

Práctico 9

Completitud del Cálculo de Predicados

Nota general: En todos los casos en que se hace referencia a fórmulas se considera que son *sentencias*.

Ejercicio 1

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; -; 0 \rangle$ con un símbolo de predicado P (unario). Indique cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{\forall x P(x), \neg \exists x \neg P(x)\} & \Gamma_3 &= \{\exists x (P(x) \wedge \neg P(x))\} \\ \Gamma_2 &= \{\exists x P(x), \forall x \neg P(x)\} & \Gamma_4 &= \{\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)\}\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sean T_1 y T_2 dos teorías arbitrarias. Muestre que:

- $T_1 \cap T_2$ es una teoría
- $\text{SENT} \setminus T_1$ no es una teoría
- $T_1 \cup T_2$ no es necesariamente una teoría

Ejercicio 3

Sea $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de teorías linealmente ordenadas por inclusión. Demuestre las siguientes propiedades:

- $T = \bigcup \{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una teoría que extiende cada T_i .
- Si cada T_i es consistente, entonces T es consistente.

Ejercicio 4

Recuerde las siguientes definiciones:

$\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \Gamma\}$, siendo Γ un conjunto de sentencias.

$\text{Th}(\kappa) = \{\alpha \mid (\forall \mathcal{M} \in \kappa) \mathcal{M} \models \alpha\}$, siendo κ un conjunto de estructuras.

Demuestre las siguientes propiedades:

- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$.
- Si $\kappa_1 \subseteq \kappa_2$ entonces $\text{Th}(\kappa_2) \subseteq \text{Th}(\kappa_1)$.
- $\text{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \text{Mod}(\Gamma) \cap \text{Mod}(\Delta)$.
- $\text{Th}(\kappa_1 \cup \kappa_2) = \text{Th}(\kappa_1) \cap \text{Th}(\kappa_2)$.
- $\kappa \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$ sii $\Gamma \subseteq \text{Th}(\kappa)$.
- $\text{Mod}(\Gamma) \cup \text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma \cap \Delta)$.
- $\text{Th}(\kappa_1) \cup \text{Th}(\kappa_2) \subseteq \text{Th}(\kappa_1 \cap \kappa_2)$.

Muestre además que en f. y g. la relación $\subseteq$ no puede reemplazarse por $=$.

Ejercicio 5

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad. Sea $\mathbb{E}$ el conjunto de todas las estructuras adecuadas para el tipo de $\mathcal{L}$. Identifique y determine los siguientes conjuntos:

- $Mod(\emptyset)$
- $Mod(\mathbf{SENT})$
- $Th(\emptyset)$
- $Th(\mathbb{E})$
- $CONS(\emptyset)$
- $CONS(\mathbf{SENT})$

Ejercicio 6

Demuestre que:

- $\Gamma \subseteq Th(Mod(\Gamma))$.
- $k \subseteq Mod(Th(k))$.
- $Th(Mod(\Gamma))$ es una teoría con conjunto de axiomas Γ .
- Si $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ entonces $Mod(\Gamma) = Mod(\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\})$.

Ejercicio 7

Considere el *teorema de compacidad* para la lógica de predicados:

“ Γ tiene modelo sii todo subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tiene modelo.”

Dada la siguiente propiedad: Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Delta \models \varphi$ para un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$.

- Demuestre la propiedad usando completitud.
- Demuestre la propiedad usando compacidad en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Ejercicio 8

- Demuestre que si T_1 y T_2 son subconjuntos de $\mathbf{SENT}$ tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $T_1 \models \varphi$ y $T_2 \models \neg\varphi$.
- Demuestre que si T_1 y T_2 son teorías tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $\varphi \in T_1$ y $\neg\varphi \in T_2$.

Ejercicio 9

Sean $\Gamma \subseteq \mathbf{SENT}$ y $\Delta \subseteq \mathbf{SENT}$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

- Si $Mod(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
- Si $Mod(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
- Si Γ es consistente entonces $Th(Mod(\Gamma))$ es consistente.

Ejercicio 10

- Demuestre que $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal para cualquier estructura $\mathcal{M}$.
- Demuestre que una sentencia α pertenece a todos los conjuntos consistentes maximales si y solo si α es lógicamente válida.

Ejercicio 11

Considere las siguientes sentencias de un lenguaje de primer orden con igualdad y tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$:

1. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(\neg x = y))$.
2. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)f(x) = y)$.
3. $(\exists x)(\neg(\exists y)f(x) = y)$.
4. $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)f(x) = y)$.
- a. Indique cuáles de las sentencias anteriores no está en ningún conjunto consistente maximal. Justifique su respuesta.
- b. Indique cuáles de las sentencias anteriores están en todos los conjuntos consistentes maximales. Justifique su respuesta.
- c. Considere un conjunto consistente maximal Γ que contenga a la fórmula $(\forall x)P(x)$. Indique una pareja tomada de las fórmulas anteriores (excluyendo las seleccionadas en la parte a.) que no pueda pertenecer a Γ simultáneamente.

Ejercicio 12

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden de tipo $\langle 1; -; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P , y símbolo de constante c . Considere además el lenguaje $\mathcal{L}'$, el cual es una extensión de $\mathcal{L}$ a la cual se le agrega el predicado unario Q . Sea $T \subseteq \text{SENT}_{\mathcal{L}}$ el siguiente conjunto:

$$T = \text{CONS}(\{\forall x P(x)\})$$

Considere además los siguientes subconjuntos de $\text{SENT}_{\mathcal{L}'}$:

$$T_1 = \text{CONS}(\{\forall x(Q(x) \wedge \neg Q(x))\})$$

$$T_2 = \text{CONS}(\{Q(c) \rightarrow \forall x P(x)\})$$

- a. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones de T . Justifique.
- b. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones conservativas de T . Justifique.
- c. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son conjuntos de axiomas para T . Justifique.

Ejercicio 13

- a. Sean $\Gamma \subset \text{SENT}$ y $\varphi \in \text{SENT}$ tales que:

- 1) $(\exists \mathcal{M}_1 \in \text{Mod}(\Gamma)) \mathcal{M}_1 \not\models \varphi$
- 2) $(\exists \mathcal{M}_2 \in \text{Mod}(\Gamma)) \mathcal{M}_2 \not\models \neg \varphi$

Pruebe que $\text{CONS}(\Gamma)$ no es consistente maximal.

- b. Considere la fórmula $\psi \equiv (\forall x_1)(\forall x_2)x_1 = x_2$.
 - I. Demuestre que: $\text{Mod}(\{\psi\}) = \{\mathcal{M} / \#(|\mathcal{M}|) = 1\}$ donde $\#$ es la cardinalidad del conjunto.
 - II. Considere un lenguaje $\mathcal{L}_1$ de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0 \rangle$.
Pruebe que $\text{CONS}(\{\psi\})$ **no es** consistente maximal.
 - III. Considere un lenguaje $\mathcal{L}_2$ de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; -; 0 \rangle$ solo con los conectivos $\forall, \wedge, \neg, \perp$:
 1. Demuestre la siguiente propiedad: $(\forall \varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}_2})(\psi \vdash \varphi \text{ o } \psi \vdash \neg \varphi)$.
 2. Pruebe que $\text{CONS}(\{\psi\})$ **es** consistente maximal.