

Comunicaciones Digitales

Práctico 8

Teoría de la Información: capacidad del canal

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ♦ básica, ★ media, * avanzada, y ✱ difícil.

★ Ejercicio 1

Probaremos que para un canal discreto y sin memoria (DMC) se cumple que:

$$I\{\mathbf{X}^n; \mathbf{Y}^n\} \leq \sum_k I\{X_k; Y_k\},$$

y que la igualdad se da cuando los X_k son independientes.

(a) Pruebe que para un DMC se cumple que

$$H\{\mathbf{Y}^n\} \leq \sum_k H\{Y_k\}.$$

(b) Pruebe que para un DMC también se cumple que

$$H\{\mathbf{X}^n | \mathbf{Y}^n\} = \sum_{k=1}^n H\{X_k | Y_k\}.$$

(c) Termine la demostración utilizando los dos resultados anteriores.

★ Ejercicio 2 (2.20)

Considere una símbolo aleatorio X de alfabeto $\{1, 2, \dots, M\}$ y distribución de probabilidad $\{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. El objetivo de este ejercicio es llegar a una cota estrechamente relacionada con la desigualdad de Fano, entre la entropía $H\{X\}$ y la probabilidad p_1 del primer símbolo.

Sea Y un símbolo aleatorio que vale 1 si $X = 1$ y 0 en otro caso.

- Expresé $H\{Y\}$ en términos de la entropía binaria $\Omega(\alpha) = -\alpha \log(\alpha) - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$.
- ¿Cuánto vale la entropía condicional $H\{X | Y = 1\}$?
- Muestre que $H\{X | Y = 0\} \leq \log(M - 1)$, y muestre que es posible lograr la igualdad eligiendo correctamente los valores p_2, \dots, p_M .
- Combine los resultados de las dos partes anteriores para lograr una cota superior de $H\{X | Y\}$.
- Encuentre la relación entre $H\{X\}$ y $H\{X, Y\}$.

- (f) Use $H\{Y\}$ y $H\{X|Y\}$ para lograr una cota superior de $H\{X\}$, y muestre que es posible lograr la igualdad eligiendo correctamente los valores de p_2, \dots, p_M .
- (g) Para el mismo valor de M que se ha venido usando hasta el momento, sean p_1, \dots, p_M arbitrarios, y sea $p_{max} = \max\{p_1, \dots, p_M\}$. ¿Es la cota hallada en la parte anterior aun válida si reemplaza p_1 por p_{max} ? Justifique su respuesta.

★ Ejercicio 3

Se pretende transmitir imágenes de televisión digital a partir de una fuente que genera una matriz de 640×480 elementos de imagen (píxeles), donde cada pixel puede tomar 32 valores de intensidad. Suponga que se generan 30 imágenes por segundo. Todos los píxeles se consideran independientes, y los niveles de intensidad equiprobables.

- (a) Hallar la velocidad de transferencia de información $R(\text{bit/s})$.
- (b) Hallar la capacidad del canal en bits por símbolo, o bits por uso del canal, si la SNR_R vale 35 dB.
- (c) ¿Qué pasa si transmitimos en fase y cuadratura? Por ejemplo una modulación QAM.
- (d) Si utilizamos un ancho de banda de 6 MHz, y transmitimos en fase y cuadratura, hallar la capacidad del canal en bits por segundo. ¿La transmisión planteada es viable?
- (e) En rigor la norma ITU-R BT.601, que define los mecanismos para digitalizar señales de televisión en calidad estándar, plantea el uso de 864×625 píxeles, a una tasa de 25 cuadros por segundo. Se utilizan 10 bits por píxel de luminancia (blanco y negro) y otros 10 bits para enviar la información de color. ¿Qué bitrate total lograría un sistema real? Discuta el resultado.