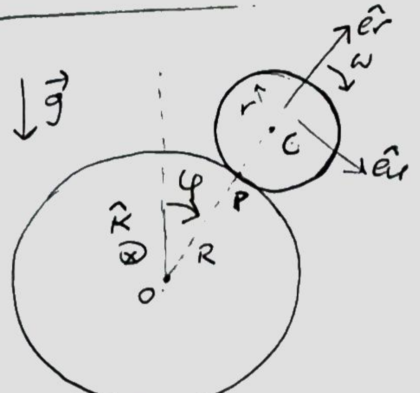
Ejercicio VI.9



$\left(\begin{array}{l} R = 3/4\, a \\ r = 1/4\, a \end{array} \right)$

a) Tenemos un disco que se mueve apoyado sobre otro, de forma que para especificar la posición de su centro (C), que se mueve sobre una circunferencia de radio $R+r$, basta con dar una coordenada angular (φ). Luego, la especificación del movimiento del disco se completa dando un ángulo de giro propio (llamémosle ϑ) a partir del cual la velocidad angular del disco es:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \dot{\vartheta} \hat{k}$$

▪ Usando el vínculo de que el disco rueda sin deslizarse, vamos a hallar una relación entre φ y ϑ, lo que deja un problema con un grado de libertad (mientras se verifique la rodadura sin deslizamiento) [válido para partes a), b)]

Rodadura sin deslizamiento: la velocidad del punto P como perteneciente a cada rígido en contacto es la misma:

$$\underbrace{\vec{v}_P^{\,(\text{disco } R)}}_{=0 \text{ (disco fijo)}} = \vec{v}_P^{\,(\text{disco } r)}$$

esta velocidad la puedo vincular con la velocidad del punto C del mismo disco de radio r:

$$\vec{v}_C = (R+r)\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi = a\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi$$

Aplicando la distribución de velocidades entre los puntos del disco de radio r:

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_P}_{=0\ (\text{r.s.d.})} + \vec{\omega} \times (C-P) = 0 + \dot{\vartheta}\hat{k} \times (r\, \hat{e}_r) = r\dot{\vartheta}\, \hat{e}_\varphi = \frac{a}{4}\dot{\vartheta}\, \hat{e}_\varphi$$

Luego: $a\dot{\varphi} = \frac{a}{4}\dot{\vartheta}$: $\boxed{\dot{\vartheta} = 4\dot{\varphi}}$: $\boxed{\omega = 4\dot{\varphi}}$

($\xrightarrow{\text{integro en } t}$: $\vartheta - \vartheta_0 = 4(\varphi - \varphi_0)$: tengo un ángulo en función del otro)

$\Rightarrow$ Podemos trabajar ahora con un sistema que tiene un solo grado de libertad : $\{\varphi\}$

El sistema además es conservativo : $\boxed{\dot{E} = 0}$, por lo que podemos ver la evolución de φ a partir de la conservación de la energía

¿por qué?

$E = T + U$; $\begin{cases} \cdot \text{ como } \vec{v}_P = 0 \text{, puedo considerar una rotación pura para } T \\ \cdot \text{ la única fuerza externa al rígido que trabaja es el peso} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \; ; \; I_P \overset{\text{(Steiner)}}{=} I_C + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 = \frac{3ma^2}{32} \\ \omega = 4\dot{\varphi} \; : \; T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{32}\right) ma^2\, 16\dot{\varphi}^2 = \boxed{\frac{3}{4} ma^2 \dot{\varphi}^2} \\ U = mg(R+r)\cos\varphi = \boxed{mga\cos\varphi} \end{cases}$$

(tomando como referencia la altura de O)

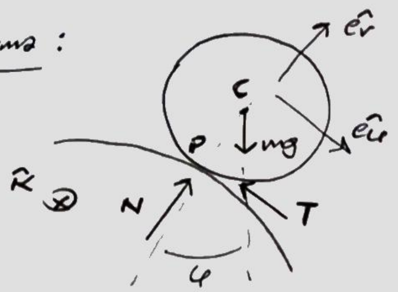
$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{3}{4} ma^2 \dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi} = \text{cte.}$$

(veremos más adelante el valor de E)

derivando en el tiempo:

$$\frac{3}{2} ma^2 \cancel{\dot{\varphi}} \ddot{\varphi} - mga \operatorname{sen}\varphi\, \cancel{\dot{\varphi}} = 0 \; : \; \boxed{\ddot{\varphi} - \tfrac{2}{3}\, g/a \operatorname{sen}\varphi = 0}$$

· Otra forma:



Las reacciones ejercidas por el disco fijo sobre el móvil $(\vec{T}, \vec{N})$ están aplicadas sobre el punto P; tomando la 2da Cardinal al disco desde ese punto:

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_P = m\vec{v}_G \times \dot{P} + \vec{M}_P^{(ext)}}$$

$G = C \Rightarrow \vec{v}_G = a\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$;

$\dot{P} = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$ $\leftarrow$! el punto geométrico recorre una circunferencia de radio R

$\Rightarrow \vec{v}_G \times \dot{P} = 0 \; : \; \dot{\vec{L}}_P = \vec{M}_P^{(ext)}$ (y en el momento $\vec{M}_P^{(ext)}$ sólo interviene el peso)

Momento angular del disco visto desde P:

$$\vec{L}_P = m(G-P)\times\vec{v}_P + \mathbb{I}_P\vec{\omega} = \mathbb{I}_P\vec{\omega} = I_P\,\omega\hat{k} \; : \; \dot{\vec{L}}_P = I_P\,\dot{\omega}\hat{k}$$

($\vec{v}_P = 0$ mientras r.s.d. vale)

$\dot{\vec{L}}_P = I_P\, 4\ddot{\varphi}\,\hat{k}$ | $I_P\, 4\ddot{\varphi} = mgr\operatorname{sen}\varphi = mg\, a/4 \operatorname{sen}\varphi$:

$\vec{M}_P^{(ext)} = mgr\operatorname{sen}\varphi\,\hat{k}$ | $I_P = 3/32\; ma^2$

$$\boxed{\ddot{\varphi} - 2/3\; g/a \operatorname{sen}\varphi = 0}$$

(preintegrado adecuadamente lleva a E=cte)

Obs: en ninguno de los planteos anteriores intervinieron $\vec{T}$ o $\vec{N}$, vamos a necesitar involucrarlas en b)

b) Mientras el disco rueda sin deslizarse, la fuerza de rozamiento en el contacto debe ser estática:

$|\vec{T}| \leq f |\vec{N}|$ (esta es entonces la condición para garantizar la rodadura sin deslizamiento)

¿ $\vec{T}, \vec{N}$? Podemos recurrir a la Primera Cardinal:

$$\begin{cases} \hat{e_r}) & N - mg\cos\varphi = m\vec{a}_G \cdot \hat{e_r} = -m\underbrace{(R+r)}_{a}\dot{\varphi}^2 \\ \hat{e_\varphi}) & mg\,\mathrm{sen}\varphi - T = m\vec{a}_G \cdot \hat{e_\varphi} = m\underbrace{(R+r)}_{a}\ddot{\varphi} \end{cases}$$

(G = C que se mueve sobre un cfa. de radio R+r)

- De la proyección de la Primera Cardinal en $\hat{e_\varphi}$ tenemos: $T = mg\,\mathrm{sen}\varphi - ma\ddot{\varphi}$

sustituyendo $\ddot{\varphi}$ de la ecuación de movimiento: $T = mg\,\mathrm{sen}\varphi - m\cancel{a}\left(\frac{2}{3}\, g/\cancel{a}\ \mathrm{sen}\varphi\right)$

$$\boxed{T = \frac{1}{3} mg\,\mathrm{sen}\varphi}$$

- Para hallar N, de la proyección en $\hat{e_r}$:

$N = mg\cos\varphi - ma\dot{\varphi}^2$; podemos hallar $\dot{\varphi}^2$ a partir de la conservación de E:

$E = \frac{3}{4} ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi$, inicialmente $\varphi \simeq 0$, $\dot{\varphi} \simeq 0$: $E = mga$

$\Rightarrow \frac{3}{4} ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi = mga$: $\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}\, g/a\ (1 - \cos\varphi)}$

$\Rightarrow N = mg\cos\varphi - ma\left(\frac{4}{3}\, g/a\ (1-\cos\varphi)\right)$

$$\boxed{N = \frac{1}{3} mg\,(7\cos\varphi - 4)}$$

Volviendo a la condición de rodadura sin deslizamiento (fricción estática)

$\left|\underbrace{\tfrac{1}{3} \cancel{mg}\,\mathrm{sen}\varphi}_{>0}\right| \leq \underbrace{f}_{=1} \left|\tfrac{1}{3}\cancel{mg}\,(7\cos\varphi - 4)\right| \Rightarrow$ supongamos $7\cos\varphi - 4 > 0$

$\mathrm{sen}\varphi \leq 7\cos\varphi - 4$, el ángulo para el cual el disco comienza a deslizarse es para el cual se cumple la igualdad:

$$\boxed{\mathrm{sen}\varphi = 7\cos\varphi - 4}$$

Elevo al cuadrado:

$$\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi} = (7\cos\varphi - 4)^2 = 49\cos^2\varphi + 16 - 56\cos\varphi$$

¿cómo descarto la otra raíz?

$$\Rightarrow \quad 50\cos^2\varphi - 56\cos\varphi + 15 = 0 : \quad \cos\varphi_0 = \frac{56 + \sqrt{(56)^2 - 4(15)(50)}}{2(50)}$$

$$\boxed{\cos\varphi_0 = \frac{56 + \sqrt{136}}{100}}$$

c) Una vez que se alcanza $\varphi = \varphi_0$:

la fricción estática no puede mantener el no deslizamiento entre los discos

$\Rightarrow$ { se rompe el vínculo entre φ y θ

la naturaleza de la fricción es diferente, pasa a ser dinámica; $\boxed{T = \mu N}$ (i)

. Tenemos que tratar con un grado de libertad más: θ, que no tiene vínculo con φ

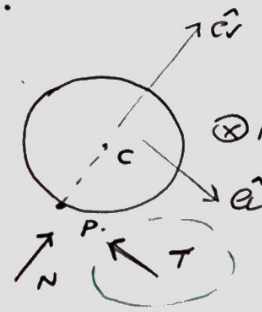
. Podemos seguir usando las ecuaciones que salen de la Primera Cardinal:

$$\boxed{\begin{aligned} N - mg\cos\varphi &= -ma\dot\varphi^2 \quad (ii)\\ mg\sin\varphi - T &= ma\ddot\varphi \quad (iii)\end{aligned}}$$

. No podemos usar la conservación de E ¿por qué?

$\Rightarrow$ Tenemos que recurrir a la Segunda Cardinal, tomándola desde C:

$$\dot{\vec L}_C = \underbrace{m\vec v_G \times \underbrace{\dot C}_{=\dot G = \vec v_G}}_{=0} + \vec M_C^{(ext)} = \vec M_C^{(ext)} = rT\hat k$$



$$\vec L_C = \vec L_G = \mathbb{I}_G\vec\omega = I_G\dot\theta\hat k = \frac{1}{2}mr^2\dot\theta\hat k$$

$$\Rightarrow \dot{\vec L}_C = \frac{1}{2}mr^2\ddot\theta\hat k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\cancel{r}\ddot\theta = \cancel{r}T : \quad \boxed{\frac{ma}{8}\ddot\theta = T} \quad (iv)$$

$\vec T = -T\hat e_\varphi$, suponemos que $\vec v_P \cdot \hat e_\varphi > 0$ mientras el disco se desliza (tenemos que verificarlo después!)

En el conjunto (i-iv) puedo eliminar N, T y quedarme con las ecuaciones de movimiento del sistema:

(iv) en (iii) : $mg\,\text{sen}\,\varphi - \mu N = m a \ddot{\varphi}$

A partir de (ii) : $N = mg\cos\varphi - m a \dot{\varphi}^2$ $\Big|\xrightarrow{\quad}$ elimino N

$$mg\,\text{sen}\,\varphi - \overset{=1}{\mu}\left(mg\cos\varphi - m a\dot{\varphi}^2\right) = m a \ddot{\varphi} :$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 = g/a\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi)} \quad (\text{I})$$

Luego, eliminando T entre (iii) y (iv):

$$mg\,\text{sen}\,\varphi - \frac{m a}{8}\ddot{\theta} = m a\ddot{\varphi} : \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{1}{8}\ddot{\theta} = g/a\,\text{sen}\,\varphi} \quad (\text{II})$$

d) Los discos están en contacto mientras $N \geq 0$, vamos a encontrar el ángulo φ_d en que se produce el desprendimiento; para ello tenemos en (iii) a N, pero necesitamos $\dot{\varphi}^2(\varphi)$ ⇒ tenemos que resolver (I)

Cambio de variables: $\dot{\varphi}^2 = u(\varphi)$: (derivo ent) $2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} \underset{(\text{I})}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi} - u = g/a\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi)} \quad (\text{I}')$$

$$u = u_H + u_P \; ; \quad \frac{1}{2}\frac{du_H}{d\varphi} - u_H = 0 \; : \; u_H(\varphi) = \mathbb{C}e^{2\varphi}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du_P}{d\varphi} - u_P = g/a\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi) \; : \; u_P = A\,\text{sen}\,\varphi + B\cos\varphi$$

$$\underset{(\text{sustituyo})}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{2}(A\cos\varphi - B\,\text{sen}\,\varphi) - (A\,\text{sen}\,\varphi + B\cos\varphi) = g/a\,(\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi)$$

agrupo en $\text{sen}\,\varphi$, $\cos\varphi$ que son funciones linealmente independientes!

$$\underbrace{(g/a + B/2 + A)}_{=0}\,\text{sen}\,\varphi - \underbrace{(g/a + A/2 - B)}_{=0}\cos\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in [\varphi_0, \varphi_d]$$

$$\begin{cases} g/a + B/2 + A = 0 \\ -g/a + B - A/2 = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} A &= -6/5\; g/a \\ B &= 2/5\; g/a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(\varphi) = \mathbb{C}e^{2\varphi} - \frac{6}{5}\,g/a\,\text{sen}\,\varphi + \frac{2}{5}\,g/a\cos\varphi \; ;$$

hallamos ahora $\mathbb{C}$:

$u(\varphi_0) = \dot\varphi^2(\varphi_0)$: podemos hallar $\dot\varphi^2(\varphi_0)$ usando la forma de $\dot\varphi^2$ de las partes a), b) (tenemos continuidad en $\dot\varphi$ entre no deslizamiento y deslizamiento)

¿qué pasaría si no fuera así?

$\dot\varphi^2 = \frac{4}{3} g/a (1-\cos\varphi)$ (a, b) :

$\dot\varphi^2(\varphi_0) = \frac{4}{3} g/a (1-\cos\varphi_0)$

$\Rightarrow \; C e^{2\varphi_0} - \frac{6}{5} g/a \,\text{sen}\varphi_0 + \frac{2}{5} g/a \cos\varphi_0 = \frac{4}{3} g/a (1-\cos\varphi_0)$:

$$C = g/a \, \underbrace{e^{-2\varphi_0}\left[\frac{4}{3}(1-\cos\varphi_0) + \frac{6}{5}\,\text{sen}\varphi_0 - \frac{2}{5}\cos\varphi_0\right]}_{\approx \frac{1}{5}} \approx \frac{1}{5} g/a$$

← hacer cuentas ... !

$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi^2(\varphi) \cong \frac{1}{5} g/a \left(e^{2\varphi} - 6\,\text{sen}\varphi + 2\cos\varphi\right)} \; (I'')$$

$\underset{(iii)}{\Rightarrow} \; N(\varphi) \approx mg\left[\cos\varphi - \frac{1}{5}\left(e^{2\varphi} - 6\,\text{sen}\varphi + 2\cos\varphi\right)\right]$

$$\boxed{N(\varphi) \approx mg\left[\frac{3}{5}\cos\varphi + \frac{6}{5}\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{5}e^{2\varphi}\right]}$$

$$N(\varphi_d) = 0 : \; \boxed{3\cos\varphi_d + 6\,\text{sen}\varphi_d - e^{2\varphi_d} \approx 0}$$

$\vec v_P \cdot \hat e_\varphi > 0$: podemos razonablemente asumirlo, pero si no :-

Obs: desde la parte c) en adelante hemos supuesto un sentido para la fricción dinámica que tenemos que verificar $\vec T = -T\hat e_\varphi$, suponiendo $\vec v_P \cdot \hat e_\varphi > 0$:

$\vec v_P = \vec v_G + \vec\omega \times (P-G) = a\dot\varphi\hat e_\varphi + \dot\theta\hat k \times (-r\hat e_r) = (a\dot\varphi - r\dot\theta)\hat e_\varphi = a(\dot\varphi - \frac{1}{4}\dot\theta)\hat e_\varphi$

$\Rightarrow \vec v_P \cdot \hat e_\varphi > 0$ si $\dot\varphi - \frac{1}{4}\dot\theta > 0 \;\; \forall \varphi \in (\varphi_0, \varphi_d]$;

↳ puedo hallarlo en términos de φ (I'')

Combinando (I) y (II) : $\frac{1}{8}\ddot\theta + \dot\varphi^2 = g/a \cos\varphi$: $\ddot\theta = 8\left(g/a\cos\varphi - \dot\varphi^2\right)$

$\overset{(I'')}{\rightarrow} \; \ddot\theta = 8 g/a \left(\frac{3}{5}\cos\varphi + \frac{6}{5}\,\text{sen}\varphi - e^{2\varphi}\right)$; de (I'') tenemos $\dot\varphi = f(\varphi)$

$\frac{d\dot\theta}{dt} = \frac{d\dot\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot\theta}{d\varphi} f(\varphi)$: $\frac{d\dot\theta}{d\varphi} = g(\varphi)$, que puedo eventualmente integrar, hallar $\dot\theta(\varphi)$ y probar la desigualdad ...