Práctico 7

Semántica de la Lógica de Predicados

Ejercicio 4

Bosquejo de solución

a. El alfabeto no tiene símbolos de relación. Los símbolos de función son f_1 (binario), f_2 (binario) y f_3 (unario). El símbolo de constante es c_1.

Tomamos $t_1 = f_3(f_3(f_3(c_1)))$ y $t_2 = f_1(f_3(c_1), f_3(f_3(c_1)))$ ambos distintos y pertenecientes a $\texttt{TERM}_A$. Veamos que ${t_1}^A = {t_2}^A = 3$.

$$
\begin{aligned}
&{t_1}^A = f_3(f_3(f_3(c_1)))^A \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S\left(f_3(f_3(c_1))^A\right) \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S\left(S\left(f_3(c_1)^A\right)\right) \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S\left(S\left(S\left({c_1}^A\right)\right)\right) \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S(S(S(0))) \\
&= \text{(definición de } S) \\
&S(S(1)) \\
&= \text{(definición de } S) \\
&S(2) = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{t_2}^A = f_1(f_3(c_1), f_3(f_3(c_1)))^A \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&f_3(c_1)^A + f_3(f_3(c_1))^A \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S\left({c_1}^A\right) + S\left(f_3(c_1)^A\right) \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S(0) + S\left(S\left({c_1}^A\right)\right) \\
&= \text{(interpretación de términos cerrados y def } A) \\
&S(0) + S(S(0)) \\
&= \text{(definición de } S) \\
&1 + S(1) \\
&= \text{(definición de } S \text{ y aritmética)} \\
&1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

b. Demostraremos esta propiedad usando el PIP para $\mathbb{N}$.

Identificación de la propiedad: $P(n) :=$ existe un término t tal que $t^A = n$

Paso Base

T) $P(0)$: existe un término t tal que $t^A = 0$.

Demo)

Basta tomar $t = c_1$.
Por interpretación de términos cerrados y definición de A
$t^A = {c_1}^A = 0$.

Paso Inductivo

H) $P(n)$: existe un término t_n tal que ${t_n}^A = n$.

T) $P(n+1)$: existe un término t_{n+1} tal que ${t_{n+1}}^A = n+1$.

Demo)

Tomamos $t_{n+1} = f_3(t_n)$. Observemos que t_{n+1} es un término pues t_n es un término por hipótesis y por definición de `TERM`, $f_3(t_n)$ también lo es.

$$
\begin{aligned}
& {t_{n+1}}^A \\
& = \text{(def. } t_{n+1}) \\
& f_3(t_n)^A \\
& = \text{(def. interpretación de términos)} \\
& S\left({t_n}^A\right) \\
& = \text{(Por } \textbf{(HI)}) \\
& S(n) \\
& = \text{(de. } S) \\
& n+1
\end{aligned}
$$

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para $\mathbb{N}$, concluimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un término t tal que $t^A = n$.

c. **H)** Existe un término t y un natural n tal que $t^A = n$.

T) Existe un término t' tal que $t'^A = n$ y t' tiene más ocurrencias de f_1 y c_1 que t.

Demo)

Basta tomar $t' = f_1(t, c_1)$. Por un lado observamos:

$$
\begin{aligned}
& t'^A \\
& = \text{(def } t') \\
& f_1(t, c_1)^A \\
& = \text{(interpretación de términos y def. de } A) \\
& t^A + {c_1}^A \\
& = \text{(def. de } A) \\
& n + 0 \\
& = \text{(aritmética)} \\
& n
\end{aligned}
$$

Además, t' tiene más ocurrencias de los símbolos f_1 y c_1 que t ya que tiene todas las ocurrencias de f_1 y c_1 en t más una ocurrencia de f_1 y una ocurrencia de c_1.

d. **T)** Para todo $n \in \mathbb{N}$ hay infinitos términos t tales que $t^A = n$.

Demo)

Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Definimos $T_n = \{t \in \mathtt{TERM}_C \mid t^A = n\}$ y supongo por absurdo que T_n es finito.

Como por la parte b) sabemos que T_n no es vacío, debe existir un término $t_{max} \in T_n$ con una cantidad máxima de ocurrencias de c_1.

Por la parte c) podemos afirmar que existe $t' \in \mathtt{TERM}_C$ tal que $t'^A = n$ (y por lo tanto $t' \in T_n$), y que tiene más ocurrencias de c_1 que t_{max}. Esto es **absurdo**, por lo que T_n debe ser infinito.

Como la prueba la hicimos para un natural genérico vale para todo natural.

Ejercicio 8

Bosquejo de solución

a.
$M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \to (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x,y)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(f_2(x)) \to (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(x,y)))[^{\bar{\varphi}}/_x])$
$\Leftrightarrow$ (Sust.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(f_2(\bar{\varphi})) \to (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\varphi},y))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(f_2(\bar{\varphi})) \Rightarrow M \models (\exists y)(P_2(y) \wedge P_3(\bar{\varphi},y))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(f_2(\bar{\varphi})) \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(M \models (P_2(y) \wedge P_3(\bar{\varphi},y))[^{\bar{\psi}}/_y]))$
$\Leftrightarrow$ (Sust.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(f_2(\bar{\varphi})) \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(M \models (P_2(\bar{\psi}) \wedge P_3(\bar{\varphi},\bar{\psi}))))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(f_2(\bar{\varphi})) \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(M \models P_2(\bar{\psi}) \text{ y } M \models P_3(\bar{\varphi},\bar{\psi}))))$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(v^M(P_1(f_2(\bar{\varphi})) = 1 \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(v^M(P_2(\bar{\psi})) = 1 \text{ y } v^M(P_3(\bar{\varphi},\bar{\psi})) = 1)))$
$\Leftrightarrow$ (Interp.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(f_2(\bar{\varphi})^M \in \{\alpha \mid\ \models \alpha\} \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(\bar{\psi}^M \in \{\bot\} \text{ y } (\bar{\varphi}^M, \bar{\psi}^M) \in \{(\varphi_1,\varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}))$
$\Leftrightarrow$ (Interp. y def. de $F_\neg$)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\neg\bar{\varphi}^M) \in \{\alpha \mid\ \models \alpha\} \Rightarrow (\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(\psi \in \{\bot\} \text{ y } (\varphi,\psi) \in \{(\varphi_1,\varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}))$
$\Leftrightarrow$ (Interp. y def. de conjuntos. $\psi \in \{\bot\} \Leftrightarrow \psi = \bot$ entonces sustituimos)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\neg\varphi) \in \{\alpha \mid\ \models \alpha\} \Rightarrow ((\varphi,\bot) \in \{(\varphi_1,\varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}))$
$\Leftrightarrow$ (Def. de conjuntos)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\models (\neg\varphi) \Rightarrow (\varphi\ eq\ \bot))$
$\Leftrightarrow$ (Def. de eq)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\models (\neg\varphi) \Rightarrow (\models \varphi \leftrightarrow \bot))$
$\Leftrightarrow$ (Def $\models$ en $\texttt{PROP}$)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}v \in Val)(v(\neg\varphi) = 1) \Rightarrow (\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi \leftrightarrow \bot) = 1))$
$\Leftrightarrow$ (Def de Valuación. $v((\neg\varphi)) = 1 - v(\varphi)$ y $v((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi)$)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi) = 0) \Rightarrow (\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi) = v(\bot)))$
$\Leftrightarrow$ (Def de Valuación. Sabemos que para toda valuacion v, $v(\bot) = 0$.)
$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi) = 0) \Rightarrow (\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi) = 0))$

Como el antecedente y el consecuente en la última equivalencia son iguales, probamos entonces que la afirmación es **Verdadera**.

b.

$$M \models (P_1(x) \to P_2(x))$$
$\Leftrightarrow$ (Def de $\models$ y clausura)
$$M \models (\forall x)(P_1(x) \to P_2(x))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(x) \to P_2(x))[^{\bar{\varphi}}/_x])$$
$\Leftrightarrow$ (Sust.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(\bar{\varphi}) \to P_2(\bar{\varphi})))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(\bar{\varphi}) \Rightarrow M \models P_2(\bar{\varphi}))$$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(v^M(P_1(\bar{\varphi})) = 1 \Rightarrow v^M(P_2(\bar{\varphi})) = 1)$$
$\Leftrightarrow$ (Interp.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\varphi}^M \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \Rightarrow \bar{\varphi}^M \in \{\bot\})$$
$\Leftrightarrow$ (Interp.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \Rightarrow \varphi \in \{\bot\})$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de Conjuntos)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\models \varphi \Rightarrow \varphi = \bot)$$

Basta con tomar algún φ que sea tautología, por ejemplo $\varphi = (\neg\bot)$, que cumple el antecedente de la propiedad, y no cumple el consecuente, dado que $\varphi = (\neg\bot) \neq \bot$ Conlcuímos entonces que la afirmación es **Falsa**.

c.

$$M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \land P_1(y) \to P_1(f_1(x,y)))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (\forall y)(P_1(x) \land P_1(y) \to P_1(f_1(x,y)))[^{\bar{\varphi}}/_x])$$
$\Leftrightarrow$ (Sust.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(M \models (\forall y)(P_1(\bar{\varphi}) \land P_1(y) \to P_1(f_1(\bar{\varphi},y))))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(\bar{\varphi}) \land P_1(y) \to P_1(f_1(\bar{\varphi},y)))[^{\bar{\psi}}/_y]))$$
$\Leftrightarrow$ (Sust.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(\bar{\varphi}) \land P_1(\bar{\psi}) \to P_1(f_1(\bar{\varphi},\bar{\psi})))))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(M \models (P_1(\bar{\varphi}) \land P_1(\bar{\psi})) \Rightarrow M \models P_1(f_1(\bar{\varphi},\bar{\psi}))))$$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(M \models P_1(\bar{\varphi}) \text{ y } M \models P_1(\bar{\psi}) \Rightarrow M \models P_1(f_1(\bar{\varphi},\bar{\psi}))))$$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$ 3 veces)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(v^M(P_1(\bar{\varphi})) = 1 \text{ y } v^M(P_1(\bar{\psi})) = 1 \Rightarrow v^M(P_1(f_1(\bar{\varphi},\bar{\psi})) = 1))$$
$\Leftrightarrow$ (Interpretación de fórmulas cerradas)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(\bar{\varphi}^M \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \text{ y } \bar{\psi}^M \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \Rightarrow f_1(\bar{\varphi},\bar{\psi})^M \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\}))$$
$\Leftrightarrow$ (Interp. y def. de $F_\land$)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \text{ y } \psi \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \Rightarrow (\bar{\varphi}^M \land \bar{\psi}^M) \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\}))$$
$\Leftrightarrow$ (Interp.)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(\varphi \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \text{ y } \psi \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\} \Rightarrow (\varphi \land \psi) \in \{\alpha \mid \ \models \alpha\}))$$
$\Leftrightarrow$ (Def. de conjuntos)
$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})(\models \varphi \text{ y } \models \psi \Rightarrow \models (\varphi \land \psi)))$$

Entonces, sean φ y ψ en PROP, cualesquiera, como tenemos que se cumple $\models \varphi$ y $\models \psi$, esto por definición de $\models$ significa que $(\bar{\forall}v \in Val)(v(\varphi) = 1)$ y $(\bar{\forall}v \in Val)(v(\psi) = 1)$. De lo anterior, podemos deducir que $(\bar{\forall}v \in Val)(min\{v(\varphi), v(\psi)\} = 1)$. Luego aplicando la definición de valuación, esto es equivalente a $(\bar{\forall}v \in Val)(v((\varphi \land \psi)) = 1)$ que nuevamente por definición de $\models$ es $(\bar{\forall} v \in Val)(\models (\varphi \wedge \psi))$, nuestro consecuente. afirmación

Ejercicio 9

Bosquejo de solución

Queremos demostrar que: si (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$) entonces $(\models \varphi \Rightarrow \models \psi)$.

Suponemos (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$) y queremos probar $(\models \varphi \Rightarrow \models \psi)$.

H) Para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$ **(1)**
$\models \varphi$ **(2)**

T) $\models \psi$

Demo.

$$\models \psi$$
$$\Leftrightarrow \text{(Def} \models\text{)}$$
$$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \psi)$$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbitraria de tipo adecuado queremos probar $\mathcal{M} \models \psi$
Por hipótesis **(2)** $\mathcal{M} \models \varphi$
Por hipótesis **(1)** $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi$

De ambas hipótesis anteriores, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \psi$ y esto es lo que queríamos probar.

Mostremos ahora que el recíproco no se cumple, es decir que:
No se cumple que (Si $(\models \varphi \Rightarrow \models \psi)$ entonces (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$))
Por lo tanto queremos mostrar que existen φ y ψ tales que:

se cumple que $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$ **(A)**
y
no se cumple que (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$)**(B)**

Observando lo que queremos probar, si se cumpliera $\models \varphi$ entonces debería cumplirse $\models \psi$ para que **(A)** sea verdadero. Si esto pasara como todas las estructuras modelarían a φ y todas las estructuras modelarían a ψ, no sería posible encontrar un estructura que falsee **(B)**.

Por lo anterior, es necesario encontrar una forma de que **(A)** sea verdadero sin que φ sea una verdad lógica. Recordemos que una implicancia es verdadera siempre que el consecuente es verdadero o siempre que el antecedente es falso. Por lo tanto vamos a buscar un φ tal que $\not\models \varphi$ y de esta forma nos aseguremos que **(A)** se cumple.

Para que **(B)** no se cumpla, debemos encontrar una estructura A que cumpla $A \models \varphi$ y $A \not\models \psi$.

En conclusión, necesitamos una fórmula φ que no sea verdad lógica ni contradicción y una estructura A que modele a φ pero no a ψ.

Sean $\varphi = (\forall x P(x))$, $\psi = \bot$ y $A = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \rangle$

Veamos que $\not\models \varphi$, $A \models \varphi$ y $A \not\models \bot$:

$\not\models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$ y de φ)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \not\models \forall x P(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})((\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P(\bar{a})))$
$\Leftarrow$ ($\mathcal{M}_1 =< \mathbb{N}, Par >$ testigo del existe)
$(\bar{\exists} a \in \mathbb{N})\mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (interpretación)
$(\bar{\exists} a \in \mathbb{N}) a \notin Par$
$\Leftarrow$ (1 testigo del existe)
$1 \notin Par$
que se cumple por aritmética

$A \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def. φ, 2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N}) A \models P(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (interpretación)
$(\bar{\forall} a \in \mathbb{N}) a \in \mathbb{N}$
y esto se cumple trivialmente

$A \not\models \bot$
que se cumple trivialmente, porque $\bot$ no tiene modelo

Ejercicio 12

Bosquejo de solución

a. $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

Supongamos por absurdo $\not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$\not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\models$)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \not\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi)$ y $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi \to \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi)$ y $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ y $\mathcal{M} \not\models \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2 y Sustitución)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})((\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$ y $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ y $\mathcal{M} \not\models \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})((\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$
y $(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]$ y $\mathcal{M} \not\models \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists}\mathcal{M})((\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$
y $(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]$
y $(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \psi[\bar{c}/x]$
)

Por lo tanto, supusimos que existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que:

$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$**(A)**
$(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]$**(B)**
$(\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models \psi[\bar{c}/x]$**(C)**

Sea $d \in |\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \not\models \psi[\bar{d}/x](*^1)$. Se sabe que existe $d \in |\mathcal{M}|$ que lo cumpla por **(C)**

(**por (B)**)
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$
$\Rightarrow$ (por **(A)**)
$\mathcal{M} \models \psi[\bar{d}/x]$
lo cual es contradictorio con $(*^1)$

Por lo tanto $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

b. $\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

$\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
$\Leftrightarrow$ (Eq. de conectivos y Teo.Sustitución)
$\models (\neg\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \to \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (Eq. de conectivos)
$\models \neg(\neg\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \vee \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan, doble negación y Teo.Sust.)
$\models (\exists x\varphi \wedge \neg\exists x\psi) \vee \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (Commutativa $\vee$)
$\models \exists x(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\exists x\varphi \wedge \neg\exists x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (Distr. $\vee$ con $\wedge$)
$\models (\exists x(\neg\varphi \vee \psi) \vee \exists x\varphi) \wedge (\exists x(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg\exists x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (Distr. $\exists$ y $\vee$)
$\models (\exists x\neg\varphi \vee \exists x\psi \vee \exists x\varphi) \wedge (\exists x\neg\varphi \vee \exists x\psi \vee \neg\exists x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (Asoc.$\vee$, 3ro.Excl.,Teo.Sust.)
$\models ((\exists x\neg\varphi \vee \exists x\varphi) \vee \exists x\psi) \wedge (\exists x\neg\varphi \vee \neg\bot)$
$\Leftrightarrow$ (Distr.$\exists$ con $\vee$,DL $\vee$,Teo.Sust.)
$\models (\exists x(\neg\varphi \vee \varphi) \vee \exists x\psi) \wedge \neg\bot$
$\Leftrightarrow$ (3ro.Excl., Teo.Sust, Neutro $\wedge$)
$\models \exists x\neg\bot \vee \exists x\psi$
$\Leftrightarrow$ ($x \notin FV(\neg\bot)$)
$\models \neg\bot \vee \exists x\psi$
$\Leftrightarrow$ (DL $\vee$)
$\models \neg\bot$
y esto se cumple trivialmente

c. $\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

$\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \mathcal{M} \models (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2 y sust.)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})((\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x]) \Rightarrow \mathcal{M} \models (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x3)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})((\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x]) \Rightarrow$
$((\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]) \Leftrightarrow (\bar{\forall}c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])))$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbirtraria, demostraremos que:

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x]) \Rightarrow$$
$$((\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]) \Leftrightarrow (\bar{\forall}c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]))$$

H) $(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$

T) $(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]) \Leftrightarrow (\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$

Demo.

Tenemos que demostrar $((\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]) \Leftrightarrow (\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]))$. Por lo que partiremos la prueba en directo y recíproco:

Directo: $(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]) \Rightarrow (\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$

H) $(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$ **(A)**
$(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x])$**(B)**

T) $(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$

Demo.

Sea $c \in |\mathcal{M}|$ arbitrario, queremos probar $\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]$.

(por hipótesis **(B)**)
$(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x])$
$\Rightarrow$ $(c \in |\mathcal{M}|)$
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x](*^{\mathbf{1}})$

(por hipótesis **(A)**)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$
$\Rightarrow$ $(c \in |\mathcal{M}|)$
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x](*^{\mathbf{2}})$

Aplicando $(*^{\mathbf{1}})$ en $(*^{\mathbf{2}})$, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]$ que es lo que se quería probar.

Recíproco: $(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]) \Rightarrow (\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x])$

H) $(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$ **(A)**
$(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$**(B)**

T) $(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x])$

Demo.

Sea $b \in |\mathcal{M}|$ arbitrario, queremos probar $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]$.

(por hipótesis **(B)**)
$(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$
$\Rightarrow$ $(b \in |\mathcal{M}|)$
$\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x](*^{\mathbf{1}}($

(por hipótesis **(A)**)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$
$\Rightarrow$ $(b \in |\mathcal{M}|)$
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x])*^{\mathbf{2}})$

Aplicando $(*^{\mathbf{1}})$ en $(*^{\mathbf{2}})$, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x]$ que es lo que se quería probar.

d. $\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

$\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia de conectivos)
$\models \neg(\forall x\varphi \to \exists x\psi) \vee \exists x(\varphi \to \psi)$
$\Leftrightarrow$ (equivalencia de conectivos y teo. de sustitución (2 veces))
$\models \neg(\neg\forall x\varphi \vee \exists x\psi) \vee \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan, De Morgan generalizado, doble negación y teo. de sustitución)
$\models (\forall x\varphi \wedge \forall x\neg\psi) \vee \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (distributiva del $\wedge$ y $\forall$ y teo. de sustitución)
$\models \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \vee \exists x(\neg\varphi \vee \psi)$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan generalizado y teo. de sustitución)
$\models \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\forall x(\neg(\neg\varphi \vee \psi))$
$\Leftrightarrow$ (De Morgan, doble negación y teo. de sustitución)
$\models \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\forall x(\varphi \wedge \neg\psi)$
$\Leftrightarrow$ (Tercero excluido)
$\models \neg\bot$
y esto se cumple trivialmente

e. $\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$

$\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$
$\Leftrightarrow$ (def. $\models$)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(\mathcal{M} \models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x3)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(((\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow (\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \forall x\psi) \Rightarrow \mathcal{M} \models \forall x(\varphi \to \psi))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2 y sust.)
$(\bar{\forall}\mathcal{M})(((\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow (\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x]) \Rightarrow$
$(\bar{\forall}c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]))$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbirtraria, demostraremos que:

$$((\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow (\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x]) \Rightarrow$$
$$(\bar{\forall}c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$$

H) $((\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Rightarrow (\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x])$

T) $(\bar{\forall}c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$

Demo.

Sea $c \in |\mathcal{M}|$ arbitrario, queremos probar $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x])$.
Suponemos $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x]$ y vamos a probar $\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]$

$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x]$
$\Rightarrow$ (c testigo del existencial)
$(\bar{\exists}a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$
$\Rightarrow$ (por hipótesis)
$(\bar{\forall}b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/x]$
$\Rightarrow$ ($c \in |\mathcal{M}|$)
$\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]$

(por hipótesis **(B)**)
$(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{b}/x])$
$\Rightarrow$ ($c \in |\mathcal{M}|$)
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x](*^{\mathbf{1}})$

(por hipótesis **(A)**)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}/x])$
$\Rightarrow$ ($c \in |\mathcal{M}|$)
$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{c}/x] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x](*^{\mathbf{2}})$

Aplicando $(*^{\mathbf{1}})$ en $(*^{\mathbf{2}})$, podemos concluir que $\mathcal{M} \models \psi[\bar{c}/x]$ que es lo que se quería probar.

Ejercicio 16

Bosquejo de solución

a. Recordemos que en esta parte se tiene la hipótesis adicional,

$$(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})\ g(p_i) \in \texttt{SENT}$$

Queremos probar,

$$(\bar{\forall} M \text{e.t.a.})(\bar{\exists} v \in Val)(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP})\ v(\varphi) = v^M(f(\varphi))$$

Demo.

Tomemos una estructura M de tipo adecuado arbitraria y consideremos la función de interpretación asociada $v^M : \texttt{SENT} \to \{0, 1\}$. Consideremos la valuación $v_1 \in Val$ definida por

$$(\bar{\forall} p_i \in P)\ v_1(p_i) = v^M(g(p_i))\ \mathbf{(A)}$$

Observamos que por la hipótesis recordada al inicio de esta parte $g(p_i) \in \texttt{SENT}$ y por tanto podemos aplicar v^M a $g(p_i)$. [1]

Ahora probaremos que v_1 satisface

$$(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP})\ v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$$

utilizando el PIP para PROP en φ.
Identificamos la propiedad a utilizar,

$$\mathcal{P}(\varphi) := v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$$

Paso Base 1

T) $\mathcal{P}(p_i) : v_1(p_i) = v^M(f(p_i))$

Demo.

$$\begin{aligned} & v_1(p_i) \\ & = \text{(A)} \\ & v^M(g(p_i)) \\ & = (\text{def. } f) \\ & v^M(f(p_i)) \end{aligned}$$

[1] Adicionalmente, por el Teorema 1.2.2, la valuación v_1 que satisface la condición anterior es única.

Paso Base 2

Paso Base 1

T) $\mathcal{P}(\perp) : v_1(\perp) = v^M(f(\perp))$

Demo.

$$\begin{aligned}&v_1(\perp)\\&= \text{(def. val.)}\\&0\\&= \text{(def. interp.)}\\&v^M(\perp)\\&= \text{(def. } f\text{)}\\&v^M(f(\perp))\end{aligned}$$

Paso Inductivo 1

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$

TI) $\mathcal{P}((\neg\varphi)) : v_1((\neg\varphi)) = v^M(f((\neg\varphi)))$

Demo.

$$\begin{aligned}&v_1((\neg\varphi))\\&= \text{(def. val.)}\\&1 - v_1(\varphi)\\&= \text{(HI)}\\&1 - v^M(f(\varphi))\\&= \text{(def. interp.)}\\&v^M((\neg f(\varphi)))\\&= \text{(def. } f\text{)}\\&v^M(f(\neg\varphi))\end{aligned}$$

Paso Inductivo 2

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$

$\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = v^M(f(\psi))$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi)) : v_1((\varphi \wedge \psi)) = v^M(f((\varphi \wedge \psi)))$

Demo.

$$\begin{aligned}&v_1((\varphi \wedge \psi))\\&= \text{(def. val.)}\\&\text{mín}\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\}\\&= \text{(HI)}\\&\text{mín}\{v_M(f(\varphi)), v_M(f(\psi))\}\\&= \text{(def. interp.)}\\&v^M((f(\varphi) \wedge f(\psi)))\\&= \text{(def. } f\text{)}\\&v^M(f((\varphi \wedge \psi)))\end{aligned}$$

Paso Inductivo 3

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$

$\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = v^M(f(\psi))$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi)) : v_1((\varphi \vee \psi)) = v^M(f((\varphi \vee \psi)))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& v_1((\varphi \vee \psi)) \\
& = \text{(def. val.)} \\
& \text{máx}\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\
& = \text{(HI)} \\
& \text{máx}\{v_M(f(\varphi)), v_M(f(\psi))\} \\
& = \text{(def. interp.)} \\
& v^M((f(\varphi) \vee f(\psi))) \\
& = \text{(def. } f) \\
& v^M(f((\varphi \vee \psi)))
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 4

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$
$\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = v^M(f(\psi))$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \to \psi)) : v_1((\varphi \to \psi)) = v^M(f((\varphi \to \psi)))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& v_1((\varphi \to \psi)) \\
& = \text{(def. val.)} \\
& \text{máx}\{1 - v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\
& = \text{(HI)} \\
& \text{máx}\{1 - v_M(f(\varphi)), v_M(f(\psi))\} \\
& = \text{(def. interp.)} \\
& v^M((f(\varphi) \to f(\psi))) \\
& = \text{(def. } f) \\
& v^M(f((\varphi \to \psi)))
\end{aligned}
$$

Paso Inductivo 5

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$
$\mathcal{P}(\psi) : v_1(\psi) = v^M(f(\psi))$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \leftrightarrow \psi)) : v_1((\varphi \leftrightarrow \psi)) = v^M(f((\varphi \leftrightarrow \psi)))$

Demo.

$$
\begin{aligned}
& v_1((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(def. val.)} \\
& v_1(\varphi) = v_1(\psi) \\
& \Leftrightarrow \text{(HI)} \\
& v_M(f(\varphi)) = v_M(f(\psi)) \\
& \Leftrightarrow \text{(def. interp.)} \\
& v^M((f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi))) = 1 \\
& \Leftrightarrow \text{(def. } f) \\
& v^M(f((\varphi \leftrightarrow \psi))) = 1
\end{aligned}
$$

Entonces por el PIP para `PROP` podemos afirmar que,

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\ v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi))$$

b. Queremos probar

$$(\bar{\exists} v \in Val)(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v(\varphi) = v^M(f(\varphi)[^{\bar{a_1}, ..., \bar{a_m}}/_{x_1, ..., x_m}]))$$

En la prueba notaremos,

$$\bar{\vec{a}} = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m \rangle$$
$$\vec{x} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$$

Siguiendo un razonamiento análogo al de la parte anterior, consideramos la valuación $v_1 \in Val$ definida por

$$(\bar{\forall} p_i \in P)\ v_1(p_i) = v^M(f(p_i)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])\ \textbf{(B)}$$

Ahora probaremos que v_1 satisface

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))$$

utilizando nuevamente el PIP para PROP en φ.
Identificamos la propiedad a utilizar,

$$\mathcal{P}(\varphi) := \text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$$

Paso Base 1

T) $\mathcal{P}(p_i) : \text{FV}(f(p_i)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(p_i) = v^M(f(p_i)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
Demo.

$$\begin{array}{l} v_1(p_i) \\ =_{\textbf{(B)}} \\ v^M(f(p_i)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \end{array}$$

Paso Base 2

T) $\mathcal{P}(\bot) : \text{FV}(f(\bot)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\bot) = v^M(f(\bot)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
Demo.

$$\begin{array}{l} v_1(\bot) \\ =_{\text{(def. val.)}} \\ 0 \\ =_{\text{(def. interp.)}} \\ v^M(\bot) \\ =_{\text{(def. sust.)}} \\ v^M(\bot[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \\ =_{\text{(def. f)}} \\ v^M(f(\bot)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \end{array}$$

Paso Inductivo 1

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : \text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
TI) $\mathcal{P}((\neg\varphi)) : \text{FV}(f((\neg\varphi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1((\neg\varphi)) = v^M(f((\neg\varphi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
Demo.

Supongamos $\text{FV}(f((\neg\varphi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*1)**
Observamos que

$$\begin{array}{l} \text{FV}(f((\neg\varphi))) \\ =_{\text{(def. f)}} \\ \text{FV}(\neg f(\varphi)) \\ =_{\text{(def. FV)}} \\ \text{FV}(f(\varphi)) \end{array}$$

y por tanto se cumple por el supuesto **(*1)**, $\text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*2)**
Luego,

$$\begin{aligned}
&v_1((\neg\varphi)) \\
&= \text{(def. val.)} \\
&1 - v_1(\varphi) \\
&= (\textbf{*2} \text{ e HI}) \\
&1 - v^M(f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]) \\
&= \text{(def. interp.)} \\
&v^M((\neg(f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]))) \\
&= \text{(def. sust.)} \\
&v^M((\neg f(\varphi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]) \\
&= \text{(def. f)} \\
&v^M(f((\neg\varphi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])
\end{aligned}$$

Paso Inductivo 2

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : \text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$
$\mathcal{P}(\psi) : \text{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\psi) = v^M(f(\psi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi)) : \text{FV}(f((\varphi \wedge \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1((\varphi \wedge \psi)) = v^M(f((\varphi \wedge \psi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$

Demo.

Supongamos $\text{FV}(f((\varphi \wedge \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*1)**
Observamos que

$$\begin{aligned}
&\text{FV}(f((\varphi \wedge \psi))) \\
&= \text{(def. f)} \\
&\text{FV}((f(\varphi) \wedge f(\psi))) \\
&= \text{(def. FV)} \\
&\text{FV}(f(\varphi)) \cup \text{FV}(f(\psi))
\end{aligned}$$

y por tanto se cumplen por el supuesto **(*1)**,

$\text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$ **(*2)**
$\text{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$ **(*3)**

Luego,

$$\begin{aligned}
&v_1((\varphi \wedge \psi)) \\
&= \text{(def. val.)} \\
&\min\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\
&= (\textbf{*2}, \textbf{*3} \text{ e HI}) \\
&\min\{v^M(f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]), v^M(f(\psi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])\} \\
&= \text{(def. interp.)} \\
&v^M(((f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]) \wedge (f(\psi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]))) \\
&= \text{(def. sust.)} \\
&v^M(((f(\varphi) \wedge f(\psi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}]))) \\
&= \text{(def. f)} \\
&v^M(f((\varphi \wedge \psi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])
\end{aligned}$$

Paso Inductivo 3

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : \text{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$
$\mathcal{P}(\psi) : \text{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\psi) = v^M(f(\psi)[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi)) : \text{FV}(f((\varphi \vee \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1((\varphi \vee \psi)) = v^M(f((\varphi \vee \psi))[\vec{\bar{a}}|\vec{x}])$

Demo.

Supongamos $\text{FV}(f((\varphi \vee \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*1)**

Observamos que

$$\begin{array}{l} \mathrm{FV}(f((\varphi \vee \psi))) \\ = \text{(def. f)} \\ \mathrm{FV}((f(\varphi) \vee f(\psi))) \\ = \text{(def. FV)} \\ \mathrm{FV}(f(\varphi)) \cup \mathrm{FV}(f(\psi)) \end{array}$$

y por tanto se cumplen por el supuesto **(*1)**,

$$\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \text{ } \mathbf{(*2)}$$
$$\mathrm{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \text{ } \mathbf{(*3)}$$

Luego,

$$\begin{array}{l} v_1((\varphi \vee \psi)) \\ = \text{(def. val.)} \\ \max\{v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\ = (\mathbf{*2}, \mathbf{*3} \text{ e HI}) \\ \max\{v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]), v^M(f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])\} \\ = \text{(def. interp.)} \\ v^M(((f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \vee (f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) \\ = \text{(def. sust.)} \\ v^M(((f(\varphi) \vee f(\psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) \\ = \text{(def. f)} \\ v^M(f((\varphi \vee \psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \end{array}$$

Paso Inductivo 4

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : \mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
$\mathcal{P}(\psi) : \mathrm{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\psi) = v^M(f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \to \psi)) : \mathrm{FV}(f((\varphi \to \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1((\varphi \to \psi)) = v^M(f((\varphi \to \psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$

Demo.

Supongamos $\mathrm{FV}(f((\varphi \to \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*1)**

Observamos que

$$\begin{array}{l} \mathrm{FV}(f((\varphi \to \psi))) \\ = \text{(def. f)} \\ \mathrm{FV}((f(\varphi) \to f(\psi))) \\ = \text{(def. FV)} \\ \mathrm{FV}(f(\varphi)) \cup \mathrm{FV}(f(\psi)) \end{array}$$

y por tanto se cumplen por el supuesto **(*1)**,

$$\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \text{ } \mathbf{(*2)}$$
$$\mathrm{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \text{ } \mathbf{(*3)}$$

Luego,

$$\begin{array}{l} v_1((\varphi \to \psi)) \\ = \text{(def. val.)} \\ \max\{1 - v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\ = (\mathbf{*2}, \mathbf{*3} \text{ e HI}) \\ \max\{1 - v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]), v^M(f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])\} \\ = \text{(def. interp.)} \\ v^M(((f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \to (f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) \\ = \text{(def. sust.)} \\ v^M(((f(\varphi) \to f(\psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) \\ = \text{(def. f)} \\ v^M(f((\varphi \to \psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \end{array}$$

Paso Inductivo 5

HI) $\mathcal{P}(\varphi) : \mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$
$\mathcal{P}(\psi) : \mathrm{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\psi) = v^M(f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$

TI) $\mathcal{P}((\varphi \leftrightarrow \psi)) : \mathrm{FV}(f((\varphi \leftrightarrow \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1((\varphi \leftrightarrow \psi)) = v^M(f((\varphi \leftrightarrow \psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$

Demo.

Supongamos $\mathrm{FV}(f((\varphi \vee \psi))) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$. **(*1)**

Observamos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{FV}(f((\varphi \leftrightarrow \psi)))\\
&= \text{(def. f)}\\
&\mathrm{FV}((f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi)))\\
&= \text{(def. FV)}\\
&\mathrm{FV}(f(\varphi)) \cup \mathrm{FV}(f(\psi))
\end{aligned}$$

y por tanto se cumplen por el supuesto **(*1)**,

$$\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \ \textbf{(*2)}$$
$$\mathrm{FV}(f(\psi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \ \textbf{(*3)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&v_1((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(def. val.)}\\
&v_1(\varphi) = v_1(\psi)\\
&\Leftrightarrow (\textbf{*2},\textbf{*3} \text{ e HI})\\
&v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) = v^M(f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])\\
&\Leftrightarrow \text{(def. interp.)}\\
&v^M(((f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) \leftrightarrow (f(\psi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(def. sust.)}\\
&v^M(((f(\varphi) \leftrightarrow f(\psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{(def. f)}\\
&v^M(f((\varphi \leftrightarrow \psi))[\bar{\vec{a}}|\vec{x}]) = 1
\end{aligned}$$

Entonces por el PIP para `PROP` podemos afirmar que,

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\} \Rightarrow v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{\vec{a}}|\vec{x}])$$

c. Queremos probar

$$(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}) \models \varphi \Rightarrow \models f(\varphi)$$

Demo.

Sea $\varphi \in \texttt{PROP}$ una tautología.

Además como $\mathrm{FV}(f(\varphi))$ es un conjunto finito, podemos suponer $\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$.

Queremos probar entonces

$$\begin{aligned}
&\models f(\varphi)\\
&\Leftrightarrow (\text{def.} \models)\\
&(\bar{\forall}M e.t.a.)M \models f(\varphi)\\
&(\bar{\forall}M e.t.a.)M \models \mathrm{cl}(f(\varphi))\\
&\Leftrightarrow \text{(def. clausura)}\\
&(\bar{\forall}M e.t.a.)M \models ((\forall x_1)\dots(\forall x_m)f(\varphi))\\
&\Leftrightarrow \text{(2.4.5)}\\
&(\bar{\forall}M e.t.a.)(\bar{\forall}a_1, \dots, a_m \in |M|)M \models f(\varphi)[a_1, \dots, a_m|x_1, \dots, x_m]\\
&\Leftarrow \text{(def. interp.)}\\
&(\bar{\forall}M e.t.a.)(\bar{\forall}a_1, \dots, a_m \in |M|)v^M(f(\varphi)[a_1, \dots, a_m|x_1, \dots, x_m]) = 1
\end{aligned}$$

Tomemos una estructura de tipo adecuado M y $a_1, \dots, a_m \in |M|$. Por la parte b, sabemos que

$$(\bar{\exists} v_1 \in Val) v_1(\varphi) = v^M(f(\varphi)[a_1, \dots, a_m | x_1, \dots, x_m])$$

En particular, como φ es tautología sabemos que $v_1(\varphi) = 1$ y por tanto también se cumple

$$v^M(f(\varphi)[a_1, \dots, a_m | x_1, \dots, x_m]) = 1$$

Ejercicio 19

Bosquejo de solución

a. Recordemos que contamos con las siguientes afirmaciones:

$$\mathcal{M} \models (\exists x) P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x)) \tag{1}$$

$$Q \text{ es finito y } 1 \in Q \tag{2}$$

$$Q \neq \emptyset \tag{3}$$

Se probaran las partes a continuación.

I. Recordemos el concepto de condición *suficiente*: (2) es una condición *suficiente* para que se cumpla (1) sii (2) $\Rightarrow$ (1).

H) Q es finito y $1 \in Q$
T) $\mathcal{M} \models (\exists x) P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
Demo)
$\mathcal{M} \models (\exists x) P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models (\exists x) P_1(x)$ y $\mathcal{M} \models (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x2 y sustitución)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \models \neg P_1(\bar{b})$
$\Leftrightarrow$ (def v^M)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(a \in Q)$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(b \notin Q)$
$\Leftarrow$ (testigos)
$1 \in Q$ por **H)** y $(\bar{\exists} b \in \mathcal{Z} \setminus Q)$ porque $\mathcal{Z}$ es infinito y Q es finito por **H)**

II. Recordemos el concepto de condición *necesaria*: (2) es una condición *necesaria* para que se cumpla (1) sii (1) $\Rightarrow$ (2). Tenemos que demostrar que esto no se cumple, por lo que demostraremos que se puede cumplir (1) y no (2). Es decir:

$$(\bar{\exists} Q \subseteq \mathcal{Z})((1 \notin Q) \text{ o } (Q \text{ infinito})) \text{ tal que } \mathcal{M} \models (\exists x) P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$$

Demo)

Sea $Q = \mathcal{Z} \setminus \{1\}$

Entonces,

$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x)$ y $\mathcal{M} \models (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x3 y sustitución)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{b})$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(a \in Q)$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(b \notin Q)$
$\Leftarrow$ (testigos con $Q = \mathcal{Z} \setminus \{1\}$)
$a = 2 \in Q$ y $b = 1 \notin Q$

III. Como se vio anteriormente (3) es una condición *necesaria* para que se cumpla (1) sii (1) $\Rightarrow$ (3)

H) $\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
T) $Q \neq \emptyset$
Demo)

$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x)$ y $\mathcal{M} \models (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x3 y sustitución)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{b})$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(a \in Q)$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(b \notin Q)$
$\Rightarrow$ ($(\bar{\exists} a \in \mathcal{Z})(a \in Q)$)
$Q \neq \emptyset$

IV. Como se vio anteriormente, hay que encontrar un contraejemplo para demostrar que no se cumple que (3) $\Rightarrow$ (1). Es decir:

$$(\bar{\exists} Q \subseteq \mathcal{Z})(Q \neq \emptyset) \text{ tal que } \mathcal{M} \not\models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$$

Demo)

Sea $Q = \mathcal{Z}$

Entonces,

$\mathcal{M} \not\models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5)
$\mathcal{M} \not\models (\exists x)P_1(x)$ o $\mathcal{M} \not\models (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftarrow$ (si se cumple **A**, también se cumple (**A** o **B**))
$\mathcal{M} \not\models (\exists x)(\neg P_1(x))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models \neg P_1(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in \mathcal{Z})(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}))$
$\Leftrightarrow$ (def v^M)
$(\bar{\forall} a \in \mathcal{Z})(a \in \mathcal{Z})$
y esto se cumple trivialmente

V. Para esto tenemos que encontrar una condición (4) tal que (4) $\Leftrightarrow$ (1). Mirando la fórmula que queremos que sea modelada por $\mathcal{M}$ tiene que haber al menos un elemento en la relación Q y además Q no puede corresponderse con el universo, por lo que una condición suficiente y necesaria para lo pedido es:

$$Q \neq \emptyset \text{ y } Q \neq \mathcal{Z} \tag{4}$$

Por lo tanto, queremos demostrar:

$$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x)) \Leftrightarrow Q \neq \emptyset \text{ y } Q \neq \mathcal{Z}$$

Demo)

$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x) \wedge (\exists x)(\neg P_1(x))$

$\Leftrightarrow$ (2.4.5)

$\mathcal{M} \models (\exists x)P_1(x)$ y $\mathcal{M} \models (\exists x)(\neg P_1(x))$

$\Leftrightarrow$ (2.4.5 x3 y sustitución)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{b})$

$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(a \in Q)$ y $(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(b \notin Q)$

$\Leftrightarrow$ (hay al menos un elemento en Q y hay al menos un elemento $\mathcal{Z}$ que no esta en Q)

$Q \neq \emptyset$ y $Q \neq \mathcal{Z}$

b. Recordemos que en esta parte se cuenta además con la siguiente afirmación:

$$\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y) \tag{5}$$

Se probaran las partes a continuación.

I. Para demostrar que (3) no es ni necesario ni suficiente para que se cumpla (5) basta demostrar que no pasan las siguientes afirmaciones:

no se cumple que (3) $\Rightarrow$ (5) **(A)**
y
no se cumple (3) $\Leftarrow$ (5) **(B)**.

Demostremos primero **(A)**: $(\bar{\exists} S \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z})(Q \neq \emptyset)$ y $\mathcal{M} \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y)$

Demo)

Sea $S = \emptyset$

Entonces,

$\mathcal{M} \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y)$

$\Leftrightarrow$ (clausura)

$\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x, y))$

$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5 y sustitución)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models (\forall y)(P_1(\bar{a}) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(\bar{a}, y)))$

$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5 y sustitución)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \leftrightarrow P_2(\bar{a}, \bar{b}))$

$\Leftrightarrow$ (equivalentes)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P_2(\bar{a}, \bar{b})) \leftrightarrow P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b})$

$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P_2(\bar{a}, \bar{b}))$ sii $\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}))$

$\Leftrightarrow$ (2.4.5)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \not\models P_2(\bar{a}, \bar{b}))$ sii $\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models P_1(\bar{b}))$

$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)

$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}|)((a,b) \notin S$ sii $(a \in Q)$ y $(b \in Q))$
$\Leftarrow$ ($a \in \mathcal{Z}$ y $b \in \mathcal{Z}$ tales que $a = b$ son testigos de la afirmación)
Sea $a \in \mathcal{Z}$, tal que $a \in Q$, sabemos que existe porque $Q \neq \emptyset$.
Como $S = \emptyset$ entonces $(a,a) \notin S$
De las afirmaciones anteriores se puede conlcuir que $(a,a) \notin S$ sii $(a \in Q)$ y $(a \in Q)$

Ahora demostremos **(B)**: $(\bar{\exists} S \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z})(Q = \emptyset)$ y $\mathcal{M} \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)$

Demo)
Sea $S = \emptyset$
Entonces,

$\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)$
$\Leftrightarrow$ (clausura)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\forall y)(P_1(\bar{a}) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(\bar{a},y)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \leftrightarrow P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b})$ sii $\mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models P_1(\bar{b})$ sii $\mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)((a \in Q)$ y $(b \in Q)$ sii $(a,b) \in S)$
Si Q fuera no vacío, entonces S también debería serlo, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto $Q = \emptyset$

II. Una condición necesaria y suficiente para que se cumple (5) es:

$$S = Q \times Q \tag{6}$$

Ahora demostremos: $S = Q \times Q \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)$

Demo)
$\mathcal{M} \models P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y)$
$\Leftrightarrow$ (clausura)
$\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(x,y))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models (\forall y)(P_1(\bar{a}) \wedge P_1(y) \leftrightarrow P_2(\bar{a},y)))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5 y sustitución)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \leftrightarrow P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b})$ sii $\mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models P_1(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models P_1(\bar{b})$ sii $\mathcal{M} \models P_2(\bar{a},\bar{b}))$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)((a \in Q)$ y $(b \in Q)$ sii $(a,b) \in S)$
$\Leftrightarrow$ (teoría de conjuntos)
$S = Q \times Q$

c. De las partes anteriores sabemos que $\mathcal{M}_1 \models P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y) \Leftrightarrow S = Q \times Q$, por lo que basta con que la estructura que buscamos cumpla $S \neq Q \times Q$. Además observando que se debe cumplir $\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x)$ y de lo demostrado en la parte a., la estructura que buscamos también debe cumplir $Q \neq \emptyset$. De lo anterior llegamos a la siguiente posible estructura:

$\mathcal{M}_1 = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ, \bullet\}, \emptyset \rangle$

Se debe probar que:

$$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x) \ \textbf{(A)}$$
$$\text{y}$$
$$\mathcal{M}_1 \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y) \ \textbf{(B)}$$

Demo A:

$\mathcal{M}_1 \models (\exists x)P_1(x)$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a})$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|) a \in \{\circ, \bullet\}$
$\Leftarrow$ ($a = \circ$)
$\circ \in \{\circ, \bullet\}$

Demo B: $\mathcal{M}_1 \not\models P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y)$

$\Leftrightarrow$ (clausura)
$\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5 x2 y sustitución)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \not\models (P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b}) \rightarrow (\forall x)(\forall y)P_2(x,y))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b})$ y $\mathcal{M}_1 \not\models (\forall x)(\forall y)P_2(x,y))$
$\Leftrightarrow$ (contrarreciproco 2.4.5 x2 y sustitución)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a}) \wedge P_1(\bar{b})$ y $((\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} d \in |\mathcal{M}_1|))\mathcal{M}_1 \not\models P_2(\bar{c}, \bar{d}))$
$\Leftrightarrow$ (2.4.5)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{a})$ y $\mathcal{M}_1 \models P_1(\bar{b})$ y $((\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} d \in |\mathcal{M}_1|))\mathcal{M}_1 \not\models P_2(\bar{c}, \bar{d}))$
$\Leftrightarrow$ (def v^M y $\models$)
$(\bar{\exists} a \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|)(a \in Q)$ y $(b \in Q)$ y $((\bar{\exists} c \in |\mathcal{M}_1|)(\bar{\exists} d \in |\mathcal{M}_1|)) < c, d > \notin S)$
$\Leftarrow$ ($a = \circ, b = \circ, c = \circ, d = \circ$)
$(\circ \in \{\circ, \bullet\})$ y $(\circ \in \{\circ, \bullet\})$ y $< \circ, \circ > \notin \emptyset)$

Por lo probado anteriormente, $\mathcal{M}_1$ cumple ambas condiciones.