Confiabilidad estructural de componentes mecánicos con daño

R. Mussini & H. Cancela

2020

Referencias

Principal:

[1] Transparencias del Prof. R. Mussini.

Complementarias:

[2] M. Lemaire, *Structural Reliability*, ISTE Ltd. and John Wiley and Sons Inc., 2009.

[3] Robert E. Melchers and Andre T. Beck, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Third Edition, John Wiley & Sons, 2018.

Resumen

Términos

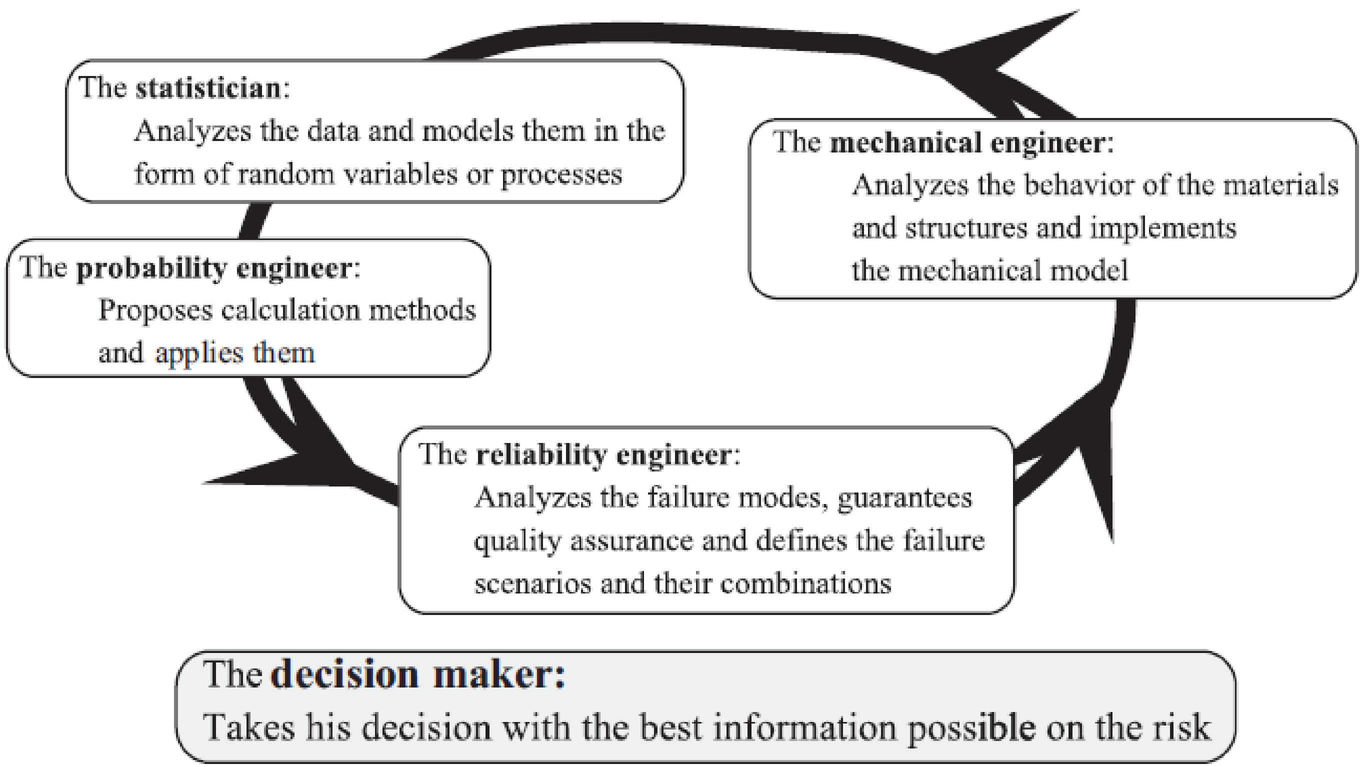
Espacio aleatorio basico (basic random space): las variables aleatorias básicas son las variables de entrada (inputs), ellas son en sí valores físicos tales como las dimensiones geométricas de una estructura, las propiedades mecánicas y físico-químicas de los materiales y las cargas aplicadas a la misma. Este conjunto de variables forma el denominado “espacio aleatorio basico”.

Espacio aleatorio de salida (output random space): las variables aleatorias de salida son los valores generados en función de las variables aleatorias básicas, las cuales expresan el “estado de la estructura”, una vez aplicada la carga. Por ej. el estado tensional en un punto de la misma. Ellas son calculadas usando modelos matemáticos. Este conjunto de variables forma el denominado “espacio aleatorio de salida”.

R - variable aleatoria de resistencia, siendo r los valores específicos de dicha variable

S - variable aleatoria de tensión, siendo s los valores específicos de dicha variable

$\{X\}$ - vector n-dimensional, donde cada componente del mismo $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ es una variable aleatoria



The **statistician**:
Analyzes the data and models them in the form of random variables or processes
The **mechanical engineer**:
Analyzes the behavior of the materials and structures and implements the mechanical model
The **probability engineer**:
Proposes calculation methods and applies them
The **reliability engineer**:
Analyzes the failure modes, guarantees quality assurance and defines the failure scenarios and their combinations
The **decision maker:**
Takes his decision with the best information possible on the risk

Teoría de Confiabilidad Estructural

Caso $R-S$

Función de estado límite

El análisis de confiabilidad estructural comienza con la definición de la llamada "función de estado límite", $G(\{X\})$ también designada algunas veces como "función de comportamiento", para el mecanismo de falla que se pretende evaluar.

$$G(\{X\}) = R - S = 0$$

Dominios y función de probabilidad conjunta

Dominio de falla:

$$G(\{X\}) = R - S \leq 0$$

Dominio de seguridad:

$$G(\{X\}) = R - S > 0$$

Función de densidad de probabilidad conjunta ($pdf - conjunta$):

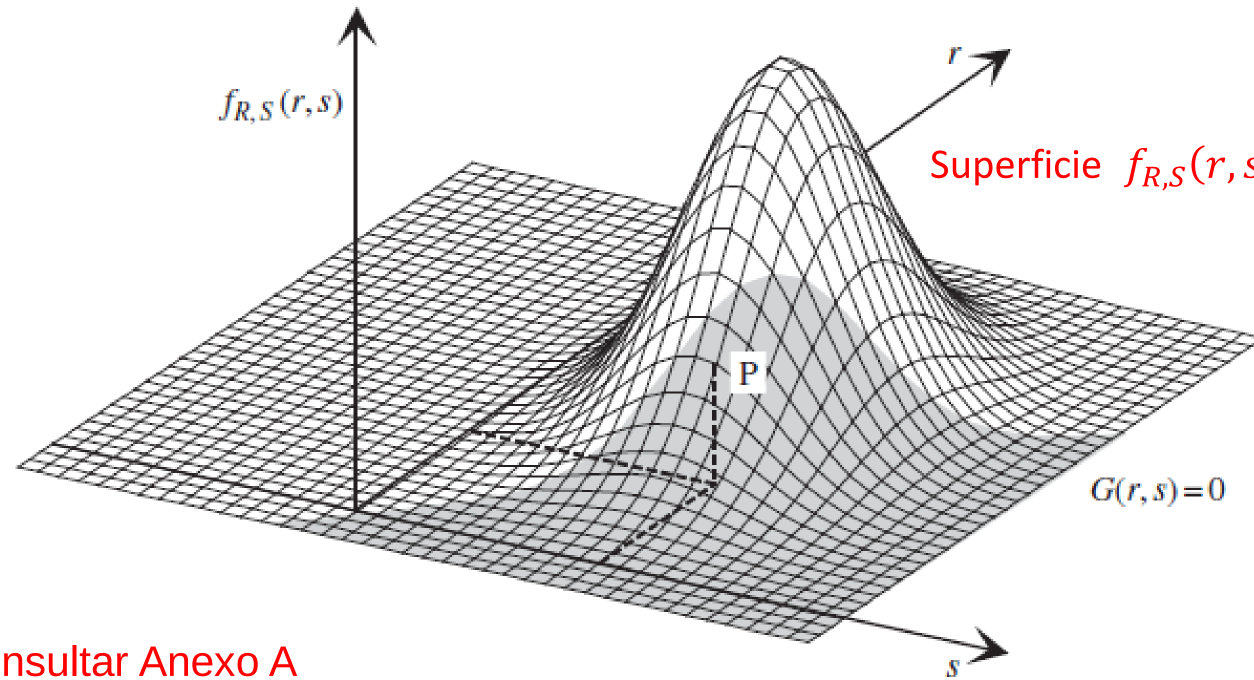
$$f_{R,S}(r,s) = \frac{\partial^2 F_{R,S}(r,s)}{\partial r \partial s}$$

donde $F_{R,S}(r,s)$ la función de densidad de probabilidad acumulada conjunta ($cdf - conjunta$),

$$F_{R,S}(r,s) = \ Prob(R \leq r, S \leq s)$$

Probabilidad de falla y su representación tridimensional en el caso de dos variables gaussianas, R y S correlacionadas

$$p_f = Prob(R - S \leq 0) = \int_{r-s\leq 0} f_{R,S}(r,s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$



Superficie $f_{R,S}(r,s)$

Consultar Anexo A

Comentarios

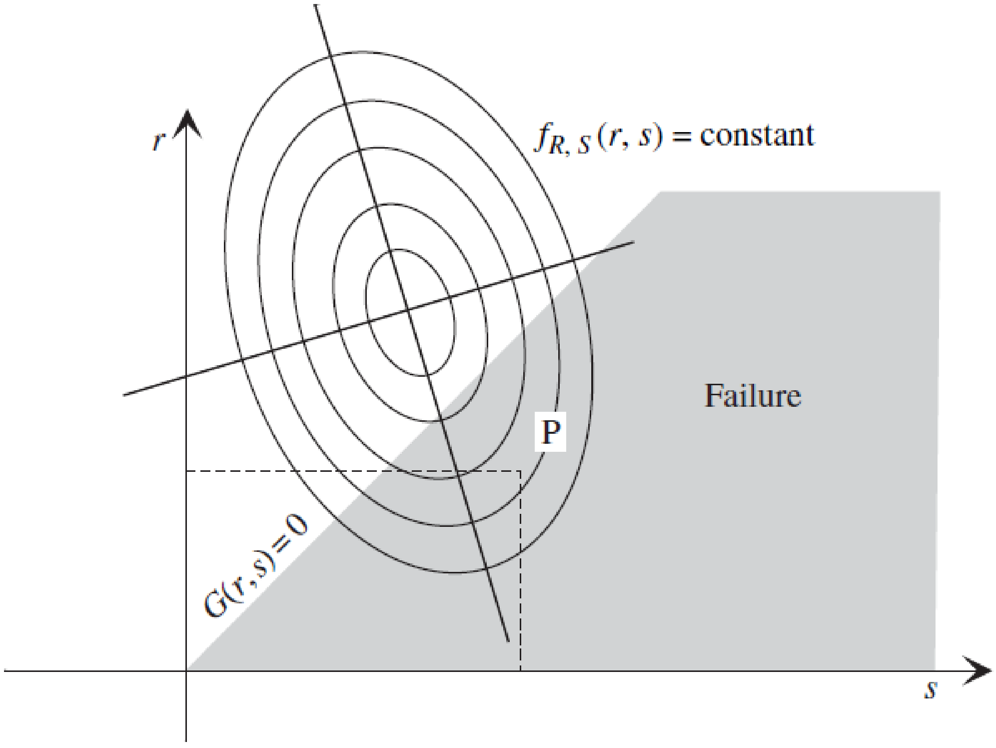
- En el caso de **dos variables gaussianas correlacionadas de entrada**, la probabilidad de falla, p_f es representada por un volumen, tal como se ilustra en la figura anterior.

- La $pdf - conjunta$, $f_{R,S}(r,s)$ es una superficie, y la probabilidad de falla p_f es el volumen, V ubicado por debajo de la superficie gris oscura, siendo $V \ll 1$ en el caso de baja probabilidad de falla.

- La integración es realizada en el dominio de falla $r - s \leq 0$; esto es, donde la resistencia es menor o igual que el efecto de las cargas.

Elipses de isodensidad de probabilidad ("curvas de nivel")

Resultado de la intersección de cortes de la superficie $f_{R,S}(r,s)$ con planos paralelos al plano r, s



Si R y S son estadisticamente independientes, ...

En este caso, $f_{R,S}(r,s)$ se puede expresar como,

$$f_{R,S}(r,s) = f_R(r) f_S(s)\,;R\ y\ S\ independientes$$

Para la variable aleatoria R,

$$f_R(r)\ y\ F_R(r)$$

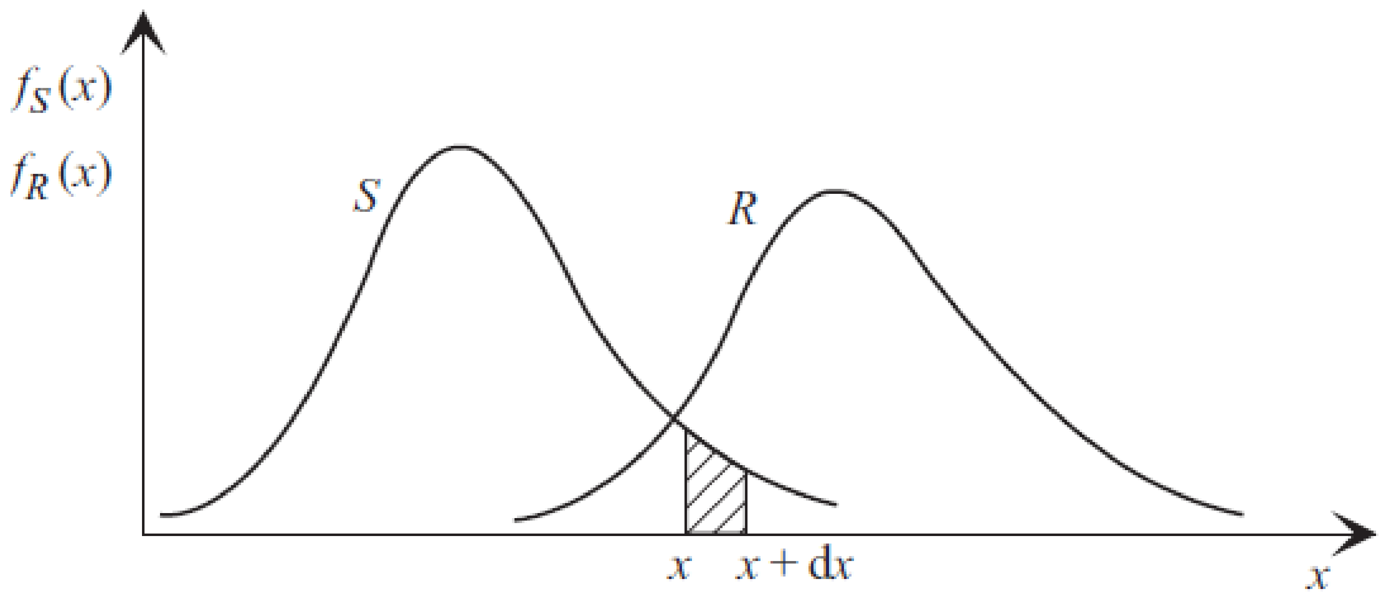
y para la variable aleatoria S,

$$f_S(s)\ y\ F_S(s)$$

En este caso de independencia entre las valiables R y S, se pueden proponer las siguientes dos expresiones para poder calcular la probabilidad de falla, p_f.

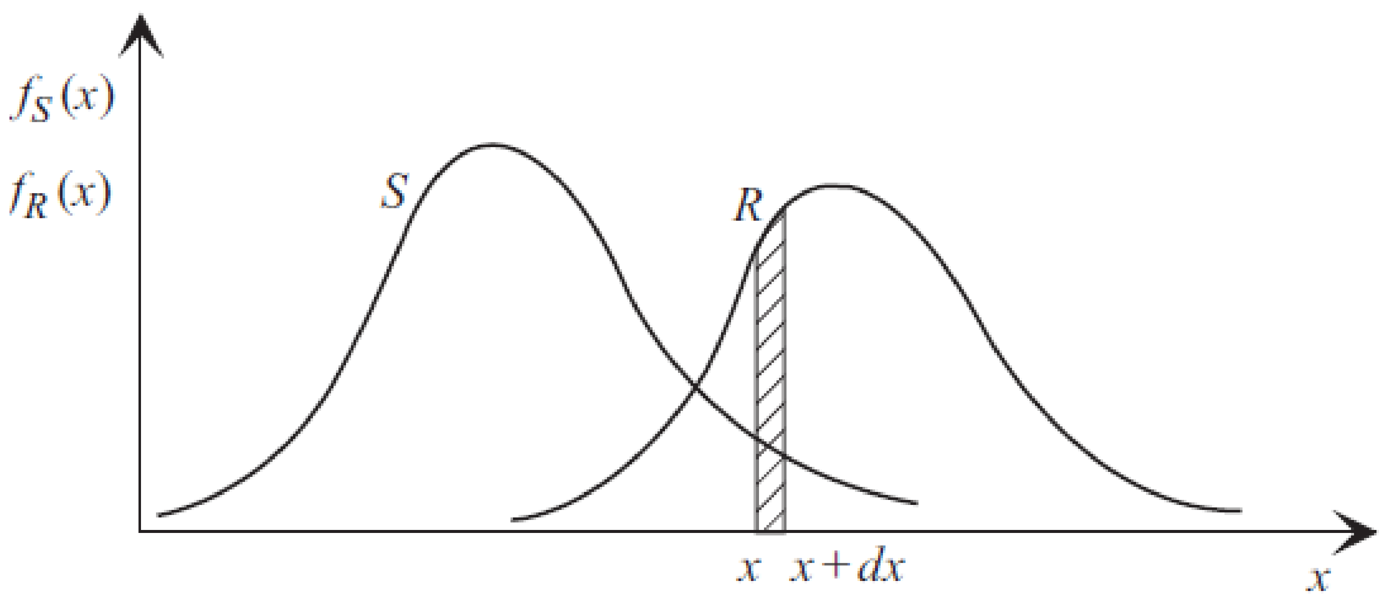
1er expresión

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(x) F_R(x) \mathrm{d}x \, ; R \; y \; S \; independientes$$



2a expresión

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_s(x)] f_R(x) \mathrm{d}x \; ; R \; y \; S \; independientes$$



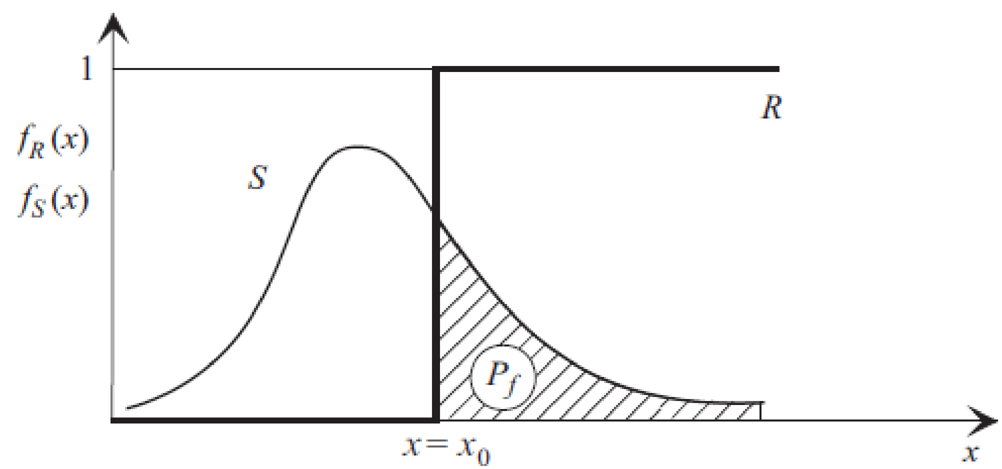
Ejemplo de la 1er expresión, considerando R determinísitco

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(x) F_R(x) \mathrm{d}x$$

Considerando,

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

$$p_f = \int_{x_0}^{+\infty} f_S(x) \mathrm{d}x$$



Comentario

- En el caso de **dos variables independientes de entrada**, la probabilidad de falla, p_f es representada por una superficie, y no por un volumen, tal como en el anterior caso de dos variables gausianas correlacionadas.

Teoría de Confiabilidad Estructural

Caso n-dimensional

Probabilidad de falla para el caso n-dimensional

$$p_f = Prob(G(\{X\}) \leq 0) = \int_{G(\{X\}) \leq 0} f_{\{X\}}(\{x\})\, d_{x_1} \dots d_{x_n}$$

$f_{\{X\}}(\{x\})$ - función de densidad de probabilidad conjunta del vector de variables aletorias $\{X\}$ de componentes $X_1, X_2, \dots X_n$

$G(\{X\}) \leq 0$ - dominio de falla n-dimensional

La resolución de la integral supone que el la función $f_{\{X\}}(\{x\})$ es conocida y que es posible realizar la integración en forma directa, **ambos requerimientos muy pocas veces son satisfechos**.

Cálculo de la probabilidad de falla

- Integración directa (sólo posible en casos muy especiales)

- Integración numérica, tal como a través del uso del método de Monte Carlo

- Obviar la integración transformando el integrando en una función de densidad de probabilidad conjunta multinormal, para la cual algunos resultados de casos específicos están disponibles.

- Nota: a continuación, se describirán algunos métodos de cálculo incluidos en el último punto denominados “métodos de segundo orden”; en la segunda parte del curso serán tratados los métodos de Monte Carlo.

Teoría de Confiabilidad Estructural

Métodos de momentos de segundo orden

Introducción

- Los métodos de confiabilidad estructural basados en indices de confiabilidad, consisten en la simplificación de la expresión general del integrando $f_{\{X\}}(\{x\})$ de la integral de probabilidad de falla,

$$p_f = Prob(G(\{X\}) \leq 0) = \int_{G(\{X\})\leq 0} f_{\{X\}}(\{x\})\, d_{x_1} \ldots d_{x_n}$$

- Se considerará el caso especial de estimación de la confiabilidad structural en el caso de que cada variable aleatoria es representada por sus dos primeros momentos, esto es por su valor esperado esperado o media y por su desviación standard. Esto ultimo es conocido como representación por “momentos de segundo orden”

- Una forma conveniente en la cual la representación por momentos de segundo orden puede ser interpretada, es aquella en la que cada variable aleatoria es descripta por una distribución normal (gausiana). Este tipo de distribución es completamente caracterizada por sus dos primeros momentos.

Algunos pioneros en métodos de confiabilidad estructural basados en momentos de segundo orden

- Mayer (1926)
- Freudenthal (1956)
- Rzhanitzyn (1957)
- Basler (1961)
- Cornell (1969)

Orden del método de confiabilidad estructural

En el caso general lineal la función de estado límite,

$$G(\{X\}) = Z(\{X\}) = a_0 + a_1 X_1, \dots a_n X_n = 0$$

Sin embargo, en general, $G(\{X\}) = Z(\{X\})$ no es lineal. En este caso, la obtención de los dos primeros momentos de $G(\{X\})$ no son fácilmente obtenibles. La aproximación más adecuada es linealizar $G(\{X\})$. Esto puede ser logrado realizando una expansión de $G(\{X\})$ como una serie de Taylor de primer orden en torno a un punto dado.

Los métodos de confiabilidad estructural que linealizan $G(\{X\})$ utilizando para ello una serie de Taylor de primer orden son designados como “metodos de primer orden”.

Indice de Cornell

Rjanitzyne, URSS, 1950s

Cornell, USA, 1969

Indice de Cornell, β_C

Z - función aleatoria de margen de seguridad

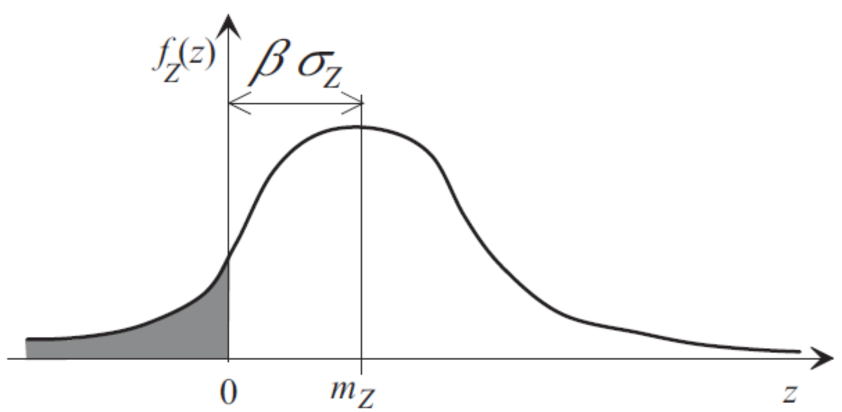
$$Z = R - S$$

m_Z - valor esperado de la función Z

σ_Z - desviación standard de la función

El indice de Cornell es definido como,

$$\beta_C = \frac{m_Z}{\sigma_Z}$$

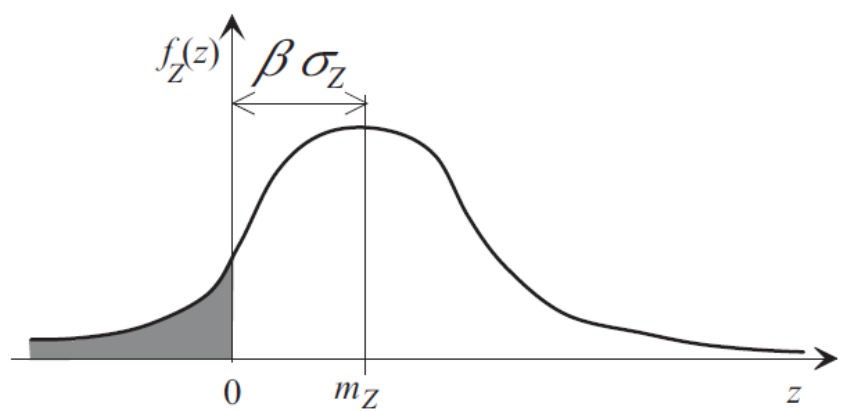


Representación gráfica

- La representación gráfica muestra que el indice de Cornell, β_C indica el número de desviaciones standard, σ_Z entre el punto medio, m_Z y el estado límite donde la función de margen de seguridad, Z se vuelve igual a 0 ($z = 0$).

- El indice de Cornell, β_C es adimensional.

- Cuanto mayor sea β_C, mayor mayor será la confiabilidad estructural, R^{STR} (menor p_f).



Indice de Cornell en el caso de que R y S sean variables gaussianas

En este caso, Z también sera una variable gaussiana.

$$p_f = \int_{-\infty}^{0} f_Z(z)\mathrm{d}z$$

Sustituyendo el valor de $f_Z(z)$ y realizando el siguiente cambio de variable,

La transformación $z \rightarrow u$, introduce la variable distribución normal standard, Φ.

$$u = \frac{z - m_Z}{\sigma_Z}$$

Φ es una distribución normal con media 0 y desviación estandar 1. Usualmente, es representada como $N(0,1)$.

$$p_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta_C} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \Phi(-\beta_C)$$

Ejemplo: índice de Cornell

Viga simplemente apoyada

Media de la carga, $\mu_Q = 3\ \mathrm{kN}$

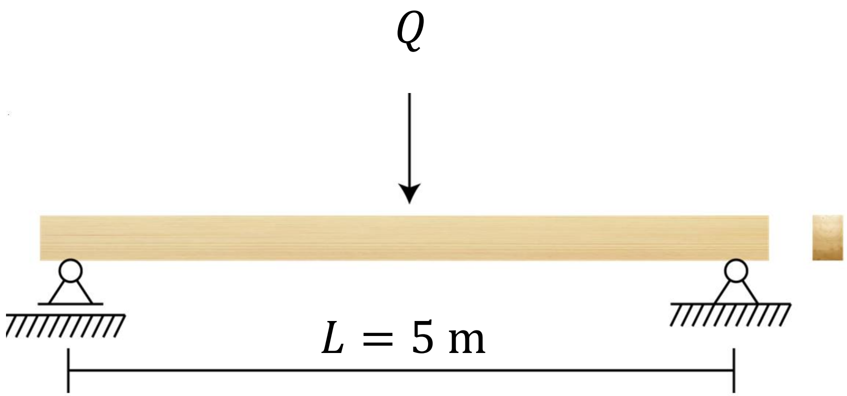
Varianza de la carga, $\sigma_Q^2 = 1\ (\mathrm{kN})^2$

Media del momento resistente, $\mu_R = 10\ \mathrm{kNm}$

Coeficiente de variación del momento resistente, $COV_R = 0{,}15$

L es una varaible determinística.

Calcular p_f utilizando el índice de Cornell.



Para la solución del problema anterior

Considerar:

$$\mu_z = \mu_R - \mu_S$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

$$\mu_S = \frac{L}{4}\mu_Q$$

$$\sigma_S^2 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \sigma_Q^2$$

Consultar: Anexo B

Anexo A

Independencia y correlación

Independencia y correlación

Dos variables aleatorias X_i y X_j no están correlacionadas cuando su coeficiente de correlación, $\rho_{X_i X_j} = 0$. De esta forma, el valor esperado es

$$\mathrm{E}[X_i X_j] = \mathrm{E}[X_i]\mathrm{E}[X_j]$$

La independencia requiere, además de la anterior factorización, la siguiente condición,

$$f_{X_i X_j}(x_i, x_j) = f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j)$$

La independencia conduce a la no correlación, no obstante la no correlación no conduce a la independencia. En el caso de que X_i y X_j sean gaussianas la no correlación ($\rho_{X_i X_j} = 0$) conduce a la factorización y de esta forma a la independencia.

Anexo B

Tabla de valores de distribución normal standard

β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$
3.	1.3499×10^{-3}	3.6	1.59109×10^{-4}	5.	2.86652×10^{-7}
3.01	1.30624×10^{-3}	3.61	1.53099×10^{-4}	5.05	2.20905×10^{-7}
3.02	1.26387×10^{-3}	3.62	1.47302×10^{-4}	5.1	1.69827×10^{-7}
3.03	1.22277×10^{-3}	3.63	1.41711×10^{-4}	5.15	1.30243×10^{-7}
3.04	1.18289×10^{-3}	3.64	1.36319×10^{-4}	5.2	9.96443×10^{-8}
3.05	1.14421×10^{-3}	3.65	1.3112×10^{-4}	5.25	7.60496×10^{-8}
3.06	1.10668×10^{-3}	3.66	1.26108×10^{-4}	5.3	5.79013×10^{-8}
3.07	1.07029×10^{-3}	3.67	1.21275×10^{-4}	5.35	4.39771×10^{-8}
3.08	1.035×10^{-3}	3.68	1.16617×10^{-4}	5.4	3.33204×10^{-8}
3.09	1.00078×10^{-3}	3.69	1.12127×10^{-4}	5.45	2.51849×10^{-8}
3.1	9.67603×10^{-4}	3.7	1.078×10^{-4}	5.5	1.89896×10^{-8}
3.11	9.35437×10^{-4}	3.71	1.0363×10^{-4}	5.55	1.42835×10^{-8}
3.12	9.04255×10^{-4}	3.72	9.96114×10^{-5}	5.6	1.07176×10^{-8}
3.13	8.74032×10^{-4}	3.73	9.57399×10^{-5}	5.65	8.02239×10^{-9}
3.14	8.44739×10^{-4}	3.74	9.20101×10^{-5}	5.7	5.99037×10^{-9}
3.15	8.16352×10^{-4}	3.75	8.84173×10^{-5}	5.75	4.46217×10^{-9}
3.16	7.88846×10^{-4}	3.76	8.49567×10^{-5}	5.8	3.31575×10^{-9}
3.17	7.62195×10^{-4}	3.77	8.16238×10^{-5}	5.85	2.45787×10^{-9}
3.18	7.36375×10^{-4}	3.78	7.84142×10^{-5}	5.9	1.81751×10^{-9}
3.19	7.11364×10^{-4}	3.79	7.53236×10^{-5}	5.95	1.34071×10^{-9}
3.2	6.87138×10^{-4}	3.8	7.2348×10^{-5}	6.	9.86588×10^{-10}
3.21	6.63675×10^{-4}	3.81	6.94834×10^{-5}	6.05	7.24229×10^{-10}
3.22	6.40953×10^{-4}	3.82	6.67258×10^{-5}	6.1	5.30342×10^{-10}
3.23	6.18951×10^{-4}	3.83	6.40716×10^{-5}	6.15	3.87415×10^{-10}
3.24	5.97648×10^{-4}	3.84	6.15172×10^{-5}	6.2	2.82316×10^{-10}
3.25	5.77025×10^{-4}	3.85	5.90589×10^{-5}	6.25	2.05226×10^{-10}
3.26	5.57061×10^{-4}	3.86	5.66935×10^{-5}	6.3	1.48823×10^{-10}
3.27	5.37737×10^{-4}	3.87	5.44177×10^{-5}	6.35	1.07657×10^{-10}
3.28	5.19035×10^{-4}	3.88	5.22282×10^{-5}	6.4	7.76885×10^{-11}
3.29	5.00937×10^{-4}	3.89	5.01221×10^{-5}	6.45	5.59251×10^{-11}