# Práctico 8

## *Deducción Natural e Identidad - Lógica de Predicados*

**Consideraciones generales:**
En todas las derivaciones que se construyan, se debe explicitar:

- el nombre de las reglas aplicadas
- la regla asociada a cada cancelación de hipótesis
- cuando corresponda, el cumplimiento de las restricciones asociadas a las reglas.
- En los ejercicios 6, 9 y 12 se proponen ejercicios donde se describe una cierta realidad mediante oraciones en lenguaje natural. Se deberá *codificar* dichas oraciones en lógica de primer orden, definiendo un tipo de similaridad apropiado. Se deberán justificar ciertas conclusiones mediante derivaciones.

## Ejercicio 1

Dada la siguiente derivación para $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, donde $x \notin FV(\varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi] \quad [\varphi]}{\varphi} \qquad \dfrac{[\varphi]}{\exists x\varphi}}{\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi}$$

Indique las reglas aplicadas en cada paso, justificando además a que aplicación de regla corresponde cada hipótesis cancelada

## Ejercicio 2

Indique por qué las siguientes derivaciones no son correctas.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\exists x P(x,y)}{\exists x P(x,y)}\,E\forall \qquad [P(x,y)]_1}{P(x,y)}\,E\exists_1}{\forall y P(x,y)}\,I\forall}{\exists x\forall y P(x,y)}\,I\exists$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\exists x P(x,y)}{\exists x P(x,y)}\,E\forall \qquad \dfrac{[P(x,y)]_1}{\forall y P(x,y)}\,I\forall}{\forall y P(x,y)}\,E\exists_1}{\exists x\forall y P(x,y)}\,I\exists$$

## Ejercicio 3

Sean $\varphi$, $\psi$, fórmulas de $FORM$ Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

a. $\forall x(\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
b. $\forall x\varphi \vdash \neg\forall x(\neg\varphi)$
c. $\forall x\varphi \vdash \forall z\varphi[z/x]$, donde $z$ no ocurre en $\varphi$.
d. $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall y\forall x\varphi$
e. $\forall x\forall y\varphi \vdash \forall x\varphi[x/y]$, donde $x \notin BV(\varphi)$
f. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
g. $\exists x\varphi, \forall x(\varphi \to \psi) \vdash \exists x\psi$

## Ejercicio 4

Sean $\varphi$, $\psi$ fórmulas de $FORM$. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

a. $\vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$, donde $x \notin FV(\varphi)$
b. $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$
c. $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi)$, donde $x \notin FV(\varphi)$
d. $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$, donde $x \notin FV(\psi)$
e. $\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x(\neg\varphi)$
f. $\vdash \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi)$

## Ejercicio 5

Sean $\varphi$, $\psi$ fórmulas de $FORM$. Construya derivaciones para los siguientes teoremas del cálculo de predicados.

a. $\vdash \neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x(\neg\varphi)$
b. $\vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \vee \psi$, donde $x \notin FV(\psi)$
c. $\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \to \psi)$, donde $x \notin FV(\psi)$
d. $\vdash \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \exists x\psi)$, donde $x \notin FV(\varphi)$
e. $\vdash \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

## Ejercicio 6

Considerando el ejercicio 2 del práctico 6:

a. Dada la siguiente definición para la relación de *hermanos*:

   > Dos personas son hermanos si y sólo si son dos personas distintas que tienen la misma madre.

   I. Escriba la definición anterior como una fórmula de `FORM`.
   II. Escriba una derivación que permita concluir que la relación *hermanos* es irreflexiva y simétrica.

b. Considere las siguientes hipótesis:

($H_1$) La relación ser hermano es simétrica
($H_2$) Los hermanos de los estudiantes son también estudiantes
($H_3$) Los hermanos de Juan estudian
($H_4$) Juan no estudia

y la conclusión:

(C) Juan no tiene hermanos

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

c. Considere las siguientes hipótesis:

($H_1$) Toda persona es estudiante o tiene un hermano que lo es.
($H_2$) Juan tiene sólo un hermano y este no estudia.

y la conclusión:

(C) Juan estudia.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

## Ejercicio 7

Demuestre que:

a. $(\forall x)(\forall y)x =' y \vdash (\forall y)(\forall x)y =' x$
b. $\vdash (\forall z)(z =' x \leftrightarrow z =' y) \to x =' y$
c. $\vdash (\forall x)(\exists y)x =' y$
d. $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg x =' y \to \neg x =' z \lor \neg y =' z)$
e. $\overline{\forall}\varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\forall y)(x =' y \to \varphi[y/x]))$
f. $\overline{\forall}\varphi \in FORM$, si $y \notin V(\varphi)$, entonces $\vdash (\forall x)(\varphi \leftrightarrow (\exists y)(x =' y \land \varphi[y/x]))$

## Ejercicio 8

Construya derivaciones que demuestren las siguientes afirmaciones.

a. $\vdash \neg(\exists x)\neg(\exists y)f(x) =' y$
b. $\vdash (\exists x)(\exists y)(\neg f(x) =' f(y)) \to (\exists x)(\exists y)(\neg x =' y)$
c. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(\neg x =' y)), (\forall x)(P(x) \to (\forall y)f(x) =' y), (\forall x)P(x) \vdash \bot$
d. $\vdash (\forall x)(\forall y)x =' y \to \neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \land \neg P(y))$
e. Sea $\varphi$ una fórmula cualquiera, $\vdash (\forall x)((\forall y)(x =' y \to \neg f(x) =' f(y)) \to \varphi)$

## Ejercicio 9

Si una relación $R$ binaria en un conjunto $\mathcal{C}$ cumple con

($H_1$) $R$ es simétrica.

($H_2$) $R$ es transitiva

($H_3$) Para Todo elemento $a \in \mathcal{C}$, existe $b \in \mathcal{C}$ tal que $a\ R\ b$.

y la conclusión:

(C) $R$ es reflexiva.

Formalizar el razonamiento anterior mediante una derivación en `FORM`.

## Ejercicio 10

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

a. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \vdash (\forall y)(\forall x)P(y,x)$
b. $(\forall x)P(x,g(x)) \vdash (\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge y =' g(x))$
c. $(\forall z)(P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow P(f(x,y),z)), P(x,f(y,x)), P(y,f(y,x)) \vdash P(f(x,y),f(y,x))$
d. $\vdash (\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w) \rightarrow (\exists x)(\forall w)P(x,w)$
e. $(\forall x)(\forall y)P(y,f(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)P(x,f(y,x))$
f. $\vdash (\forall x)\neg P(x,x) \rightarrow \neg(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \wedge x =' y)$

## Ejercicio 11

a. Demuestre $\vdash \forall x \exists y \neg P(x,y) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x,y)$.
b. Demuestre que $\nvdash \neg(\forall x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)\neg P(x,y)$

## Ejercicio 12

Considere las siguientes oraciones:

(I) Toda persona que ingrese al país que no sea VIP es vigilada por algún agente.

(II) Algunos traficantes ingresaron al país y sólo fueron vigilados por otro traficante.

(III) Ningún traficante es VIP.

a. ¿Qué conclusión preocupante puede obtener de las frases anteriores?.
b. Represente las frases de arriba como fórmulas de `FORM`. Indique cuál es el tipo de similaridad considerado.
c. Represente la conclusión como una fórmula de `FORM`.
d. Escriba una derivación que compruebe la validez de la conclusión dada.