Práctico 11 - Ecuaciones de Maxwell - Ondas EM

Hasta ahora: Forma integral

Jackson

1865

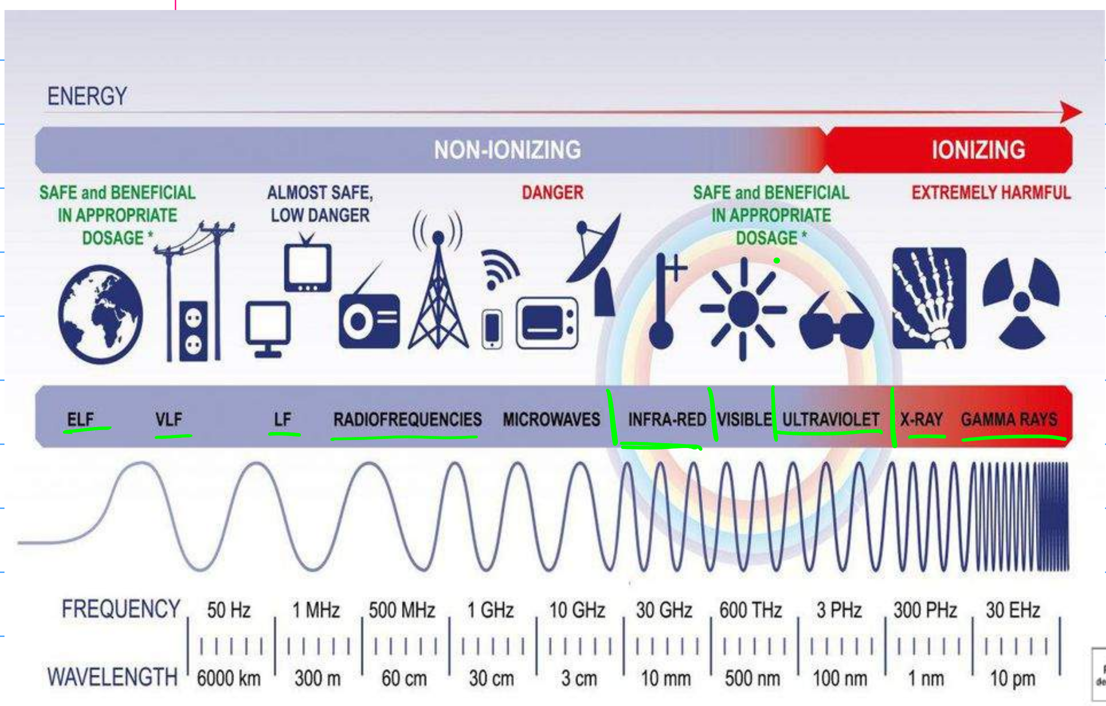
L. Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

L. Gauss $\vec{B}$ $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ No hay monopolos mag

L. Amperè $\oint_\ell \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \overbrace{\frac{d\Phi_E(S)}{dt}}^{i_{desp}\,(i_d)}$ $\Rightarrow$ Ley Amperè - Maxwell

L. Faraday $\underbrace{\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{\mathcal{E}_{ind}} = -\frac{d\Phi_B(S)}{dt}$ $\mathcal{E}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Consecuencias Ec. Max} \Rightarrow \text{Ondas E.M} \\ \vec{E}(\vec{r},t) \text{ y } \vec{B}(\vec{r},t) \text{ están relacionados} \\ \text{y se propagan como una onda}\end{array}}$$

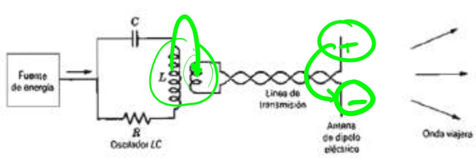


Cómo generar OEM?

↳ Dipolo oscilando

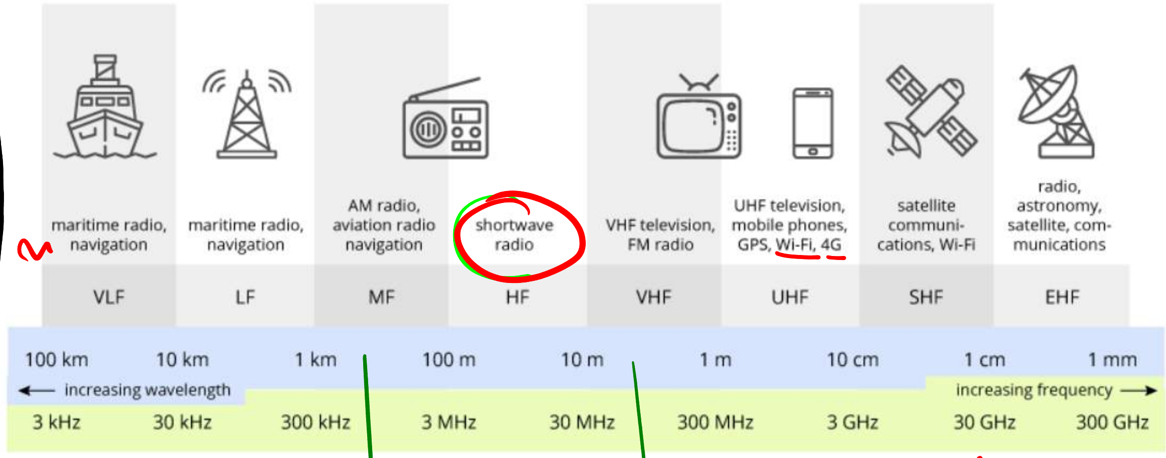
$\oplus$

$\ominus$ $P_0 e^{j\omega t}$



Espectro Visible

Color	Wavelength interval
Red	~ 700–635 nm
Orange	~ 635–590 nm
Yellow	~ 590–560 nm
Green	~ 560–520 nm
Cyan	~ 520–490 nm
Blue	~ 490–450 nm
Violet	~ 450–400 nm



radio AM
800 - 1000 kHz

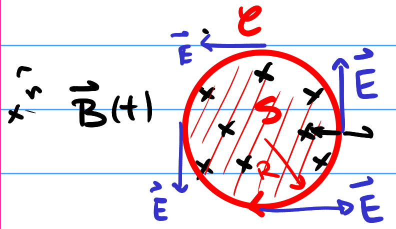
radio FM
90 - 100 MHz

new
5G (28 GHz)

Aplicación Ec Maxwell

Campo $\vec{B}$ variable $\xrightarrow{\text{Faraday}}$ Campo $\vec{E}$ ($\mathcal{E}_{ind}$)

$\vec{B}(t)$



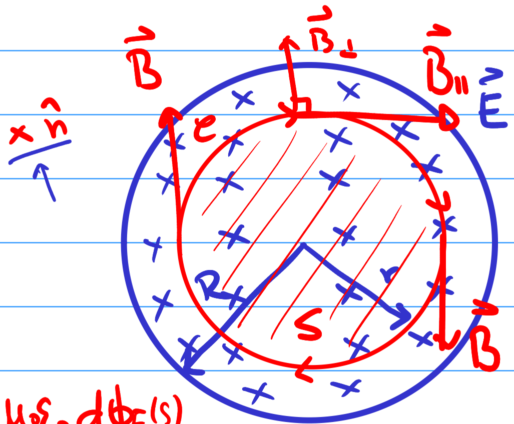
$\phi_B(S) = \pi R^2 B(t)$ $\hat{n}$ es $\times$

$\vec{E} / \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\mathcal{E}_{ind}} = -\dfrac{d\phi_B(S)}{dt}$

$\vec{E}$ es tangencial
x simetría

$E 2\pi R = -\pi R^2 \dfrac{dB}{dt} \Rightarrow \boxed{E = -\dfrac{R}{2}\dot{B}}$ Faraday

Ahora:



$\vec{E}$ uniforme, $\vec{E}(t)$

Campo $\vec{B}(\vec{r})$?

$\phi_E(S) = \pi r^2 E(t)$ $r<R$

$\phi_E(S) = \pi R^2 E(t)$ $r>R$

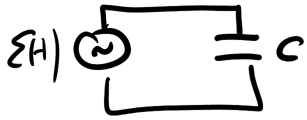
Tomo $\mathcal{C}$ y la recorro según $\hat{n}$

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cancel{I_{enc}} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d\phi_E(S)}{dt}$

$r<R$: $B 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d}{dt}(\pi r^2 E(t)) \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2}\dot{E}}$ es tangencial

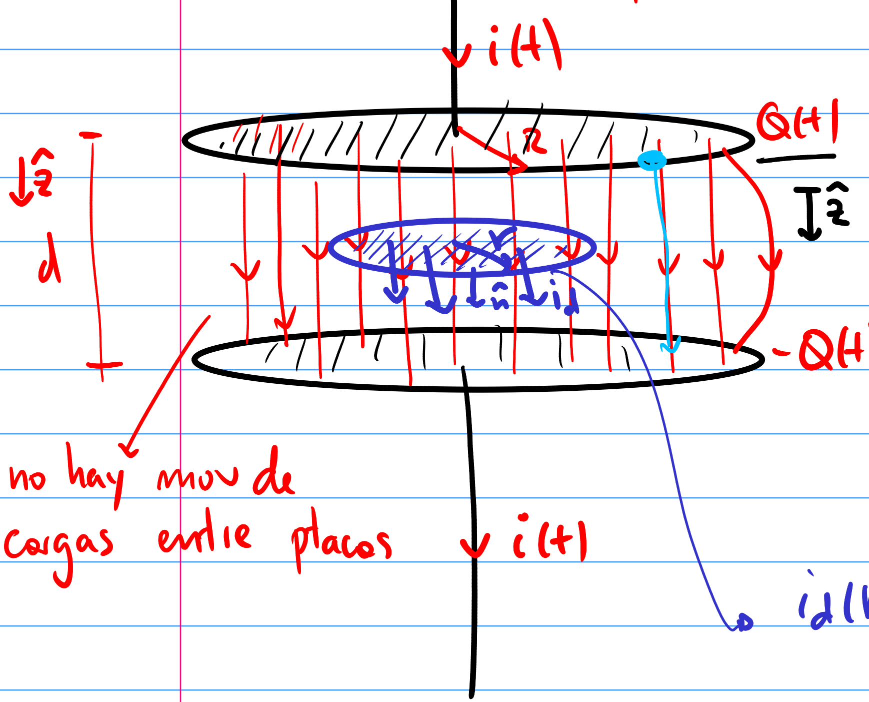
$r>R$: $B 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d}{dt}(\pi R^2 E(t)) \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\dot{E}}$ es tangencial

Corriente de desplazamiento



$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E(S)}{dt}$$

Capacitor placas || circulares



Conectado a $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

$$\boxed{\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{z}}$$

$Q(t) = \varepsilon(t)\,C$

Con $i(t) = \dot{Q}(t)$

$$i_d(r,t) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E(S)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E(t))$$

$$i_d(r,t) = \varepsilon_0 \pi r^2 \dot{E} = \cancel{\varepsilon_0}\cancel{\pi} r^2 \frac{\dot{Q}}{\cancel{\pi} R^2}\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

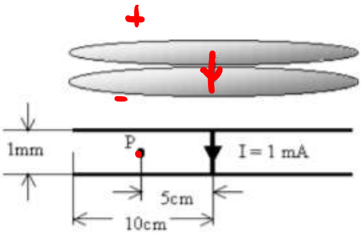
$$\boxed{i_d(r,t) = \frac{r^2}{R^2}\, i(t)}$$

Para $r = R$: $\boxed{i_d(r,t) = i(t)}$

i_d refuerza idea que la corriente tiene continuidad $\Rightarrow$ no salta la placa

Ejercicios

Ejercicio 7 (examen FG2 febrero 2003). Un capacitor de placas circulares, coaxiales y paralelas de radio $R = 10cm$ y separación $d = 1mm$ está siendo descargado a través un alambre que pasa de una placa a la otra a lo largo del eje de simetría (vea figura). Si en un cierto instante la corriente en el alambre es de $i = 1mA$ ¿cuál es (en ese instante) la magnitud del campo magnético producido en un punto P equidistante de ambas placas a $5cm$ del eje? (Se pueden despreciar los efectos de borde y tomar el campo eléctrico entre las placas como uniforme, aunque variable en el tiempo).

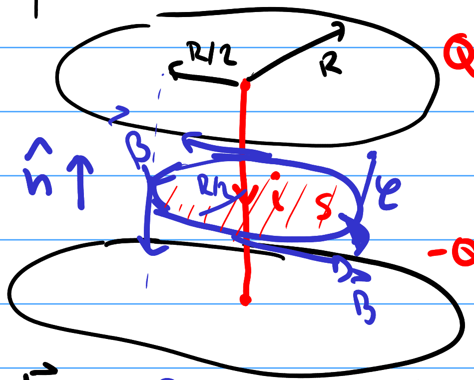


$i = -\dot{Q}$

¿$\vec{B}$?

Ley Amperè - Maxwell

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E(S)}{dt}$$

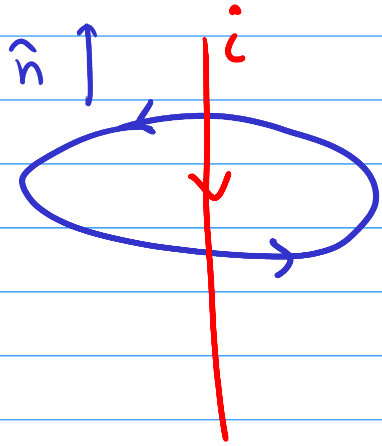


$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E(S)}{dt}$$

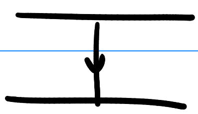
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\, 2\pi \cdot \frac{R}{2}$$

$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel}$

$i_{enc} = -i = -(-\dot{Q}) = \dot{Q}$

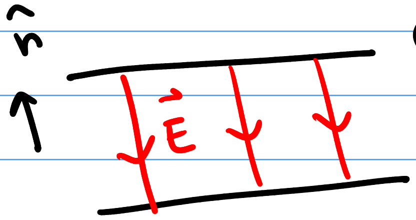


$\mu_0\, i_{enc} = \mu_0(-i) = \mu_0(+\dot{Q})$



$i = -\dot{Q}$

$Q \downarrow \Rightarrow \dot{Q} < 0 \qquad i = -\dot{Q}$



$$\vec{E} = (-\hat{n})\, \frac{Q(t)}{\pi R^2} \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E(S) = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, da \qquad -\hat{n}\cdot\hat{n} = -1$$

$$\Phi_E(S) = -\frac{Q(t)}{\cancel{\pi} \cancel{R^2} \varepsilon_0}\, \cancel{\pi}\left(\frac{\cancel{R}}{2}\right)^2 = -\frac{Q(t)}{4\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E(S)}{dt}$$

$$B\, 2\pi \frac{R}{2} = \mu_0 \dot{Q} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{-Q}{4\varepsilon_0}\right)$$

$$B\, \cancel{2}\pi \frac{R}{\cancel{2}} = \mu_0 \dot{Q} + \frac{\mu_0 \cancel{\varepsilon_0}}{4\cancel{\varepsilon_0}}(-\dot{Q})$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0(\dot{Q} - \dot{Q}/4)}{\pi R}}$$

$\dot{Q} = -i = -7\,mA$

$B < 0$

Ondas EM

Ec de Maxwell + Ec Diferenciales + Cálculo III $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2} \end{array}}$$

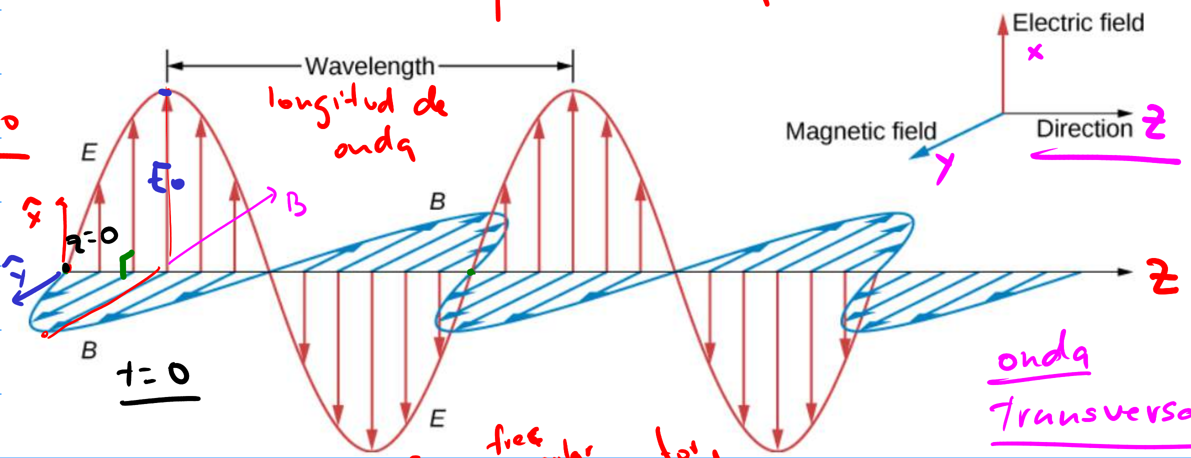
sentido de propagación

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$c \simeq 3\times10^8\,m/s$

Soluciones onda plana - viajera (No existen.... pero casi)

Foto a t dado



onda Transversal

$$\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0}_{\text{amp de } E} \cos(\underbrace{\omega_0}_{\text{frec angular}} t - \underbrace{k}_{\text{vector de onda}} z + \varphi)\,\hat{x}$$

$$\vec{B}(z,t) = B_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\,\hat{y}$$

$\rightarrow$ polarización

dir de propagacion

Si se mueve $z \uparrow$: $\omega t - kz$

Si se mueve $z \downarrow$: $\omega t + kz$

Se cumple:

$$\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

con $\boxed{\omega = 2\pi f \quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}}$, $f = \dfrac{1}{T}$, T: periodo, λ: long de onda

$$\boxed{c = \lambda f = \frac{\omega}{k}}$$

$\lambda = 2\pi / k$, $f = \omega / 2\pi$

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Importante: $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en dir de prop

Fotos $\vec{E} = E_0 \cos(\omega_0 t - kz)\hat{x}$

En el tiempo (t fijo)

λ long de onda

Periodicidad espacial

En el espacio (z fijo)

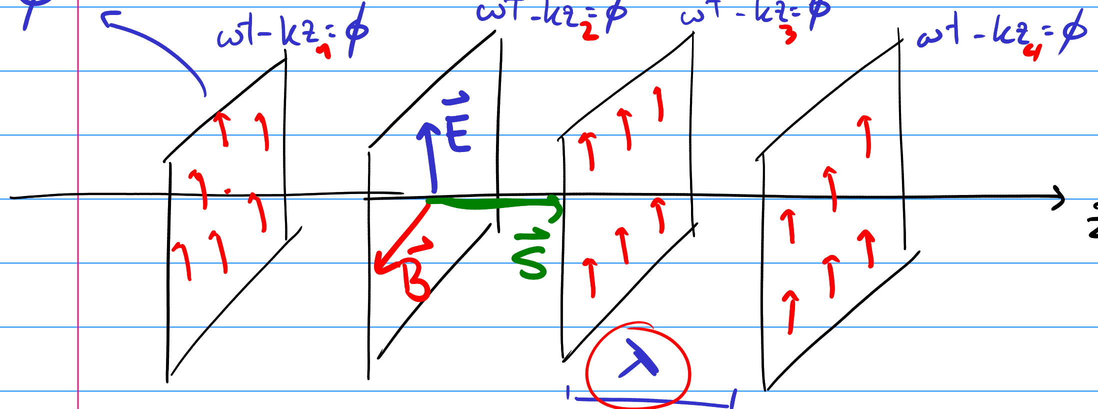
$[f] = Hz$

T Periodo temporal ~~espacial~~

Velocidad de propagación

$$\boxed{c = \lambda \frac{1}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}}$$

fase ϕ



$f(z) = \cos(\omega t_0 - kz)$

$f(z) = cte$

$\cos(\omega t_0 - kz) = 0$

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

$\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Vector de Poynting $\vec{S}$

Ondas EM transmiten:
- → energía (E)
- → momento lineal $\vec{p}$
- → momento angular $\vec{L}$

Cómo definimos dirección del flujo?

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}}$$

$$|\vec{S}|_{max} = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0$$

$\vec{S}$ apunta según prop

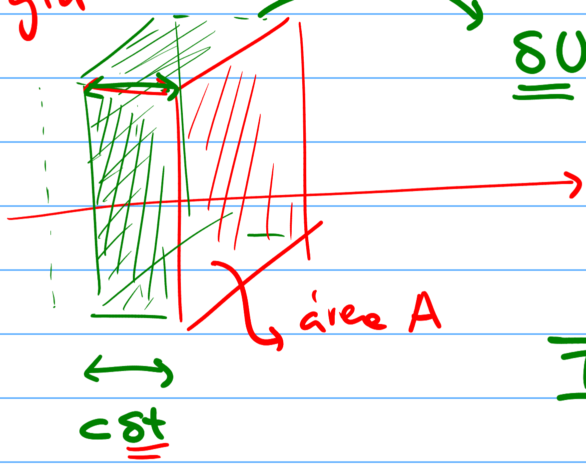
¿Cómo usarlo?

Intensidad de onda EM: (Qué tanta energía por unidad de área y tiempo contiene la onda)

$$u(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(t)}{\mu_0}$$

↓

densidad volumétrica de energía



$$\delta U = u\,\delta V = u\,\overbrace{(A\,c\,\delta t)}^{\delta V}$$

$$I(t) = \frac{\delta U}{A\,\delta t} = u(t)\,c$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}E_0(B_0 c)\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{E_0}{c}\right)\right)c$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{E_0B_0\cancel{\varepsilon_0}}{\cancel{\mu_0\varepsilon_0}} + \frac{1}{2}\frac{E_0B_0}{\mu_0}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{E_0B_0}{\mu_0}}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}|\vec{S}| \Rightarrow \boxed{\bar{I} = \overline{|\vec{S}|} = \frac{E_0B_0}{2\mu_0} = \frac{E^{rms}B^{rms}}{\mu_0}}$$

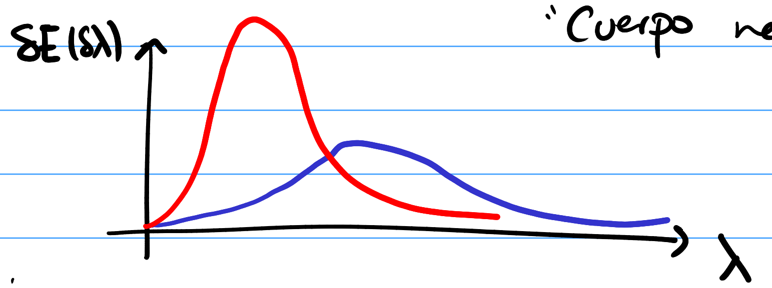
$B_0 = E_0/c$

$\vec{S}$ → apunta según dir de propagación
→ valor medio es intensidad

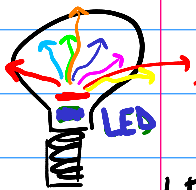
Espectro EM en la vida...

Emite radiación / Absorbe radiación

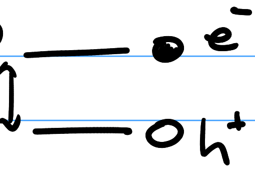
"Cuerpo negro"



Lámpara leds

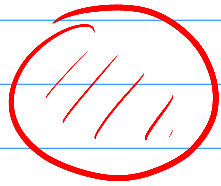


semiconductor



$E = \hbar\omega_0$ (cuántico)

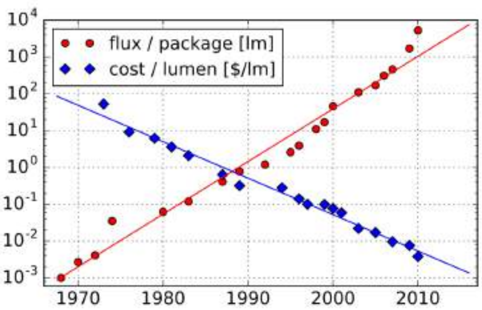
Cuanto ⊕ caliente, λ más corta



Supergigante roja

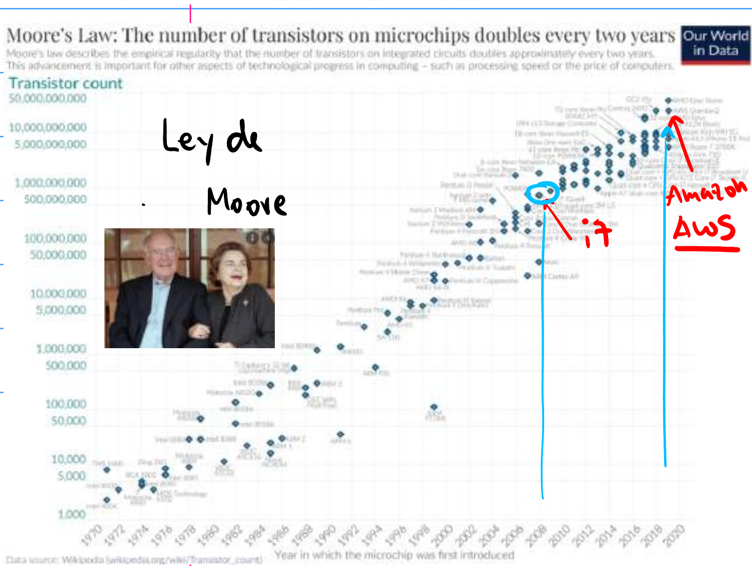
$T \sim 3500\,K$

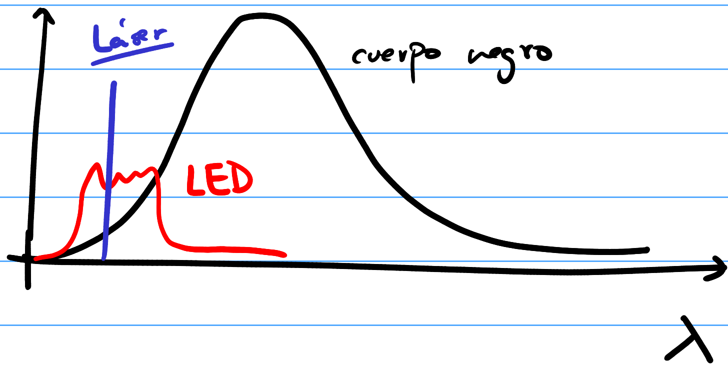
Ley de Haitz



$T \sim 5800\,K$

$\lambda_{pico} \approx 635\,nm$



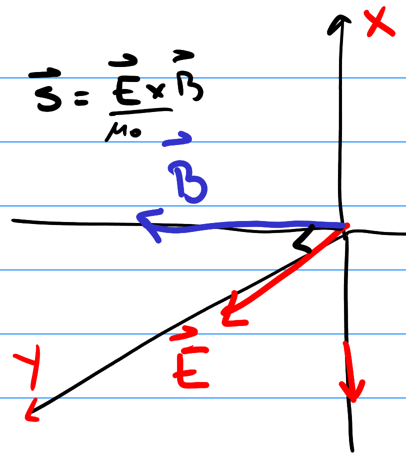


$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}\qquad \boxed{\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}}$$

Ejercicio 3 Una onda electromagnética viaja en dirección negativa a lo largo del eje x, en el vacío. Si el campo eléctrico tiene una amplitud de $E_0 = 10V/m$ y una longitud de onda de $\lambda = 700nm$, escribir el campo magnético.

$E_0 = 10V/m \quad \lambda = 700\,nm \qquad c = \lambda f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$

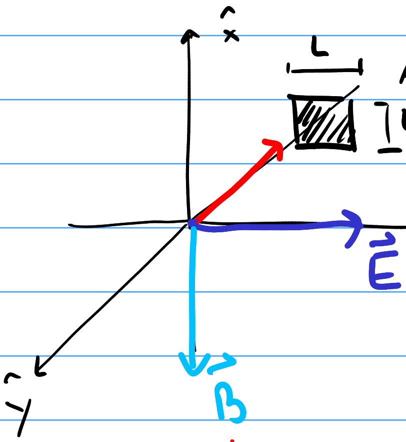
$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$



$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)\,\hat{y}$$

$$\vec{B}(x,t) = \left(\frac{E_0}{c}\right)\cos(\omega t + kx + \varphi)\,(-\hat{z})$$

Ejercicio 6 Una onda electromagnética plana de se propaga en la dirección $-\hat{j}$, de forma tal que los vectores campo eléctrico y campo magnético están polarizados en direcciones paralelas a los ejes coordenados. Un papel fotográfico de sección cuadrada y lado $L = 0,6cm$ se coloca paralelo al plano $(\hat{i},\hat{k})$. El papel es sensible a la intensidad luminosa y necesita de una energía electromagnética total $U = 3\times10^{-3}J$ para que se vuelva totalmente negro. Se mide el tiempo transcurrido desde que se coloca el papel hasta que éste se oscurece totalmente y resulta ser de $5,3s$. ¿Cuáles son los vectores de campo eléctrico y campo magnético de la onda?



$A = L^2,\ L = 6mm$

$\delta t = 5.3s$

$U = 3mJ$

$\vec{E}\times\vec{B}$ apunta en $-\hat{j}$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}E_0\underbrace{B_0}_{E_0/c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}}$$

$$I = \frac{P}{A} = \frac{U}{A\,\delta t} = \frac{3mJ}{L^2\ 5.3s}$$

$$\vec{E}(y,t) = E_0\cos(\omega t + ky)\,\hat{z} \qquad E_0 = cB_0$$
$$\vec{B}(y,t) = -B_0\cos(\omega t + ky)\,\hat{x}$$

ω, k pueden ser cualquiera

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{U}{L^2\delta t} \Rightarrow E_0 \checkmark \quad B_0 \checkmark$$

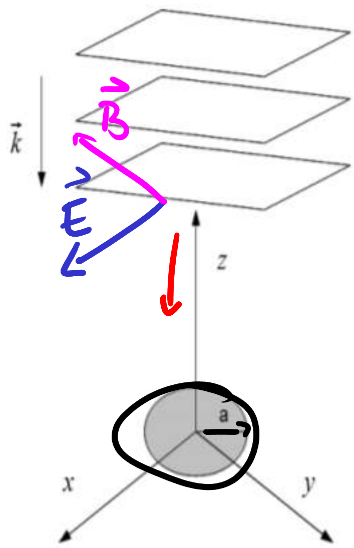
Ejercicio 9 Una onda electromagnética plana monocromática se propaga en el vacío en la dirección de los z negativos de forma tal que el campo eléctrico apunta siempre en la dirección del eje x. En el instante $t = 0$ y en el $z = 0$, el campo eléctrico vale: $\vec{E} = E_0\hat{x}$, siendo E_0 el valor máximo que puede alcanzar. También es conocida la longitud de la onda λ.

a. ¿Cuánto vale la frecuencia angular ω?

b. Escribir la expresión completa para los campos eléctrico y magnético: $\vec{E}(z,t)$ y $\vec{B}(z,t)$. Haga un dibujo de ambos campos en $t = 0$.

c. En el plano xy se coloca una lámina circular de radio $r = a$ conocido que absorbe totalmente a la onda. Halle la potencia media absorbida por la lámina.

d. Suponga que ahora en vez de la lámina se coloca una media esfera totalmente absorbente del mismo radio. Halle ahora la potencia media absorbida por la media esfera y compare con el resultado de la parte c).



a) $\omega = ck = c\dfrac{2\pi}{\lambda}$

se prop en z negativos

b) $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi)\hat{x}$

$\vec{E}(z=0, t=0) = E_0\hat{x} = E_0\cos(0+0+\varphi)\hat{x}$

$\cos\varphi = 1$
$\varphi = 0$

$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t + kz)\hat{x}$

Qué pasa si $E(z=0, t=0) = 0$?

$\cos(\omega t + kz) \longrightarrow \sin(\omega t + kz)$

$\vec{B}(z,t) = B_0\cos(\omega t + kz)(-\hat{y})$

$B_0 = E_0/c$

$\overline{P}_{abs} = \overline{P}_{incidente} = \dfrac{U}{\delta t} = \overline{I}\,\overbrace{A}^{\pi a^2}$

$\overline{I} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}E_0\overbrace{B_0}^{E_0/c} = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

$$\boxed{\overline{P}_{abs} = \pi a^2\dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}}$$