P_2(x)}\,E\to}{P_1(x,c) \wedge P_2(x)}\,I\wedge}{P_2(c)}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg P_1(x,c)}\,I\neg(1)}{(\forall x)\neg P_1(x,c)}\,I\forall(*_1)$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{\neg P_2(c),\ (\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \to P_1(y,x)),\ (\forall x)(P_1(c,x) \to P_2(x)),\ (\forall x)(\forall y)(P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y))\})$.
$(*_2)$ c está libre para y en $P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y)$.
$(*_3)$ x está libre para x en $(\forall y)(P_1(x,y) \wedge P_2(x) \to P_2(y))$.
$(*_4)$ x está libre para x en $P_1(c,x) \to P_2(x)$.
$(*_5)$ c está libre para y en $P_1(x,y) \to P_1(y,x)$.
$(*_6)$ x está libre para x en $(\forall y)(P_1(x,y) \to P_1(y,x))$.

c. **H1)** $(\forall x)(P_2(x) \vee (\exists y)(P_1(x,y) \wedge P_2(y)))$

H2) $(\exists x)(P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y)))$

T) $P_2(c)$

Demo.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\exists x)(P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y)))$}
\AxiomC{$(\forall x)(P_2(x) \vee (\exists y)(P_1(x,y) \wedge P_2(y)))$}
\RightLabel{$E\forall(*_2)$}
\UnaryInfC{$P_2(c) \vee (\exists y)(P_1(c,y) \wedge P_2(y))$}
\AxiomC{$[P_2(c)]^2$}
\AxiomC{$[(\exists y)(P_1(c,y) \wedge P_2(y))]^2$}
\AxiomC{$[(P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y)))]^1$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$\neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y))$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$(\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y))$}
\RightLabel{$E\forall(*_4)$}
\UnaryInfC{$\neg x =' y \to \neg P_1(c,y)$}
\AxiomC{$[(P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y)))]^1$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x)$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$\neg P_2(x)$}
\AxiomC{$[P_1(c,y) \wedge P_2(y)]^3$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P_2(y)$}
\AxiomC{$[x =' y]^4$}
\RightLabel{$RI2$}
\UnaryInfC{$y =' x$}
\RightLabel{$RI4(*_5)$}
\BinaryInfC{$P_2(x)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I\neg(4)$}
\UnaryInfC{$\neg x =' y$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$\neg P_1(c,y)$}
\AxiomC{$[P_1(c,y) \wedge P_2(y)]^3$}
\RightLabel{$E\wedge$}
\UnaryInfC{$P_1(c,y)$}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$E\bot$}
\UnaryInfC{$P_2(c)$}
\RightLabel{$E\exists(*_3)(3)$}
\BinaryInfC{$P_2(c)$}
\RightLabel{$E\vee(2)$}
\TrinaryInfC{$P_2(c)$}
\RightLabel{$E\exists(*_1)(1)$}
\BinaryInfC{$P_2(c)$}
\end{prooftree}
$$

$(*_1)$ $x \notin FV(\{P_2(c), (\forall x)(P_2(x) \vee (\exists y)(P_1(x,y) \wedge P_2(y)))\})$
$(*_2)$ c libre para x en $(\forall x)(P_2(x) \vee (\exists y)(P_1(x,y) \wedge P_2(y)))$
$(*_3)$ $y \notin FV(\{P_2(c), (P_1(c,x) \wedge \neg P_2(x) \wedge (\forall y)(\neg x =' y \to \neg(P_1(c,y)))\})$
$(*_4)$ y libre para y en $\neg x =' y \to \neg P_1(c,y)$
$(*_5)$ y libre para x en $P_2(x)$ y x libre para x en $P_2(x)$

Ejercicio 7

Bosquejo de solución

a. $(\forall x)(\forall y)x =' y \vdash (\forall y)(\forall x)y =' x$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)x =' y}{(\forall y)x =' y}\ E\forall(*^4)}{x =' y}\ E\forall(*^3)}{y =' x}\ RI2}{(\forall x)y =' x}\ I\forall(*^2)}{(\forall y)(\forall x)y =' x}\ I\forall(*^1)$$

$(*^1)$ $y \notin FV((\forall x)(\forall y)x =' y)$
$(*^2)$ $x \notin FV((\forall x)(\forall y)x =' y)$
$(*^3)$ y libre para y en $x =' y$
$(*^4)$ x libre para x en $(\forall y)x =' y$

b. $\vdash (\forall z)(z =' x \leftrightarrow z =' y) \to x =' y$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall z)(z =' x \leftrightarrow z =' y)]^{(1)}}{(x =' x \leftrightarrow x =' y)}\ E_\forall(*1) \qquad \dfrac{}{x =' x}\ RI1}{x =' y}\ E_{\leftrightarrow_1}}{(\forall z)(z =' x \leftrightarrow z =' y) \to x =' y}\ I_\to^{(1)}$$

$(*1)$ x libre para z en $(z =' x \leftrightarrow z =' y)$

c. $\vdash (\forall x)(\exists y)x =' y$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x =' x}\ RI1}{(\exists y)x =' y}\ I_\exists(*1)}{(\forall x)(\exists y)x =' y}\ I_\forall(*2)$$

$(*1)$ x libre para y en $x =' y$
$(*2)$ $x \notin FV(\emptyset)$

d. $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg x =' z \vee \neg y =' z)]^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg x =' z \vee \neg y =' z)]^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg x =' y]^{(1)} \qquad \dfrac{[x =' z]^{(3)} \qquad \dfrac{[y =' z]^{(4)}}{z =' y}\,RI2}{x = y}\,RI3}{\bot}\,E_{\neg}}{\neg y =' z}\,I_{\neg}^{(4)}}{\neg x =' z \vee \neg y =' z}\,I_{\vee_2}}{\bot}\,E_{\neg}}{\neg x =' z}\,I_{\neg}^{(3)}}{\neg x =' z \vee \neg y =' z}\,I_{\vee_1}}{\bot}\,E_{\neg}}{\neg x =' z \vee \neg y =' z}\,RAA^{(2)}}{(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)}\,I_{\to}^{(1)}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)}{(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)}\,I_{\forall}(*1)}{(\forall y)(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)}\,I_{\forall}(*2)}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \vee \neg y =' z)}\,I_{\forall}(*3)
$$

(∗1) $z \notin FV(\emptyset)$, todas las hipótesis fueron canceladas antes.
(∗2) $y \notin FV(\emptyset)$, todas las hipótesis fueron canceladas antes.
(∗3) $x \notin FV(\emptyset)$, todas las hipótesis fueron canceladas antes.

e. $\overline{\forall}\varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x]))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x =' y]^{(2)} \quad [\varphi]^{(1)}}{\varphi[y/x]}\,RI4^*(*2)}{(x =' y \to \varphi[y/x])}\,I_{\to}^{(2)}}{(\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])}\,I_{\forall}(*3) \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])]^{(1)}}{x =' x \to \varphi}\,E_{\forall}(*1) \qquad \dfrac{}{x =' x}\,RI1}{\varphi}\,E_{\to}}{\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x])}\,I_{\leftrightarrow}^{(1)}}{(\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x]))}\,I_{\forall}(*4)
$$

(∗1) x libre para y en $(x =' y \to \varphi[y/x])$
(∗2) x libre para x en φ e y libre para x en φ porque $y \notin V(\varphi)$
(∗3) $y \notin V(\varphi)$ como $FV(\varphi) \subseteq V(\varphi)$ entonces $y \notin FV(\varphi)$
(∗4) $x \notin FV(\emptyset)$

f. $\overline{\forall}\varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x =' y \wedge \varphi[y/x]))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x =' x}\,RI1 \quad [\varphi]^{(1)}}{x =' x \wedge \varphi}\,I_{\wedge}}{(\exists y)(x =' y \wedge \varphi[y/x])}\,I_{\exists}(*3) \qquad \dfrac{[(\exists y)(x =' y \wedge \varphi[y/x])]^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x =' y \wedge \varphi[y/x]]^{(2)}}{x =' y}\,E_{\wedge_1}}{y =' x}\,RI2 \qquad \dfrac{[x =' y \wedge \varphi[y/x]]^{(2)}}{\varphi[y/x])}\,E_{\wedge_2}}{\varphi}\,RI4^*(*1)}{\varphi}\,E_{\exists}^{(2)}(*2)}{\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x =' y \wedge \varphi[y/x])}\,I_{\leftrightarrow}^{(1)}}{(\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x =' y \wedge \varphi[y/x]))}\,I_{\forall}(*4)
$$

(∗1) x libre para x en φ e y libre para x en φ porque $y \notin V(\varphi)$
(∗2) $y \notin FV(\emptyset)$ e $y \notin FV(\varphi)$
(∗3) x libre para y en $x =' y \wedge \varphi[y/x]$. Esto se cumple porque $y \notin V(\varphi)$. Observar que sintácticamente $\varphi[y/x][x/y] = \varphi$

$(*4)\ x \notin FV(\emptyset)$

Ejercicio 10

Bosquejo de solución

a. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \vdash (\forall y)(\forall x)P(y,x)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\forall x)(\forall y)P(x,y)}{(\forall y)P(z,y)}\,E\forall(*6)}{P(z,x)}\,E\forall(*5)}{(\forall z)P(z,x)}\,I\forall(*4)}{P(y,x)}\,E\forall(*3)}{(\forall x)P(y,x)}\,I\forall(*2)}{(\forall y)(\forall x)P(y,x)}\,I\forall(*1)$$

(*1) $y \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)(\forall y)P(x,y)\})$
(*2) $x \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)(\forall y)P(x,y)\})$
(*3) y libre para z en $P(z,x)$
(*4) $z \notin \mathrm{FV}(\{(\forall x)(\forall y)P(x,y)\})$
(*5) x libre para y en $P(z,y)$
(*6) z libre para x en $(\forall y)P(x,y)$

b. $(\forall x)P(x,g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge y\doteq g(x))$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\forall x)P(x,g(x))}{P(x,g(x))}\,E\forall(*^3) \qquad \cfrac{}{g(x)\doteq g(x)}\,RI1}{P(x,g(x)) \wedge g(x)\doteq g(x)}\,I\wedge}{(\exists y)(P(x,y) \wedge y\doteq g(x))}\,I\exists(*^2)}{(\forall x)((\exists y)(P(x,y) \wedge y\doteq g(x)))}\,I\forall(*^1)$$

$(*^1) x \notin FV(\{(\forall x)P(x,g(x))\})$

$(*^2) g(x)$ esta libre para y en $P(x,y) \wedge y\doteq g(x)$

$(*^3) x$ esta libre para x en $P(x,g(x))$

c. $(\forall z)(P(x,z) \wedge P(y,z) \to P(f(x,y),z)), P(x,f(y,x)), P(y,f(y,x)) \vdash P(f(x,y),f(y,x))$

$$\cfrac{\cfrac{(\forall z)(P(x,z) \wedge P(y,z) \to P(f(x,y),z))}{P(x,f(y,x)) \wedge P(y,f(y,x)) \to P(f(x,y),f(y,x))}\,E\forall(*) \qquad \cfrac{P(x,f(y,x)) \quad P(y,f(y,x))}{P(x,f(y,x)) \wedge P(y,f(y,x))}\,I\wedge}{P(f(x,y),f(y,x))}\,E\to$$

$(*) f(y,x)$ esta libre para z en $P(x,z) \wedge P(y,z) \to P(f(x,y),z)$

d. $\vdash (\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w) \to (\exists x)(\forall w)P(x,w)$

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)((\exists y)((\forall w)P(f(x,y),w)))]^1 \qquad \dfrac{[(\exists y)((\forall w)P(f(x,y),w))]^2 \qquad \dfrac{[(\forall w)P(f(x,y),w)]^3}{(\exists x)((\forall w)P(x,w))}\ I\exists(*^3)}{(\exists x)((\forall w)P(x,w))}\ E\exists(3)(*^2)}{(\exists x)((\forall w)P(x,w))}\ E\exists(2)(*^1)}{(\exists x)((\exists y)((\forall w)P(f(x,y),w))) \to (\exists x)((\forall w)P(x,w))}\ I\to(1)$$

$(*^1) x \notin FV((\exists x)((\forall w)P(x,w)))$

$(*^2) y \notin FV((\exists x)((\forall w)P(x,w)))$

$(*^3) f(x,y)$ esta libre para x en $(\forall w)P(x,w)$

e. $(\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)P(x,f(y,x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)((\forall y)P(y,f(x,y)))}{(\forall y)P(y,f(z,y))}\ E\forall(*^6)}{P(x,f(z,x))}\ E\forall(*^5)}{(\forall z)P(x,f(z,x))}\ I\forall(*^4)}{P(x,f(y,x))}\ E\forall(*^3)}{(\forall x)P(x,f(y,x))}\ I\forall(*^2)}{(\forall y)((\forall x)P(x,f(y,x)))}\ I\forall(*^1)$$

$(*^1) y \notin FV((\forall x)((\forall y)P(y,f(x,y))))$

$(*^2) x \notin FV((\forall x)((\forall y)P(y,f(x,y))))$

$(*^3)$ y está libre para z en $P(x,f(z,x))$

$(*^4) z \notin FV((\forall x)((\forall y)P(y,f(x,y))))$

$(*^5)$ x está libre para y en $P(y,f(z,y))$

$(*^6)$ z esta libre para x en $(\forall y)P(y,f(x,y))$

f. $\vdash (\forall x)\neg P(x,x) \to \neg(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \wedge x \doteq y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x)((\exists y)(P(x,y) \wedge x\doteq y))]^2 \qquad \dfrac{[(\exists y)(P(x,y) \wedge x\doteq y)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[(\forall x)(\neg P(x,x))]^1}{\neg P(x,x)}\ E\forall(*^3) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(x,y) \wedge x\doteq y]^4}{x\doteq y}\ E\wedge_2}{y\doteq x}\ RI2 \qquad \dfrac{[P(x,y) \wedge x\doteq y]^4}{P(x,y)}\ E\wedge_1}{P(x,x)}\ RI4(*^4)}{\bot}\ E\neg}{\bot}\ E\exists(4)(*^2)}{\bot}\ E\exists(3)(*^1)}{\neg((\exists x)((\exists y)(P(x,y) \wedge x\doteq y)))}\ I\neg(2)}{(\forall x)(\neg P(x,x)) \to \neg((\exists x)((\exists y)(P(x,y) \wedge x\doteq y)))}\ I\to(1)$$

$(*^1) x \notin FV(\{\bot, (\forall x)\neg P(x,x)\})$

$(*^2) y \notin FV(\{\bot, (\forall x)\neg P(x,x)\})$

$(*^3) x$ esta libre para x en $\neg P(x,x)$

$(*^4) x$ e y estan libres para z en $P(x,z)$

Ejercicio 12

Bosquejo de solución

a. La conclusión preocupante es que hay traficantes que son agentes. Para llegar a esa conclusion a partir de las frases podemos ver que existen traficantes que solo fueron vigilados por otro traficante(II), y como todos los traficantes no son VIP (III) tienen que ser vigilados por algún agente (I), entonces el traficante que vigila es un agente también.

b. El tipo de similaridad en esta solución será $\langle 1,1,1,2,1;-;0\rangle$. Por lo tanto tendremos cuatro propiedades. Estas cuatro propiedades son:

   a) $T(x)$ es la propiedad ser traficante.
   b) $A(x)$ es la propiedad ser agente.
   c) $VIP(x)$ es la propiedad ser VIP.
   d) $O(x,y)$ es que x es vigilado por y.
   e) $I(x)$ es que x ingresa.

   Luego podemos representar las frases como formulas de `FORM`.

   (I) $(\forall x)(I(x) \wedge \neg VIP(x) \to (\exists y)(O(x,y) \wedge A(y)))$
   (II) $(\exists z)((I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y)))$
   (III) $(\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z))$ que es equivalente a $\neg(\exists z)(T(z) \wedge VIP(z))$

c. Escribir la conclusión es bien sencillo, es decir que existe al menos una persona que es traficante y agente a la vez. Esto es $(\exists y)(T(y) \wedge A(y))$.

d. Para demostrar esta conclusión construiremos una derivación contando con (I), (II) y (III) como hipótesis.

Dem $(\forall x)(I(x) \wedge \neg VIP(x) \to (\exists y)(O(x,y) \wedge A(y)))$, $(\exists z)((I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y)))$, $(\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z)) \vdash (\exists y)(T(y) \wedge A(y))$

Para demostrar esto usaremos dos derivaciones auxiliares y las combinaremos para así obtener la derivación final. Perfectamente se podría realizar la derivación sin derivaciones auxiliares, se realiza de este modo por un tema de organización.

La primer derivación prueba el juicio $((I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y))), (\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z)) \vdash I(x) \wedge \neg VIP(x)$

Esto es que existe la siguiente derivación:

$$\{((I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y))), (\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z))\}$$

$$I(x) \wedge \neg VIP(x)$$

La derivación es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y))}{I(z) \wedge T(z)}\,E\wedge_1}{I(z)}\,E\wedge_1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z))}{T(z) \to \neg VIP(z)}\,E\forall(*_1) \qquad \dfrac{\dfrac{(I(z) \wedge T(z)) \wedge (\forall y)(O(z,y) \to T(y))}{I(z) \wedge T(z)}\,E\wedge_1}{T(z)}\,E\wedge_2}{\neg VIP(z)}\,E\to}{I(z) \wedge \neg VIP(z)}\,I\wedge$$

$(*_1)$ z esta libre para z en $(T(z) \to \neg VIP(z))$.

La otra derivación que usaremos es una que prueba el siguiente juicio: $(I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z,y) \to T(y)), O(z,y) \land A(y) \vdash T(y) \land A(y)$

Esto es que existe la siguiente derivación:

$$\{(I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z,y) \to T(y)), O(z,y) \land A(y)\}$$

$$T(y) \land A(y)$$

Construimos la derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z,y) \to T(y))}{(\forall y)(O(z,y) \to T(y))}\,E\land_2}{O(z,y) \to T(y)}\,E\forall(*_1) \qquad \dfrac{O(z,y) \land A(y)}{O(z,y)}\,E\land_1}{T(y)}\,E\to \qquad \dfrac{O(z,y) \land A(y)}{A(y)}\,E\land_2}{(T(y) \land A(y))}\,I\land$$

$(*_1)$ z esta libre para z en $O(z,y) \to T(y)$.

Luego, la derivación final combina las dos derivaciones anteriores:

$$\dfrac{(\exists z)((I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z, y) \to T(y))) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x)(I(x) \land \neg VIP(x) \to (\exists y)(O(x, y) \land A(y)))}{(I(z) \land \neg VIP(z) \to (\exists y)(O(z, y) \land A(y)))}\,E\forall(*_3) \qquad \begin{matrix}[(((I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z, y) \to T(y)))]^1, (\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z)) \\ I(x) \land \neg VIP(x)\end{matrix}}{(\exists y)(O(z, y) \land A(y))}\,E\to \qquad \dfrac{\begin{matrix}[(I(z) \land T(z)) \land (\forall y)(O(z, y) \to T(y))]^1, [O(z, y) \land T(y)]^2 \\ T(y) \land A(y)\end{matrix}}{(\exists y)(T(y) \land A(y))}\,I\exists(*_4)}{(\exists y)(T(y) \land A(y))}\,E\exists_2(*_2)}{(\exists y)(T(y) \land A(y))}\,E\exists_1(*_1)$$

($*_1$) z no ocurre libre en $(\forall z)(T(z) \to \neg VIP(z))$,$(\forall x)(I(x) \land \neg VIP(x) \to (\exists y)(O(x, y) \land A(y)))$, $(\exists y)(T(y) \land A(y))$.
($*_2$) y no ocurre libre en $(I(z) \land T(z) \to \neg VIP(z))$ ni en $(\exists y)(T(y) \land A(y))$.
($*_3$) z está libre para x en $(\neg VIP(x) \to (\exists y)(O(x, y) \land A(y)))$.
($*_4$) y esta libre para y en $T(y) \land A(y)$.