Práctico 9

Completitud del Cálculo de Predicados

Nota general: En todos los casos en que se hace referencia a fórmulas se considera que son *sentencias*.

Ejercicio 1

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; -; 0\rangle$ con un símbolo de predicado P (unario). Indique cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

$$\Gamma_1 = \{\forall x P(x), \neg\exists x \neg P(x)\} \quad \Gamma_3 = \{\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))\}$$
$$\Gamma_2 = \{\exists x P(x), \forall x \neg P(x)\} \quad \Gamma_4 = \{\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)\}$$

Ejercicio 2

Sean T_1 y T_2 dos teorías arbitrarias. Muestre que:

a. $T_1 \cap T_2$ es una teoría
b. $\texttt{SENT} \setminus T_1$ no es una teoría
c. $T_1 \cup T_2$ no es necesariamente una teoría

Ejercicio 3

Sea $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de teorías linealmente ordenadas por inclusión. Demuestre las siguientes propiedades:

a. $T = \bigcup \{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una teoría que extiende cada T_i.
b. Si cada T_i es consistente, entonces T es consistente.

Ejercicio 4

Recuerde las siguientes definiciones:

$Mod(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \Gamma\}$, siendo Γ un conjunto de sentencias.

$Th(\kappa) = \left\{\alpha \mid (\bar{\forall}\mathcal{M} \in \kappa)\mathcal{M} \models \alpha\right\}$, siendo k un conjunto de estructuras.

Demuestre las siguientes propiedades:

a. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.
b. Si $k_1 \subseteq k_2$ entonces $Th(k_2) \subseteq Th(k_1)$.
c. $Mod(\Gamma \cup \Delta) = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta)$.
d. $Th(k_1 \cup k_2) = Th(k_1) \cap Th(k_2)$.
e. $k \subseteq Mod(\Gamma)$ sii $\Gamma \subseteq Th(k)$.
f. $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma \cap \Delta)$.
g. $Th(k_1) \cup Th(k_2) \subseteq Th(k_1 \cap k_2)$.

Muestre además que en f. y g. la relación $\subseteq$ no puede reemplazarse por $=$.

Ejercicio 5

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad. Sea $\mathbb{E}$ el conjunto de todas las estructuras adecuadas para el tipo de $\mathcal{L}$. Identifique y determine los siguientes conjuntos:

a. $Mod(\emptyset)$
b. $Mod(\texttt{SENT})$
c. $Th(\emptyset)$
d. $Th(\mathbb{E})$
e. $\textsc{Cons}(\emptyset)$
f. $\textsc{Cons}(\texttt{SENT})$

Ejercicio 6

Demuestre que:

a. $\Gamma \subseteq Th(Mod(\Gamma))$.
b. $k \subseteq Mod(Th(k))$.
c. $Th(Mod(\Gamma))$ es una teoría con conjunto de axiomas Γ.
d. Si $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ entonces $Mod(\Gamma) = Mod(\{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\})$.

Ejercicio 7

Considere el *teorema de compacidad* para la lógica de predicados:

> *"Γ tiene modelo sii todo subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tiene modelo."*

Dada la siguiente propiedad: Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Delta \models \varphi$ para un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$.

a. Demuestre la propiedad usando completitud.
b. Demuestre la propiedad usando compacidad en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Ejercicio 8

a. Demuestre que si T_1 y T_2 son subconjuntos de $\texttt{SENT}$ tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $T_1 \models \varphi$ y $T_2 \models \neg\varphi$.
b. Demuestre que si T_1 y T_2 son teorías tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $\varphi \in T_1$ y $\neg\varphi \in T_2$.

Ejercicio 9

Sean $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$ y $\Delta \subseteq \texttt{SENT}$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

a. Si $Mod(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
b. Si $Mod(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
c. Si Γ es consistente entonces $Th(Mod(\Gamma))$ es consistente.

Ejercicio 10

a. Demuestre que $Th(\{\mathcal{M}\})$ es consistente maximal para cualquier estructura $\mathcal{M}$.
b. Demuestre que una sentencia α pertenece a todos los conjuntos consistentes maximales si y solo si α es logicamente válida.

Ejercicio 11

Considere las siguientes sentencias de un lenguaje de primer orden con igualdad y tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$:

1. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(\neg x =' y))$.
2. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y) f(x) =' y)$.
3. $(\exists x)(\neg(\exists y) f(x) =' y)$.
4. $(\forall x)(P(x) \to (\forall y) f(x) =' y)$.

a. Indique cuáles de las sentencias anteriores no está en ningún conjunto consistente maximal. Justifique su respuesta.
b. Indique cuáles de las sentencias anteriores están en todos los conjuntos consistentes maximales. Justifique su respuesta.
c. Considere un conjunto consistente maximal Γ que contenga a la fórmula $(\forall x)P(x)$. Indique una pareja tomada de las fórmulas anteriores (excluyendo las seleccionadas en la parte a.) que no pueda pertenecer a Γ simultáneamente.

Ejercicio 12

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden de tipo $\langle 1; -; 1\rangle$ con símbolo de predicado P, y símbolo de constante c. Considere además el lenguaje $\mathcal{L}'$, el cual es una extensión de $\mathcal{L}$ a la cual se le agrega el predicado unario Q. Sea $T \subseteq \texttt{SENT}_{\mathcal{L}}$ el siguiente conjunto:

$$T = \textsc{Cons}(\{\forall x P(x)\})$$

Considere además los siguientes subconjuntos de $\texttt{SENT}_{\mathcal{L}'}$:

$$T_1 = \textsc{Cons}(\{\forall x(Q(x) \land \neg Q(x))\})$$
$$T_2 = \textsc{Cons}(\{Q(c) \to \forall x P(x)\})$$

a. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones de T. Justifique.
b. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones conservativas de T. Justifique.
c. Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son conjuntos de axiomas para T. Justifique.

Ejercicio 13

a. Sean $\Gamma \subset SENT$ y $\varphi \in SENT$ tales que:

   1) $(\bar{\exists} \mathcal{M}_1 \in Mod(\Gamma))\mathcal{M}_1 \not\models \varphi$
   2) $(\bar{\exists} \mathcal{M}_2 \in Mod(\Gamma))\mathcal{M}_2 \not\models \neg\varphi$

   Pruebe que $\textsc{Cons}(\Gamma)$ no es consistente maximal.

b. Considere la fórmula $\psi \equiv (\forall x_1)(\forall x_2)x_1 =' x_2$.

   I. Demuestre que: $Mod(\{\psi\}) = \{\mathcal{M} / \#(|\mathcal{M}|) = 1\}$ donde $\#$ es la cardinalidad del conjunto.
   II. Considere un lenguaje $\mathcal{L}_1$ de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$.
   Pruebe que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ **no es** consistente maximal.
   III. Considere un lenguaje $\mathcal{L}_2$ de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle -; -; 0\rangle$ solo con los conectivos $\forall, \land, \neg, \bot$:
      1. Demuestre la siguiente propiedad: $(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{FORM}_{\mathcal{L}_2})(\psi \vdash \varphi \text{ o } \psi \vdash \neg\varphi)$.
      2. Pruebe que $\textsc{Cons}(\{\psi\})$ **es** consistente maximal.