Resolución del ejercicio 1

Práctico 8

En la figura se muestra una espira con una resistencia R colocada en una zona del espacio en que existe un campo magnético uniforme B. Sea $\Phi_B(0)$ el flujo para la espira en $t = 0$. Se sabe que el campo magnético B varía de un modo continuo, pero no especificado, tanto en magnitud como en orientación de forma que en el tiempo t el flujo está representado por $\Phi_B(t)$.

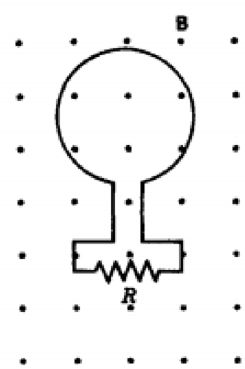
a) Demuestre que la carga neta $q(t)$ que ha pasado por el resistor R en el tiempo t es

$$q(t) = \frac{1}{R}[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)]$$

y que este resultado no depende de la manera precisa en que haya cambiado B.

b) Si $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$ tenemos que $q(t) = 0$. ¿Es necesariamente cero la corriente inducida para todo instante de tiempo en el intervalo de 0 a t?

c) Suponga ahora que la espira tiene un área de 12.2cm^2 y 125 vueltas. La resistencia R total del circuito es de 13.3Ω. El campo magnético externo B cambia de 1.57T en un sentido a 1.57T en el sentido opuesto, en 2.88ms. ¿Cuánta carga fluye por el circuito?



a) Al haber un campo magnético que varía en el tiempo, hay una variación en el flujo de campo magnético a través de la superficie que tiene como borde la espira. Esta variación en el flujo genera una fem inducida en la espira, de acuerdo con la ley de Faraday

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Esta fem inducida genera una corriente en el circuito, dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La intensidad en la resistencia es la carga por unidad de tiempo que atraviesa la resistencia. Entonces integrando la intensidad entre 0 y t, obtenemos la carga total que atravesó la resistencia en ese intervalo de tiempo

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt = -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{d\Phi_B}{dt}dt = -\frac{1}{R}\left[\Phi_B(t) - \Phi_B(0)\right] = \frac{1}{R}\left[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)\right]$$

Recordamos ahora que la expresión para el flujo de campo magnético a través de una superficie S es

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Entonces, si el campo magnético depende del tiempo y la superficie es fija, la dependencia del flujo con el tiempo se escribe como

$$\Phi_B(t) = \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{a}$$

Obresevamos que esta expresión en un tiempo dado, depende sólo del valor del campo en ese momento. Entonces la expresión para $q(t)$ depende sólo del valor de $\vec{B}$ en los instantes t y 0, y no de cómo haya sido el cambio de $\vec{B}$ en ese intervalo de tiempo.

b) No, que los flujos sean iguales sólo nos dice que la carga neta que circuló por la resistencia fue 0. Puede haber circulado carga primero para un lado y luego para el otro de modo que la carga neta sea 0, pero la intensidad no haya sido siempre 0.

Por ejemplo, si el módulo del campo decrece hasta llegar a 0 y luego comienza a aumentar de nuevo de modo que a tiempo t es igual que a tiempo 0, $\Phi_B(0) = \Phi_B(t)$, pero la intensidad no fue siempre 0 porque el flujo estuvo variando durante todo el intervalo de tiempo.

c) Si ahora la espira tiene N vueltas, la fem inducida es

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

ya que una espira de N vueltas se puede aproximar por N espiras superpuestas, y sobre cada una se induce una fem igual a la de la parte a). La fem inducida total es la suma de todas ellas, entonces es N veces la de la parte a).

Como la intensidad es proporcional a la fem inducida, se multiplica también por N, por lo que la carga que atravesó la resistencia entre el tiempo 0 y el tiempo t es

$$q(t) = \frac{N}{R}[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)]$$

Calculamos ahora el flujo en tiempo 0. Si tomamos la normal a la superficie de la espira como saliente, $\vec{B}(0) \cdot d\vec{a} = B(0)da$, ya que el campo en el instante inicial es saliente (como en la figura). Además como el campo es uniforme

$$\Phi_B(0) = \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(0) \cdot d\vec{a} = B(0) \int_{\mathcal{S}} da = B(0)A$$

donde A es el área total de la espira. En tiempo $t = 2.88 = \text{ms}$, como el campo tiene dirección opuesta a la normal a la superficie, el flujo es

$$\Phi_B(t) = -B(t = 2.88\text{ms})A$$

Sustituimos en la expresión para $q(t)$ y obtenemos

$$q(= 2.88\text{ms}) = \frac{NA}{R}\left[B(0) + B(= 2.88\text{ms})\right]$$

Como $B(= 2.88\text{ms}) = B(0) = B$

$$\boxed{q(= 2.88\text{ms}) = \frac{2NAB}{R} = 36\text{mC}}$$