

## Práctico 8

### *Deducción Natural e Identidad - Lógica de Predicados*

#### Consideraciones generales:

En todas las derivaciones que se construyan, se debe explicitar:

- el nombre de las reglas aplicadas
- la regla asociada a cada cancelación de hipótesis
- cuando corresponda, el cumplimiento de las restricciones asociadas a las reglas.
- En los ejercicios 6, 9 y 12 se proponen ejercicios donde se describe una cierta realidad mediante oraciones en lenguaje natural. Se deberá *codificar* dichas oraciones en lógica de primer orden, definiendo un tipo de similaridad apropiado. Se deberán justificar ciertas conclusiones mediante derivaciones.

#### Ejercicio 1

Dada la siguiente derivación para  $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$ , donde  $x \notin FV(\varphi)$

$$\frac{\frac{[\exists x\varphi] \quad [\varphi]}{\varphi} \quad \frac{[\varphi]}{\exists x\varphi}}{\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi}$$

Indique las reglas aplicadas en cada paso, justificando además a que aplicación de regla corresponde cada hipótesis cancelada

#### Ejercicio 2

Indique por qué las siguientes derivaciones no son correctas.

$$\frac{\frac{\frac{\forall y \exists x P(x, y)}{\exists x P(x, y)} E\forall \quad \frac{[P(x, y)]_1}{P(x, y)} I\forall}{\forall y P(x, y)} I\forall}{\exists x \forall y P(x, y)} I\exists$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall y \exists x P(x, y)}{\exists x P(x, y)} E\forall \quad \frac{[P(x, y)]_1}{\forall y P(x, y)} I\forall}{\forall y P(x, y)} E\exists}{\exists x \forall y P(x, y)} I\exists$$

### Ejercicio 3

Sean  $\varphi, \psi$ , fórmulas de *FORM*. Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

- $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
- $\forall x\varphi \vdash \neg\forall x(\neg\varphi)$
- $\forall x\varphi \vdash \forall z\varphi[z/x]$ , donde  $z$  no ocurre en  $\varphi$ .
- $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall y\forall x\varphi$
- $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall x\varphi[x/y]$ , donde  $x \notin BV(\varphi)$
- $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
- $\exists x\varphi, \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \exists x\psi$

### Ejercicio 4

Sean  $\varphi, \psi$  fórmulas de *FORM*. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

- $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$ , donde  $x \notin FV(\varphi)$
- $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$
- $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ , donde  $x \notin FV(\varphi)$
- $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$ , donde  $x \notin FV(\psi)$
- $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x(\neg\varphi)$
- $\vdash \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi)$

### Ejercicio 5

Sean  $\varphi, \psi$  fórmulas de *FORM*. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

- $\vdash \neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x(\neg\varphi)$
- $\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \vee \psi$ , donde  $x \notin FV(\psi)$
- $\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$ , donde  $x \notin FV(\psi)$
- $\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \exists x\psi)$ , donde  $x \notin FV(\varphi)$
- $\vdash \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

### Ejercicio 6

Considerando el ejercicio 2 del práctico 6:

- Dada la siguiente definición para la relación de *hermanos*:

Dos personas son hermanos si y sólo si son dos personas distintas que tienen la misma madre.

- Escriba la definición anterior como una fórmula de *FORM*.
- Escriba una derivación que permita concluir que la relación *hermanos* es irreflexiva y simétrica.

b. Considere las siguientes hipótesis:

- $(H_1)$  La relación ser hermano es simétrica
- $(H_2)$  Los hermanos de los estudiantes son también estudiantes
- $(H_3)$  Los hermanos de Juan estudian
- $(H_4)$  Juan no estudia

y la conclusión:

- (C) Juan no tiene hermanos

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en FORM.

c. Considere las siguientes hipótesis:

- $(H_1)$  Toda persona es estudiante o tiene un hermano que lo es.
- $(H_2)$  Juan tiene sólo un hermano y este no estudia.

y la conclusión:

- (C) Juan estudia.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en FORM.

## Ejercicio 7

Demuestre que:

- a.  $(\forall x)(\forall y)x = y \vdash (\forall y)(\forall x)y = x$
- b.  $\vdash (\forall z)(z = x \leftrightarrow z = y) \rightarrow x = y$
- c.  $\vdash (\forall x)(\exists y)x = y$
- d.  $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg x = y \rightarrow \neg x = z \vee \neg y = z)$
- e.  $\overline{\forall}\varphi \in FORM$ , si  $y \notin V(\varphi)$ , entonces  $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x = y \rightarrow \varphi[y/x]))$
- f.  $\overline{\forall}\varphi \in FORM$ , si  $y \notin V(\varphi)$ , entonces  $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge \varphi[y/x]))$

## Ejercicio 8

Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

- a.  $\vdash \neg(\exists x)\neg(\exists y)f(x) = y$
- b.  $\vdash (\exists x)(\exists y)(\neg f(x) = f(y)) \rightarrow (\exists x)(\exists y)(\neg x = y)$
- c.  $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(\neg x = y)), (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)f(x) = y), (\forall x)P(x) \vdash \perp$
- d.  $\vdash (\forall x)(\forall y)x = y \rightarrow \neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge \neg P(y))$
- e. Sea  $\varphi$  una fórmula cualquiera,  $\vdash (\forall x)((\forall y)(x = y \rightarrow \neg f(x) = f(y)) \rightarrow \varphi)$

## Ejercicio 9

Si una relación  $R$  binaria en un conjunto  $\mathcal{C}$  cumple con

( $H_1$ )  $R$  es simétrica.

( $H_2$ )  $R$  es transitiva

( $H_3$ ) Para Todo elemento  $a \in \mathcal{C}$ , existe  $b \in \mathcal{C}$  tal que  $a R b$ .

y la conclusión:

(C)  $R$  es reflexiva.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en **FORM**.

## Ejercicio 10

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

- $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \vdash (\forall y)(\forall x)P(y, x)$
- $(\forall x)P(x, g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x, y) \wedge y = 'g(x))$
- $(\forall z)(P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow P(f(x, y), z)), P(x, f(y, x)), P(y, f(y, x)) \vdash P(f(x, y), f(y, x))$
- $\vdash (\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x, y), w) \rightarrow (\exists x)(\forall w)P(x, w)$
- $(\forall x)(\forall y)P(y, f(x, y)) \vdash (\forall y)(\forall x)P(x, f(y, x))$
- $\vdash (\forall x)\neg P(x, x) \rightarrow \neg(\exists x)(\exists y)(P(x, y) \wedge x = 'y)$

## Ejercicio 11

- Demuestre  $\vdash \forall x \exists y \neg P(x, y) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x, y)$ .
- Demuestre que  $\not\vdash \neg(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)\neg P(x, y)$

## Ejercicio 12

Considere las siguientes oraciones:

- Toda persona que ingrese al país que no sea VIP es vigilada por algún agente.
- Algunos traficantes ingresaron al país y sólo fueron vigilados por otro traficante.
- Ningún traficante es VIP.

- ¿Qué conclusión preocupante puede obtener de las frases anteriores?.
- Represente las frases de arriba como fórmulas de **FORM**. Indique cuál es el tipo de similitud considerado.
- Represente la conclusión como una fórmula de **FORM**.
- Escriba una derivación que compruebe la validez de la conclusión dada.