1 Problema de desarrollo 1

1. Objetivo: Unificar todos los conceptos vistos en la sección de diferenciabilidad.
Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un conjunto abierto U del plano y sea $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ un punto de U. Considere las siguientes afirmaciones:

A. Existe el límite de la función f en $\mathbf{p}$.

B. La función f en continua en $\mathbf{p}$.

C. Existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{p}$.

D. Existen las derivadas direccionales de f en $\mathbf{p}$ en la dirección de cualquier vector unitario $u \in \mathbb{R}^2$.

E. f es diferenciable $\mathbf{p}$.

F. f tiene derivadas parciales continuas en alguna bola B contenida en U con centro $\mathbf{p}$.

Llene el siguiente cuadro, indicando con una V (verdadero) en la línea i y columna j, cuando la afirmación de la línea i implique la afirmación de la columna j y con F(falso) cuando no la implique. Por ejemplo, la afirmación B implica la afirmación A, pero la afirmación A no implica la afirmación C. Para cada uno de los casos, a excepcion de la diagonal del cuadrado, debe justificar su respuesta explicando el razonamiento de la afirmación verdadera o mostrando un (contra)ejemplo para el caso que sea falsa.

	A	B	C	D	E	F
A	V	?	F	?	?	?
B	V	V	?	?	?	?
C	?	?	V	?	?	?
D	?	?	?	V	?	?
E	?	?	?	?	V	?
F	?	?	?	?	?	V

2 Solución

	A	B	C	D	E	F
A	V	F	F	F	F	F
B	V	V	F	F	F	F
C	F	F	V	F	F	F
D	F	F	V	V	F	F
E	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V

Para justificar cada una de las implicaciones consideremos los siguientes hechos:

1. La condición F es la propiedad más fuerte. Recordemos:

1.A Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que las derivadas parciales son funciones continuas en alguna bola B contenida en U con centro $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$.
¿Podemos encontrar condiciones más fuertes? Sí, podemos pedir para la función por ejemplo que tenga derivadas de segundo orden continuas, y en general derivadas de orden n-ésimas continuas. Notemos justamente las hipótesis del teorema de Taylor para funciones de varias variables. Si deseamos mejorar la aproximación polinomial en una vecidad del punto debemos pedir un buen comportamiento(existencia y continudad) a niveles mayores.

2. La condición de diferenciabilidad sobre una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punjto $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ es una de las propiedades más deseadas para una función (pueden ver que implica todas las condiciones a excepción de la afirmación F). Esta buena propiedad garantiza la continuidad en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, la existencia de las derivadas parciales y de las derivadas direccionales en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$(además nos proporciona una fórmula muy fácil para calcular las direccionales en función del vector gradiente y las derivadas parciales). Desde el punto de vista geométrico todas las anteriores propiedades también se pueden traducir: la gráfica de f no tiene saltos ni huecos en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, la superficie es "suave" en la vecidad del punto y lo más importante nos permite aproximar la gráfica de la función por una estructura lineal que es el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Recordemos algunos resultados cuya demostración pueden encontrar en los apuntes teóricos del curso.

2.A Si la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U del plano es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, entonces f es continua en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$.

2.B Si la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U del plano es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ entonces $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ existen.

2.C Si la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U del plano es diferenciable en $\mathbf{p} = (\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$, y sea $\mathbf{v} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ un vector unitario. Entonces:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial v} = v_1 \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3 A. Las derivadas parciales de f son discontinuas en $(0, 0)$. En efecto:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} (2x) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} (2y) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se puede demostrar que las (funciones) derivadas parciales anteriores no tienen límite en $(0, 0)$.

3.B. La función f es diferenciable en $(0, 0)$. En efecto:

Calculemos la expresión que tiene el resto de la función en $(0, 0)$ al aplicar la definición de diferenciabilidad y teniendo en cuenta el valor de las derivadas parciales en $(0, 0)$ calculado en el item anterior.

$$r(h_1, h_2) = (h_1^2 + h_2^2) sen \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Se verifica que:

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

4 Consideremos $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Es una función definida sobre $\mathbb{R}^2$, positiva. Dicha función evidentemente es continua, pues es la composición de un polinomio de dos variabes(continua) y una función de una variable(la función raiz cuadrada) continua. Su gráfica es la parte superior de un cono con vertice en el $(0,0)$ y secciones transversales paralelas al plano XY que se componen de círculos concétricos en el $(0,0)$. Recordemos que esta superficie se puede obtener al revolucionar la curva plana $z = |x|$ o bien $z = |y|$ alrededor del eje z. Dichas curvas que engendran la superficie de revolución que en este caso es el cono, son continuas en todo su dominio pero no derivables en los puntos $x = 0$ o bien $y = 0$. Como era de esperar este mal *mal comportamiento* con respecto a la derivada será heredado por la superficie. Veremos que las derivadas parciales de f en el $(0,0)$ no existen.

Calculando las derivadas por definición en $(0,0)$ (lo hacemos por definición porque al calcular las derivadas usando las reglas de derivación parcial y luego evaluar en $(0,0)$ obtenemos una indeterminación):

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Recordemos que los limites planetados en el cálculo de las derivadas parciales son límites de una variable, en este caso la variable h. Si estudiamos la tendencia a 0 por derecha e izquierda tenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

De donde podemos concluir que el límite no existe. Y por lo tanto la función no tiene derivada parcial con respecto a x. Un argumento análogo nos permite concluir que la derivada con respecto a y tampoco existe.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5.1 La función no tiene límite en $(0,0)$. Podemos calcular el valor del límite sobre algunas trayectorias (Por ejemplo $y = x$, $y = 0$).

5.2 Aplicando la definición de las derivadas parciales, se puede demostrar que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

5.3 Las derivadas direccionales de f existen solamente en las direcciones canónicas. En efecto: Sea v un vector unitario, podemos expresarlo como $v = (cos\phi, sen\phi)$, donde $\phi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0, \pi$ (podemos excluir estos casos pues son precisamente las direcciones canónicas y ya calculamos las derivadas parciales.)

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hcos\phi, hsen\phi)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cos\phi sen\phi}{h}$$

Por las restricciones que tenemos sobre los ángulos vemos que el numerador de la expresión anterior es diferente de cero, lo que nos permite concluir que el limite no existe. Por lo tanto la función no tiene derivadas direccionales en direcciones diferentes a las canónicas.

6. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6.1 La función no tiene límite en $(0,0)$. Podemos calcular el valor del límite sobre algunas trayectorias (Por ejemplo $y=x^2$, $y=0$).

6.2 Aplicando la definición de las derivadas parciales, se puede demostrar que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

6.3 Las derivadas direccionales existen en cualquier dirección. En efecto, por el item anterior, dado un vector unitario $v=(a,b)$ podemos suponer que $a\neq 0$ y $b\neq 0$ y al calcular la derivada direccional

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial v}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\frac{a^2}{b}$$

$A\Rightarrow A$ Verdad. Es una tautología.

$A\Rightarrow B$ Falso. Consideremos la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tiene límite en $(0,0)$ pero no es continua en dicho punto.

$A\Rightarrow C$ Falso. Ejemplo Item 4.

$A\Rightarrow D$ Falso. Ejemplo Item 4. Las derivadas parciales son un caso particular de las direccionales.

$A\Rightarrow E$ Falso. Ejemplo Item 4. Razonando por el absurdo. Si suponemos que E se cumple entonces la función tendría derivadas parciales en $(0,0)$.

$A\Rightarrow F$ Falso. Ejemplo Item 4. Razonando por el absurdo. Si suponemos que F se cumple entonces la función tendría derivadas parciales en $(0,0)$.

$B\Rightarrow A$ Verdad. Es inmediato de la definición de continuidad.

$B\Rightarrow B$ Verdad. Es una tautología.

$B\Rightarrow C$ Falso. Ejemplo Item 4.

$B\Rightarrow D$ Falso. Ejemplo Item 4. Las derivadas parciales son un caso particular de las direccionales.

$B\Rightarrow E$ Falso. Ejemplo Item 4. Razonando por el absurdo. Si suponemos que E se cumple entonces la función tendría derivadas parciales en $(0,0)$.

$B\Rightarrow F$ Falso. Ejemplo Item 4. Razonando por el absurdo. Si suponemos que F se cumple entonces la función tendría derivadas parciales en $(0,0)$.

$C\Rightarrow A$ Falso. Ejemplo Item 5.

$C \Rightarrow B$ Falso. Ejemplo Item 5.

$C \Rightarrow C$ Verdad. Es una tautología.

$C \Rightarrow D$ Falso. Ejemplo Item 5.

$C \Rightarrow E$ Falso. Ejemplo Item 5. Razonando por el absurdo. Si suponemos que E se cumple entonces la función sería continua en $(0,0)$.

$C \Rightarrow F$ Falso. Ejemplo Item 5. Razonando por el absurdo. Si suponemos que F se cumple entonces la función sería continua en $(0,0)$.

$D \Rightarrow A$ Falso. Ejemplo Item 6.

$D \Rightarrow B$ Falso. Ejemplo Item 6.

$D \Rightarrow C$ Verdad. Las derivadas parciales son un caso particulcar de las derivadas direccionales.

$D \Rightarrow D$ Verdad. Es una tautología.

$D \Rightarrow E$ Falso. Ejemplo Item 6. Razonando por el absurdo. Si suponemos que E se cumple entonces la función sería continua en $(0,0)$.

$D \Rightarrow F$ Falso. Ejemplo Item 6. Razonando por el absurdo. Si suponemos que F se cumple entonces la función sería continua en $(0,0)$.

$E \Rightarrow A, B, C, D, E$ Verdad. Item 2A y definición de diferenciabilidad.

$E \Rightarrow F$ Falso. Item 3.

$F \Rightarrow A, B, C, D, E, F$ Verdad. Item 1.A.