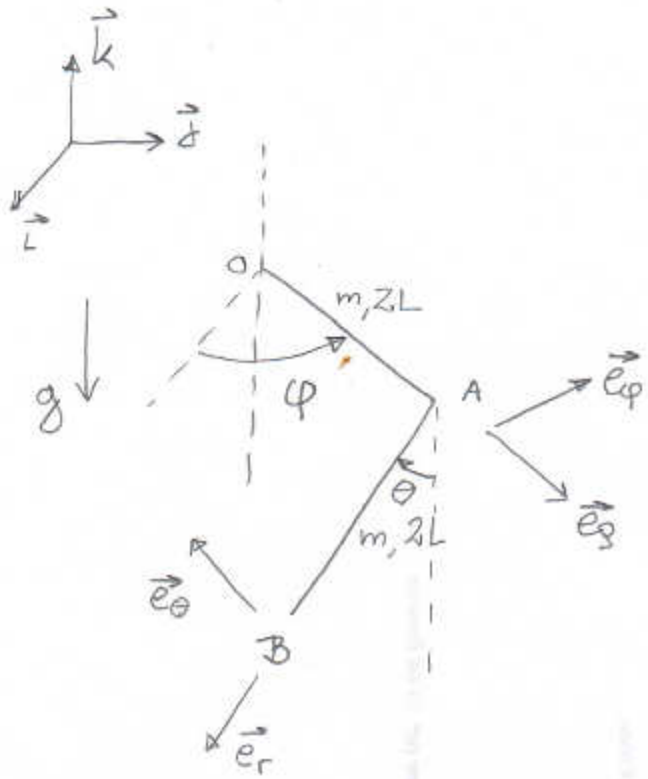
Ejercicio VIII . 9



$\vec{M}_O^{(react)} \cdot \vec{k} = 0$

$\vec{M}_O^{(int)} \cdot \vec{e}_\rho = 0$

parte a:

O es fijo $(\dot{O} = \phi)$

$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)}$

$\dot{\vec{L}}_O \cdot \vec{k} = \vec{M}_O^{(ext)} \cdot \vec{k}$

$\vec{M}_O^{(ext)} = \vec{M}_O^{(react)} + \vec{M}_O^{(peso)}$

$\vec{M}_O^{(react)} \cdot \vec{k} = 0$ porque articulación en O es cilíndrica y lisa

$\vec{M}_O^{(peso)} = (G_{OA} - O) \wedge (-mg\vec{k}) + (G_{AB} - O) \wedge (-mg\vec{k})$

El momento de ambos pesos es perpendicular a $\vec{k} \Rightarrow$

$\vec{M}_O^{(peso)} \cdot \vec{k} = 0$

Las únicas fuerzas externas son el peso y la reacción en O.

$\Rightarrow \vec{M}_O^{(ext)} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}}_O \cdot \vec{k} = 0$

$(\vec{L}_O \cdot \vec{k})^\circ = \dot{\vec{L}}_O \cdot \vec{k}$ porque $\vec{k}$ es fijo $\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O \cdot \vec{k} = cte}$

Si el sistema es conservativo se conservará la energía mecánica. Vamos a estudiar las fuerzas del sistema para ver si son conservativas o de potencia nula:

1) Reacción externa en O: $P^{(react)} = \vec{R}^{(react)} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^{(react)} \cdot \vec{\omega}$

Esta fuerza actúa sobre la barra OA $\Rightarrow \vec{v}_O$ y $\vec{\omega}$ deben ser los de la barra OA:

$\vec{v}_O^{\,OA} = 0$ porque el extremo de la barra es fijo

$\vec{\omega}^{\,OA} = \dot{\varphi}\vec{k} \Rightarrow P^{(react)} = \dot{\varphi}\, \vec{M}_O^{(react)} \cdot \vec{k} = 0$

Esa reacción es de potencia nula

2) Peso: conservativo $U_g = \underbrace{mg z_{G_{OA}}}_{cte} + mg z_{G_{AB}}$

$z_{G_{AB}} = -L\cos\theta$

$\Rightarrow U_g = -mgL\cos\theta$

3) Fuerzas internas de cada barra: son de potencia nula por ser las barras rígidas.

4) Reacción interna en A: por acción y reacción las fuerzas que actúan sobre OA son iguales y opuestas a las que actúan sobre AB

$$P^{(\text{reacc en }A)} = \vec{R}^{(A)} \cdot \vec{v}_A^{\,OA} + \vec{M}_A^{(A)} \vec{\omega}^{\,OA} - \vec{R}^{(A)} \cdot \vec{v}_A^{\,(AB)} - \vec{M}_A^{(A)} \vec{\omega}^{\,AB}$$

$\vec{v}_A^{\,OA} = \vec{v}_A^{\,AB}$ porque las barras están unidas por la articulación cilíndrica en A.

$$\Rightarrow P^{(\text{reacc en }A)} = \vec{M}_A^{(A)} \cdot \left(\vec{\omega}^{\,OA} - \vec{\omega}^{\,AB}\right)$$

$$\vec{\omega}^{\,AB} = \dot{\varphi}\vec{k} - \dot{\theta}\vec{e}_\xi$$

$\Rightarrow P^{(\text{reacc en }A)} = -\dot{\theta}\vec{M}_A^{(A)} \cdot \vec{e}_\xi = 0$ por ser la articulación en A cilíndrica lisa

Entonces el sistema es conservativo $\Rightarrow \boxed{T + U = E = cte}$

parte b: $\vec{L}_O = \vec{L}_O^{\,OA} + \vec{L}_O^{\,AB}$

$\vec{L}_O^{\,OA} = \mathbb{I}_O^{OA}\vec{\omega}^{\,OA}$ porque $\vec{v}_O^{\,OA} = 0$

$\vec{L}_O^{\,OA} = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_O^{OA}\vec{k} = \dot{\varphi}\, I_{O,k}^{OA}\vec{k}$ porque $\vec{k}$ es eje principal de la barra OA (por ser $\perp$ al plano de la misma)

$$I_{O,k}^{OA} = \underbrace{I_{G,k}^{OA}}_{=\frac{m(2L)^2}{12} = \frac{mL^2}{3}} + m\underbrace{d^2_{O\vec{k},G}}_{=L^2} = \frac{4mL^2}{3}$$

$$\vec{L}_O^{\,OA} = \frac{4mL^2}{3}\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\vec{L}_O^{\,AB} = \vec{L}_A^{\,AB} + m\vec{v}_G^{\,AB} \wedge (O - A)$$

$$\vec{L}_A^{\,AB} = m\left(\vec{r}_{G_{AB}} - \vec{r}_A\right) \wedge \vec{v}_A^{\,AB} + \mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega}^{\,AB}$$

$$\vec{r}_{G_{AB}} - \vec{r}_A = L\vec{e}_r$$

$$\vec{v}_A^{\,AB} = 2L\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$m(\vec{r}_{G_{AB}} - \vec{r}_A) \wedge \vec{v}_A^{\,AB} = mL\vec{e}_r \wedge 2L\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = 2mL^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_r = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varphi - \cos\theta\,\vec{k} \Rightarrow \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi = -\cos\theta\,\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\xi} = \cos\theta\,\vec{e}_\xi$$

$$m(\vec{r}_{G_{AB}} - \vec{r}_A) \wedge \vec{v}_A^{\,AB} = 2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\xi$$

$$\mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega}^{AB} = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_A^{AB}\vec{k} - \dot{\theta}\,\underbrace{\mathbb{I}_A^{AB}\vec{e}_\xi}_{I^{AB}_{A\vec{e}_\xi}\vec{e}_\xi}$$

$I^{AB}_{A\vec{e}_\xi}\vec{e}_\xi$ porque $\vec{e}_\xi$ es eje principal por ser $\perp$ al plano de la barra

$$'' \quad \frac{4mL^2}{3}$$

$$\vec{k} = -\cos\theta\,\vec{e}_r + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta$$

$\vec{e}_r$ y $\vec{e}_\theta$ también son ejes principales de AB ($\vec{e}_\theta$ por ser $\perp$ al plano de la barra y $\vec{e}_r$ por ser eje de simetría)

$$I^{AB}_{A,\vec{e}_r} = 0 \;;\; I^{AB}_{A,\vec{e}_\theta} = \frac{4mL^2}{3}$$

$$\mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega}^{AB} = \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}\,\frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\xi$$

$$\vec{L}_A^{AB} = 2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\xi - \frac{4mL^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{e}_\xi + \frac{4mL^2}{3}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}_G^{AB} = \vec{V}_A^{AB} + \vec{\omega}^{AB} \wedge (G_{AB} - A) = 2L\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (\dot{\varphi}\vec{k} - \dot{\theta}\vec{e}_\xi) \wedge L\vec{e}_r =$$

$$= 2L\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + L\dot{\varphi}\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{e}_r}_{\operatorname{sen}\theta\,\underbrace{\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_r}_{\vec{e}_\xi}} - L\dot{\theta}\underbrace{\vec{e}_\xi\wedge\vec{e}_r}_{-\vec{e}_\theta}$$

$$-2L\vec{e}_\xi$$

$$m\vec{V}_G^{AB} \wedge (O - A) = -4mL^2\dot{\varphi}\underbrace{\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_\xi}_{-\vec{k}} + m2L^2\dot{\theta}\underbrace{\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_\xi}_{-\vec{e}_r}$$

$$\vec{L}_O^{AB} = 2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \frac{4mL^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho + \frac{4mL^2}{3}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\theta$$
$$+ 4mL^2\dot{\varphi}\,\vec{k} + 2mL^2\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O\cdot\vec{k} = \frac{4mL^2}{3}\dot{\varphi} + \frac{4mL^2}{3}\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi} + 4mL^2\dot{\varphi} - 2mL^2\dot{\theta}\cos\theta =$$

$$\boxed{\vec{L}_O\cdot\vec{k} = \frac{4mL^2}{3}\dot{\varphi}\left(4+\operatorname{sen}^2\theta\right) - 2mL^2\dot{\theta}\cos\theta}$$

$$T = T^{OA} + T^{AB}$$

$$T^{OA} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{OA}\cdot\mathbb{I}_O^{OA}\vec{\omega}^{OA} \text{ porque } \vec{v}_O^{OA} = 0$$

$$T^{OA} = \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

$$T^{AB} = \frac{1}{2}m\underbrace{\vec{v}_A^{\,2}}_{4L^2\dot{\varphi}^2} + m\vec{v}_A\cdot\left[\vec{\omega}^{AB}\wedge\left(\vec{r}_{G_{AB}}-\vec{r}_A\right)\right] + \frac{1}{2}\vec{\omega}^{AB}\cdot\mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega}^{AB}.$$

$$\vec{\omega}^{AB}\wedge\left(\vec{r}_{G_{AB}}-\vec{r}_A\right) = \left(\dot{\varphi}\vec{k}-\dot{\theta}\vec{e}_\rho\right)\wedge L\vec{e}_r = L\dot{\varphi}\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{e}_r}_{\operatorname{sen}\theta\,\underbrace{\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_r}_{\vec{e}_\rho}} - L\dot{\theta}\underbrace{\vec{e}_\rho\wedge\vec{e}_r}_{-\vec{e}_\theta}$$

$$m\vec{v}_A\cdot\left[\vec{\omega}^{AB}\wedge\left(\vec{r}_{G_{AB}}-\vec{r}_A\right)\right] = 2L\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\cdot\left[L\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\rho + L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right] =$$
$$= 2L^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\left(-\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}^{AB}\cdot\mathbb{I}_A^{AB}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}\vec{k}-\dot{\theta}\vec{e}_\rho\right)\cdot\left(\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}\frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\rho\right) =$$
$$= \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$T^{AB} = 2mL^2\dot{\varphi}^2 - 2mL^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2mL^2\dot{\theta}^2}{3}$$

$$\boxed{T = \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\left(4+\operatorname{sen}^2\theta\right) - 2mL^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2}$$

Verificación:

$$\vec{L}_O^{AB} = \vec{L}_G^{AB} + m\vec{v}_G^{AB} \wedge (O - G_{AB})$$

$$\vec{L}_G^{AB} = \mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{\omega}^{AB} = \dot{\varphi}\,\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{k} - \dot{\theta}\,\underbrace{\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{e}_\varrho}_{\frac{mL^2}{3}\vec{e}_\varrho}$$

$$\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{k} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{e}_\theta = \frac{mL^2}{3}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_G^{AB} = \frac{mL^2}{3}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta - \frac{mL^2}{3}\vec{e}_\varrho\,\dot{\theta}$$

$$m\vec{v}_G^{AB} \wedge (O - G_{AB}) = m\vec{v}_G^{AB} \wedge (O - A) + m\vec{v}_G^{AB} \wedge (A - G_{AB})$$

$$m\vec{v}_G^{AB} \wedge \underbrace{(A - G_{AB})}_{-L\vec{e}_r} = m\left(2L\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + L\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\varrho + L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) \wedge \left(-L\vec{e}_r\right)$$

$$= -2mL^2\dot{\varphi}\,\underbrace{\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r}_{-\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \wedge \vec{k} = -\cos\theta\,\vec{e}_\varrho} + mL^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta - mL^2\dot{\theta}\,\vec{e}_\varrho$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O^{AB} = \frac{4mL^2}{3}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta - \frac{4mL^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{e}_\varrho + 2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varrho$$
$$+ 4mL^2\dot{\varphi}\,\vec{k} + 2mL^2\dot{\theta}\,\vec{e}_r \quad \checkmark$$

Es el mismo resultado de antes

$$T^{AB} = \frac{1}{2}m\vec{v}_{G_{AB}}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}^{AB}\cdot\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{\omega}^{AB}$$

$$\vec{v}_G^{AB\,2} = 4L^2\dot{\varphi}^2 + 4L^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\,\underbrace{\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\theta}_{-\cos\theta} + L^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + L^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}^{AB}\cdot\mathbb{I}_{G_{AB}}^{AB}\,\vec{\omega}^{AB} = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}\vec{k} - \dot{\theta}\vec{e}_\varrho\right)\cdot\left(\frac{mL^2}{3}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_\theta - \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{e}_\varrho\right) =$$
$$= \frac{mL^2}{6}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$T^{AB} = 2mL^2\dot{\varphi}^2 - 2mL^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad \checkmark$$

También es lo mismo de antes

parte c: $\dot{\theta}(0)=\dot{\varphi}(0)=0$

$$\theta(0)=\frac{\pi}{2}$$

$\dot{\varphi}_f$ cuando $\theta=0$

$$\frac{4mL^2}{3}\dot{\varphi}_f\cdot 4-2mL^2\dot{\theta}_f=0 \Rightarrow \dot{\theta}_f=\frac{8}{3}\dot{\varphi}_f$$

$$\frac{2mL^2}{3}\dot{\varphi}_f^2\cdot 4-2mL^2\dot{\varphi}_f\dot{\theta}_f+\frac{2mL^2}{3}\dot{\theta}_f^2-mgL=0$$

$$\frac{8}{3}\dot{\varphi}_f^2-2\dot{\varphi}_f\dot{\theta}_f+\frac{2\dot{\theta}_f^2}{3}=\frac{g}{L}$$

$$\underbrace{\frac{8}{3}\dot{\varphi}_f^2-\frac{16\dot{\varphi}_f^2}{3}}+\frac{128}{27}\dot{\varphi}_f^2=\frac{g}{L}$$

$$-\frac{8}{3}\dot{\varphi}_f^2=-\frac{72}{9}\dot{\varphi}_f^2$$

$$\begin{array}{r}128\\-72\\\hline 56\end{array} \Rightarrow \frac{56}{27}\dot{\varphi}_f^2=\frac{g}{L}\Rightarrow \dot{\varphi}_f^2=\frac{27}{56}\frac{g}{L}$$

$27=3\times3\times3$

$56=28\times2=2\times2\times2\times7$

$$\boxed{\dot{\varphi}_f=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3g}{14L}}}$$

El signo de $-$ es porque $\dot{\varphi}_f$ tiene el mismo signo que $\dot{\theta}_f$ (por la conservación del momento angular) y θ viene de $\frac{\pi}{2}$ a 0, o sea que viene decreciendo. Si hubiésemos partido de $\theta(0)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\dot{\varphi}_f>0$ $\left(\dot{\varphi}_f=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3g}{14L}}\right)$.