1 Problemas de desarrollo 2

Plano tangente

Consideremos $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un conjunto abierto U del plano que es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ un punto de U. Ya sabemos asociar a su gráfica un plano tangente que cumpla el mismo rol de la recta tangente a la gráfica de la función de un sola variable. Recordemos que dicho plano se define por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\clubsuit$$

La primera observación que debemos hacer si tomamos como ejemplo el elipsoide($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$), es que no existe función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuya gráfica sea esta superficie. Por lo tanto para calcular un plano tangente al elipsoide debemos buscar una función cuya gráfica sea al menos una sección de dicha superficie en el punto. Esto se logra por ejemplo despejando z de la ecuación anterior (como vemos obtenemos dos valores posibles para z uno positivo y otro negativo). ¿Existe una manera de poder hacer el ejercicio y no despejar z? Sí, para ello podemos razonar de la siguinte manera:
Recordemos que el vector $grad f(x_0, y_0)$ es un vector ortogonal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0), dicha propiedad fue discutida en las notas teóricas del curso (Observación Pag. 100). Llevando esta idea una dimensión más arriba, tenemos que la superficie que representa la gráfica de la función $z = f(x, y)$ también la podemos ver como el nivel cero de la función de tres variables $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Entonces, la superficie $z = f(x, y)$ se puede ver como una superficie de nivel (correspondiente al nivel cero) de la función $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, o bien, como la manera en que la gráfica de la función $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ (que vive en el espacio $\mathbb{R}^4$) "atraviesa" el espacio $\mathbb{R}^3$ (identificado como una porción de $\mathbb{R}^4$ correspondiente a aquellos puntos de $\mathbb{R}^4$ cuya última coordenada sea igual a cero).

Así por ejemplo, la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ podemos verla como la superficie de nivel de cero $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$. Más aún, podríamos tener una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$, que no representa (globalmente) la gráfica de alguna función $z = f(x, y)$ y también verla como una superficie de nivel de una función $u = F(x, y, z)$. Este es el caso que se presenta con el elipsoide ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$), el cual no es la gráfica de función $z = f(x.y)$ alguna, pero sí la podemos ver como el nivel cero de la función $F(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$. Así las cosas, si vemos la superficie $z = f(x, y)$ como el nivel cero de la función $F(x, y, z) = z - f(x;, y)$, y recordamos que el gradiente de esta función es un vector perpendicular a cualquier superficie de nivel de ella, concluimos que el vector gradiente

$$grad(F) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$$

debe ser normal a la superficie considerada. En efecto, si calculamos estas

$$grad(F) = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$$

resultado que coincide con $\clubsuit$. Teniendo el vector normal y el punto por donde pasa dicho plano tengente, podemos calcularlo de una manera muy sencilla, sin necesidad de despejar.

Anexo podrán encontrar las superficies cuádricas más importante y algunos detalles de las mismas. Los problemas de esta semana combinan ejercicios de planos tangentes a las superficies cuádricas más importantes.

1 Complete el siguiente cuadro. El objetivo es obtener el plano tangente de las superficies cuádricas en $P = (x_0, y_0, z_0)$ en su forma más simplificada.

Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	Plano tangente a la esfera en P
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Plano tangente al elipsoide en P
Cono	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	Plano tangente al cono en $P \neq (0,0,0)$

2 **Plano tangente y Esferas.**[1]

2.1 Demostrar que el plano $ax + by + cz = d$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ si y solamente si $a^2r^2 + b^2r^2 + c^2r^2 = d^2$.

2.2 Los puntos $A = (2,5,3)$ y $B = (-1,-2,-3)$ son los extremos de un diámetro de una esfera. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a esta esfera en los puntos A y B. ¿Qué interpretación geométrica tiene este resultado?

2.3 Determine la esfera que tenga por planos tangentes a los planos paralelos $x + y + z = 5$ $x + y + z = -3$, sabiendo que el punto $(1,2,2)$ es uno de los puntos de contacto.

Sean S_1 y S_2 superficies y $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto tal que $P \in S_1 \cap S_2$ Diremos que dos superficies son tangentes entre sí en P, si el plano tangente a S_1 en P es igual al plano tangente a S_2 en P. En otras palabras, S_1 y S_2 son tangentes en P si comparten el mismo plano tangente en el punto.

2.4 Demostrar que la esfera y el cono (eliptico) dados por las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{b^2 + a^2}{c})^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$$

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

son tangentes entre sí en los puntos $(0, \pm b, c)$.

Se llama ángulo entre dos superficies en el punto de su intersección al ángulo que forman los planos tangentes a dichas superficies en el punto que se considera. Entonces diremos que dos superficies se cortan ortogonalmente si el ángulo de intersección es recto.

[1] ANIMALES ESFÉRICOS: LA ESFERA es el más uniforme de los cuerpos sólidos, ya que todos los puntos de la superficie equidistan del centro. Por eso y por su facultad de girar alrededor del eje sin cambiar de lugar y sin exceder sus límites, Platón (Timeo, 33) aprobó la decisión del Demiurgo, que dio forma esférica al mundo. Juzgó que el mundo es un ser vivo y en las Leyes (898) afirmó que los planetas y las estrellas también lo son. Dotó, así, de vastos animales esféricos a la zoología fantástica y censuró a los torpes astrónomos que no querían entender que el movimiento circular de los cuerpos celestes era espontáneo y voluntario. (Más de quinientos años después, en Alejandría, Orígenes enseñó que los bienaventurados resucitarían en forma de esferas y entrarían rodando en la eternidad.) En la época del Renacimiento, el concepto del cielo como animal reapareció en Vanini; el neoplatónico Marsilio Ficino habló de los pelos, dientes y huesos de la tierra, y Giordano Bruno sintió que los planetas eran grandes animales tranquilos, de sangre caliente y de hábitos regulares, dotados de razón. A principios del siglo xvii, Kepler discutió con el ocultista inglés Robert Fludd la prioridad de la concepción de la tierra como monstruo viviente, "cuya respiración de ballena, correspondiente al sueño y a la vigilia, produce el flujo y el reflujo del mar". La anatomía, la alimentación, el color, la memoria y la fuerza imaginativa y plástica del monstruo fueron estudiados por Kepler. En el siglo xix, el psicólogo alemán Gustav Theodor Fechner (hombre alabado por William James, en la obra A pluralistic universe) repensó con una suerte de ingenioso candor las ideas anteriores. Quienes no desdeñan la conjetura de que la tierra, nuestra madre, es un organismo, un organismo superior a la planta, al animal y al hombre,pueden examinar las piadosas páginas de su Zend-Avesta. Ahí leerán, por ejemplo, que la figura esférica de la tierra es la del ojo humano, que es la parte más noble de nuestro cuerpo. También,"que si realmente el cielo es la casa de los ángeles, y éstos sin duda son las estrellas, porque no hay otros habitantes del cielo" *Manual de Zoología Fantástica. Jorge Luis Borges y Margarita Guerrero*

2.5 ¿Qué ángulo forman en su intersección el cilindro $x^2+y^2=1$ y la esfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ en el punto $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

2.6 Demuestre que las esferas $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2+z^2=2by$ y $x^2+y^2+z^2=2cz$ se cortan entre sí ortogonalmente.