1 Problemas de desarrollo 2

Plano tangente

Consideremos $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un conjunto abierto U del plano que es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ un punto de U. Ya sabemos asociar a su gráfica un plano tangente que cumpla el mismo rol de la recta tangente a la gráfica de la función de un sola variable. Recordemos que dicho plano se define por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\clubsuit$$

La primera observación que debemos hacer si tomamos como ejemplo el elipsoide($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$), es que no existe función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuya gráfica sea esta superficie. Por lo tanto para calcular un plano tangente al elipsoide debemos buscar una función cuya gráfica sea al menos una sección de dicha superficie en el punto. Esto se logra por ejemplo despejando z de la ecuación anterior (como vemos obtenemos dos valores posibles para z uno positivo y otro negativo). ¿Existe una manera de poder hacer el ejercicio y no despejar z? Sí, para ello podemos razonar de la siguinte manera:
Recordemos que el vector $grad f(x_0, y_0)$ es un vector ortogonal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0), dicha propiedad fue discutida en las notas teóricas del curso (Observación Pag. 100). Llevando esta idea una dimensión más arriba, tenemos que la superficie que representa la gráfica de la función $z = f(x, y)$ también la podemos ver como el nivel cero de la función de tres variables $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Entonces, la superficie $z = f(x, y)$ se puede ver como una superficie de nivel (correspondiente al nivel cero) de la función $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, o bien, como la manera en que la gráfica de la función $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ (que vive en el espacio $\mathbb{R}^4$) "atraviesa" el espacio $\mathbb{R}^3$ (identificado como una porción de $\mathbb{R}^4$ correspondiente a aquellos puntos de $\mathbb{R}^4$ cuya última coordenada sea igual a cero).

Así por ejemplo, la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ podemos verla como la superficie de nivel de cero $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Más aún, podríamos tener una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$, que no representa (globalmente) la gráfica de alguna función $z = f(x, y)$ y también verla como una superficie de nivel de una función $u = F(x, y, z)$. Este es el caso que se presenta con el elipsoide ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$), el cual no es la gráfica de función $z = f(x.y)$ alguna, pero sí la podemos ver como el nivel cero de la función $F(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$. Así las cosas, si vemos la superficie $z = f(x, y)$ como el nivel cero de la función $F(x, y, z) = z - f(x;, y)$, y recordamos que el gradiente de esta función es un vector perpendicular a cualquier superficie de nivel de ella, concluimos que el vector gradiente

$$grad(F) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

debe ser normal a la superficie considerada. En efecto, si calculamos estas

$$grad(F) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$$

resultado que coincide con $\clubsuit$. Teniendo el vector normal y el punto por donde pasa dicho plano tengente, podemos calcularlo de una manera muy sencilla, sin necesidad de despejar.

Anexo podrán encontrar las superficies cuádricas más importante y algunos detalles de las mismas. Los problemas de esta semana combinan ejercicios de planos tangentes a estas superficies.

1 Complete el siguiente cuadro. El objetivo es obtener el plano tangente de las superficies cuádricas en $P = (x_0, y_0, z_0)$ en su forma más simplificada.

Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$x_0x + y_0y + z_0z = r^2$
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$
Cono	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x_0x + y_0y)$ $P \neq (0,0,0)$

Mostraremos el desarrollo para el plano tangente al elipsoide(la esfera es un caso particular $a = b = c$) y el correspondiente al cono se desprende de un razonamiento análogo.

Calculemos el plano tangente a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en P utilizando dos métodos:

1.1 Usando las técnicas vistas en las notas teóricas del curso: Para ello es necesario contar con una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la gráfica de f coincida en una vecindad del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ (en este caso $z_0 = f(x_0, y_0)$) con la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Despejando la variable z obtenemos:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

dependiendo del valor de z_0 si es positivo o negativo, elegimos el signo de la anterior expresión**(Note que el argumento presentado no funciona si $z_0 = 0$)**. Supongamos que $z_0 > 0$, entonces definimos:

$$f(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

.

El plano tangente viene dado por la expresión:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Calculando las derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{c}{a^2}\frac{x_0}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{c}{b^2}\frac{y_0}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano tangente resulta

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}}\frac{cx_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}}\frac{cy_0}{b^2}(y - y_0)$$

La anterior ecuación es teóricamente correcta, sin embargo para efectos de hacer cálculos o aproximaciones sería conveniente contar una expresión más simplicada, para ello notamos

$$z_0 = c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}$$

$$\frac{z_0^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

así las derivadas parciales asumen los valores

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0}$$

Por lo tanto la ecuación del plano se reduce a

$$z = z_0 - \frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

De donde

$$x_0\frac{(x - x_0)}{a^2} + y_0\frac{(y - y_0)}{b^2} + z_0\frac{(z - z_0)}{c^2} = 0$$

Finalemente el hecho de que el punto se encuentre sobre la superficie($\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$) produce la forma simplificada que estamos buscando $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

1.2 Calculemos el plano tangente empleando el razonamiento expuesto en la parte inicial. Para ello basta definir una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que la superficie de nivel cero de F sea el elipsoide. Definimos $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. De donde

$$\left(\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\right) = \left(2\frac{x_0}{a^2}, 2\frac{y_0}{b^2}, 2\frac{z_0}{c^2}\right)$$

El vector gradiente anterior es normal al elipsoide en $P = (x_0, y_0, z_0)$, por lo tanto la ecuación del plano tangente es

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

Al sustituir teniendo en cuenta que $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, obtenemos que el plano tangente es $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

Observación: El método planteado en 1.2 no implica despejar alguna variable ni tener consideraciones sobre el lugar donde se encuentra el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$, lo presentamos acá como un método alternativo para el cáculo de planos tangentes que simplifican los cálculos.

2 Plano tangente y Esferas.

2.1 Demostrar que el plano $ax + by + cz = d$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ si y solamente si $a^2r^2 + b^2r^2 + c^2r^2 = d^2$.

($\Rightarrow$)Supongamos que el plano $ax + by + cz = d$ es tangente a la esfera en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$. Notamos que $d \neq 0$ ¿Por qué? (recordemos que un plano con término independiente igual cero, contiene al punto

$(0,0,0)$. Dicho punto es también el centro de la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. En este caso la intersección de la esfera con el plano sería un circulo de radio igual al radio de la esfera).

Por el item anterior la ecuación del plano tangente a la esfera viene dado por $x_0x+y_0y+z_0z=r^2$. En consecuencia los planos

$$\frac{x_0}{r^2}x+\frac{y_0}{r^2}y+\frac{z_0}{r^2}z=1$$

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\frac{c}{d}z=1$$

son iguales. Como los terminos independientes son iguales a 1, podemos tener la siguientes relaciones:

$$\frac{x_0}{r^2}=\frac{a}{d}$$

$$\frac{y_0}{r^2}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{z_0}{r^2}=\frac{c}{d}$$

De donde

$$a=\frac{x_0}{r^2}d$$

$$b=\frac{y_0}{r^2}d$$

$$c=\frac{z_0}{r^2}d$$

Teniendo en cuenta que el punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ se encuentra sobre la superficie y por lo tanto satisface su ecuación $x_0^2+y_0^2+z_0^2=r^2$ concluimos que $a^2r^2+b^2r^2+c^2r^2=d^2$.

$(\Leftarrow)$ Consideremos el plano $ax+by+cz=d$ con la condición $a^2r^2+b^2r^2+c^2r^2=d^2$ sobre sus coeficientes. Dedemos mostrar que el plano es tangente a la esfera. Primero debemos asegurarnos que $ax+by+cz=d$ intersecta a $x^2+y^2+z^2=r^2$(recordemos que siempre hablamos de tangencia a una superficie en un punto.)

Es bien conocida la fórmula para calcular la distancia de un punto a un plano. Tomemos el punto como el centro de la esfera $(0,0,0)$ y el plano que estamos considerando $ax+by+cz=d$, entonces:

$$d((0,0,0),ax+by+cz=d)=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=r$$

Por lo tanto el plano $ax+by+cz=d$ se encuentra a r unidades del centro de la esfera. La defición de una esfera viene dado como un lugar geométrico, justamente el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan r unidades de su centro $(0,0,0)$. Esto nos asegura que la intersección es no vacía. Sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ que satisface esta condición. Utilizando el item 1 podemos construir el plano tangente a la esfera en P y verificar que es justamente $ax+by+cz=d$.

Observación: La interpretación geométrica de este problema es interesante. Si bien es cierto que ahora tenemos una herramienta muy poderosa para calcular planos tangentes como lo es el cálculo diferencial en varias variables, el concepto de tangencia ya era conocido desde hace mucho tiempo. Y para superficies con una simetría(perfecta) como un esfera se sabía cómo calcularlo sin necesidad de las mismas. El problema se puede traducir en uno muy simple: Dada una esfera en el espacio y un plano, se consideran las posibles posiciones relativas de estos dos objetos. Los casos se reducen a tres:

1. Su intersección es vacía.
2. **Su interesección es un único punto P. En cuyo caso se dice que el plano es tangente a la esfera en P.**

3. Su intersección consiste en más de un punto, en este caso son secantes.

Justamente nos interesa el item[2]. Se puede verificar que el plano tangente a la esfera tiene como vector normal, un vector radial a la esfera. Es decir, si unimos el centro de la esfera con el punto de tangencia, el vector obtenido es normal a la esfera. (se encuentra en la misma dirección que el gradiente en este punto.)

2.2 Los puntos $A = (2,5,3)$ y $B = (-1,-2,-3)$ son los extremos de un diámetro de una esfera. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a esta esfera en los puntos A y B. ¿Qué interpretación geométrica tiene este resultado?

Es necesario determinar la ecuación de la esfera. Siendo el segmento de recta AB un diámetro, concluimos que la mitad de su longitud es el radio de la esfera buscada y su punto medio el centro de la misma. Por lo tando $r = \dfrac{\sqrt{94}}{2}$ y $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, 0)$ su centro. Calculamos la ecuación de la esfera con los datos anteriores y obtenemos que los planos $3x + 7y + 6z = 59$ y $3x + 7y + 6z = -35$ son tangentes a la esfera en los puntos A y B respectivamente.

Observación: Los puntos A y B reciben un nombre especial, se dice que son puntos antipodales en la esfera. Como vemos ellos determinan de manera única a la esfera que los contiene. Además dada una esfera y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ sobre ella cualquiera, existe uno y sólo un punto antipodal a P sobre la esfera. Geométricamente se obtienen de una manera muy sencilla, basta determinar la recta en el espacio que une al centro de la esfera y P. Dicha recta corta a la esfera en otro punto, precisamente el antipodal a P. El ejercicio anterior nos dicen que los puntos antipodales no solamente gozan de una simetría tremenda con respecto al centro de la esfera, además comparten otra propiedad muy interesante y es que los planos tangentes a la esfera en dichos puntos antipodales son paralelos. Y el recíproco también es cierto, pues si dos planos tangentes a una esfera son paralelos, dichos planos corresponden a puntos antipodales, eso es justamente lo que nos dice el próximo enunciado.

2.3 Determine la esfera que tenga por planos tangentes a los planos paralelos $x + y + z = 5$ $x + y + z = -3$, sabiendo que el punto $(1,2,2)$ es uno de los puntos de contacto.

Notemos que el punto $(1,2,2)$ se encuentra sobre el plano $x+y+z = 5$, la observación anterior nos conduce a la esfera $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 4z - 13 = 0$.

Superficies Tangentes

Sean S_1 y S_2 superficies y $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto tal que $P \in S_1 \cap S_2$ Diremos que dos superficies son tangentes entre sí en P, si el plano tangente a S_1 en P es igual al plano tangente a S_2 en P. En otras palabras, S_1 y S_2 son tangentes en P si comparten el mismo plano tangente en el punto.

2.4 Demostrar que la esfera y el cono (eliptico) dados por las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{b^2 + c^2}{c})^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$$
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

son tangentes entre sí en los puntos $(0, \pm b, c)$.

Definimos las funciones de tres variables F y G cuyas superficies de nivel cero son precisamente la esfera y el cono dado.

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z - \frac{b^2 + c^2}{c})^2 - \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$$

$$G(x,y,z) = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Para $P = (0, b, c)$ el plano tangente a la esfera vienen dado por:

$$\frac{\partial F(0,b,c)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial F(0,b,c)}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial F(0,b,c)}{\partial z}(z-c) = 0$$

$$2(0)(x-0) + 2(b)(y-b) + 2(c - \frac{b^2+c^2}{c})(z-c) = 0$$

$$(b)(y-b) + (c - \frac{b^2+c^2}{c})(z-c) = 0$$

$$-cy + bz = 0$$

Para $P = (0, b, c)$ el plano tangente al cono vienen dado por:

$$\frac{\partial G(0,b,c)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial G(0,b,c)}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial G(0,b,c)}{\partial z}(z-c) = 0$$

$$-2\frac{0}{a^2}(x-0) - 2\frac{b}{b^2}(y-b) + 2\frac{c}{c^2}(z-c) = 0$$

$$-\frac{1}{b}(y-b) + \frac{1}{c}(z-c) = 0$$

$$-\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

$$-cy + bz = 0$$

El procedimiento es análogo para $(0, -b, c)$.

Ángulo entre superficies

Se llama ángulo entre dos superficies en el punto de su intersección al ángulo que forman los planos tangentes a dichas superficies en el punto que se considera. Entonces diremos que dos superficies se cortan ortogonalmente si el ángulo de intersección es recto.

2.5 ¿Qué ángulo forman en su intersección el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

Consideremos los siguientes hechos:

2.5.1 Para poder considerar el ángulo entre dos superficies es necesario que las mismas se corten. Es rutina verificar que $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ es un punto que se encuentra sobre ambas.

2.5.2 El ángulo entre dos planos (no paralelos) es igual al ángulo de sus vectores normales, recordemos que los vectores normales a los planos tangentes son justamente los vectores gradientes.

Definimos $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ y $G(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1$, entonces las superficies de nivel cero de F y G son justamente el cilindro y la esfera dados.

$$gradF = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

$$gradG = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z})$$

Evaluados en $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

$$gradF = (1, \sqrt{3}, 0)$$

$$gradG = (-1, \sqrt{3}, 0)$$

De donde el ángulo entre ellos es igual a $\frac{\pi}{3}$.

2.6 Demuestre que las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ se cortan entre sí ortogonalmente.

Notemos que a, b y c son valores diferentes de cero. Geométricamente resulta más evidente si completamos los cuadrados y observamos cada esfera con su centro y radio correspondiente $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by \Leftrightarrow x^2 + (y-b)^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$.

Consideremos el caso de las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2by$$

el corte sucede sobre todos los puntos del espacio que satisfacen la condición $2ax = 2by$ o equivalentemente $ax = by$ y se encuentran sobre las dos esferas.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ con esta propiedad. Al calcular los vectores gradientes a $x^2+y^2+z^2 = 2ax$ y $x^2+y^2+z^2 = 2by$ en P obtenemos los vectores $(2x_0-2a, 2y_0, 2z_0)$ y $(2x_0, 2y_0-2b, 2z_0)$ respectivamente. Si consideramos su producto punto teniendo en cuenta que que el punto P satisface las ecuaciones de las dos esferas

$$(2x_0 - 2a, 2y_0, 2z_0) \cdot (2x_0, 2y_0 - 2b, 2z_0) = 4x_0^2 - 4ax_0 + 4y_0^2 - 4by_0 + 4z_0^2 = 4[x_0^2 + y_0^2 + 4z_0^2 - ax_0 - by_0] = 0$$

Por lo tanto se cortan ortogonalmente en dicho punto.