Práctico 6

Lógica de Predicados

Ejercicio 2

Bosquejo de solución

Como primer paso debemos identificar el lenguaje de primer orden, con dos simbolos de predicado P_1 (binario) y P_2 (unario), un simbolo de funcion f_1 (unario) y un simbolo de constante c_1.

a. x_1 es la madre de Juan.
   $f_1(c_1) =' x_1$
b. x_1 es la madre de algún estudiante.
   Es equivalente a pensar que existe algún estudiante que tiene a x_1 por madre:
   $((\exists x_2)(P_2(x_2) \land f_1(x_2) =' x_1))$
c. Todos los estudiantes son hermanos de Juan.
   Si una persona es estudiante, deberá ser hermana de Juan:
   $((\forall x_1)(P_2(x_1) \to P_1(x_1, c_1))$
d. Todos los estudiantes tienen hermanos.
   Si una persona es estudiante, deberá tener al menos un hermano:
   $((\forall x_1)(P_2(x_1) \to ((\exists x_2)P_1(x_1, x_2))))$
e. Juan tiene por lo menos 2 hermanos.
   Hay al menos dos personas distintas, que son hermanas de Juan:
   $((\exists x_1)((\exists x_2)((\neg x_1 =' x_2) \land P_1(x_1, c_1) \land P_1(x_2, c_1))))$
f. x_1 es una persona tal que todos sus hermanos son estudiantes pero él no lo es.
   Todas las personas que sean hermanas de x_1 deberán ser estudiantes. Además x_1 no lo es.
   $(((\forall x_2)(P_1(x_2, x_1) \to P_2(x_2))) \land (\neg P_2(x_1)))$
g. No hay personas que sean estudiantes.
   $(\neg((\exists x_1)P_2(x_1)))$
   Equivalente a pensar que toda persona no es estudiante: $((\forall x_1)(\neg P_2(x_1)))$
h. Los estudiantes no tienen hermanos.
   Toda persona que sea estudiante no tiene ningún hermano.
   $((\forall x_1)(P_2(x_1) \to (\neg((\exists x_2)P_1(x_2, x_1)))))$

Ejercicio 9

Bosquejo de solución

a. Definimos $\texttt{TERM}_C$ de la siguiente forma:

- $c_1 \in \texttt{TERM}_C$
- Si $t \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f_1(t) \in \texttt{TERM}_C$
- Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}_C$, entonces $f_2(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}_C$

Notar que no se incluyen las variables, ya que $\texttt{TERM}_C$ es el conjunto de los términos cerrados.

b. Definimos la función F siguiendo el ERP para $\texttt{TERM}_C$.

- $F(c_1) = 1$
- $F(f_1(t)) = F(t)$
- $F(f_2(t_1, t_2)) = F(t_1) + F(t_2)$

c. Como indica la letra, utilizaremos inducción en $\texttt{TERM}_C$ para probar que para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple la propiedad:

$$P(t) := F(t) > 0$$

Paso Base.

T) $P(c_1) : F(c_1) > 0$
Demo)

Por definición de F, $F(c_1) = 1 > 0$.

Paso Inductivo 1.

H) $P(t) : F(t) > 0$
T) $P(f_1(t)) : F(f_1(t)) > 0$
Demo)

$$\begin{aligned}
&F(f_1(t)) \\
&= \text{(Por def. de } F\text{)} \\
&F(t) \\
&> \text{(Por } \mathbf{(H)}\text{)} \\
&0 \\
&\Rightarrow \\
&F(f_1(t)) > 0
\end{aligned}$$

Paso Inductivo 2.

H) $P(t_1) : F(t_1) > 0$ y $P(t_2) : F(t_2) > 0$
T) $P(f_2(t_1, t_2)) : F(f_2(t_1, t_2)) > 0$

Demo)

$$F\left(f_2\left(t_1, t_2\right)\right)$$
$= $ (Por def. de F)
$$F\left(t_1\right) + F\left(t_2\right)$$
$>$ (Por **(H)**)
$$0$$
$$\Rightarrow$$
$$F\left(f_2\left(t_1, t_2\right)\right) > 0$$

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para $\texttt{TERM}_C$, podemos afirmar que para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ se cumple que $F(t) > 0$.

Ejercicio 10

Bosquejo de solución

Antes de comenzar con las partes vamos a definir `TERM` y `FORM`.
Observar que como no hay símbolos de función ni constantes, `TERM` solo contiene variables por lo que $\texttt{TERM} = V$.
Definición inductiva de `FORM`

I $\perp \in \texttt{FORM}$

II Si $x \in V$ entonces $P(x) \in \texttt{FORM}$

III Si $x,\ y \in V$ entonces $x =' y \in \texttt{FORM}$

IV Si $\alpha \in \texttt{FORM}$ entonces $(\neg\alpha) \in \texttt{FORM}$

V Si $\alpha,\ \beta \in \texttt{FORM}$ entonces $(\alpha * \beta) \in \texttt{FORM}$

VI Si $\alpha \in \texttt{FORM}$ entonces $((\forall x_i)\alpha) \in \texttt{FORM}$

VII Si $\alpha \in \texttt{FORM}$ entonces $((\exists x_i)\alpha) \in \texttt{FORM}$

a. Siguiendo el ERP para `FORM` definimos la función $\#x_1$
$\#_{x_1} : \texttt{FORM} \to \mathbb{N}$
$\#_{x_1}(\perp) = 0$
$\#_{x_1}(P_1(x_i)) = \#_{x_1}(x_i)$
$\#_{x_1}(x_i =' x_j) = \#_{x_1}(x_i) + \#_{x_1}(x_j)$
$\#_{x_1}((\alpha * \beta)) = \#_{x_1}(\alpha) + \#_{x_1}(\beta)$
$\#_{x_1}((\neg\alpha)) = \#_{x_1}(\alpha)$
$$\#_{x_1}(((\forall x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$
$$\#_{x_1}(((\exists x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

b. Siguiendo el ERP para `FORM` definimos la función $\#x_1^b$
$\#_{x_1}^b : \texttt{FORM} \to \mathbb{N}$
$\#_{x_1}^b(\perp) = 0$

$\#^b_{x_1}(P_1(x_i)) = 0$
$\#^b_{x_1}(x_i =' x_j) = 0$
$\#^b_{x_1}((\alpha * \beta)) = \#^b_{x_1}(\alpha) + \#^b_{x_1}(\beta)$
$\#^b_{x_1}((\neg\alpha)) = \#^b_{x_1}(\alpha)$

$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#^b_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#^b_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

c. Queremos probar $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{FORM})(x_1$ está libre para y en φ entonces $\#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi))$

Demostración por PIP en $\texttt{FORM}$.

Identificación de la propiedad: $Q(\varphi) := x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi)$

Paso Base 1

T) $Q(\bot) : x_1$ libre para y en $\bot \Rightarrow \#^b_{x_1}(\bot[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\bot)$

Demo)

$$\#^b_{x_1}(\bot[x_1/y])$$
$$= \text{(definición de sustitución)}$$
$$\#^b_{x_1}(\bot)$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } \bot \Rightarrow \#^b_{x_1}(\bot[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\bot)$$

Paso Base 2

T) $Q(P(x_i)) : x_1$ libre para y en $P(x_i) \Rightarrow \#^b_{x_1}(P(x_i)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(P(x_i))$

Demo)

$$\#^b_{x_1}(P(x_i)[x_1/y])$$
$$= \text{(definición de } \#^b_{x_1}\text{)}(*)$$
$$0$$
$$= \text{(definición de } \#^b_{x_1}\text{)}$$
$$\#^b_{x_1}(P(x_i))$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } P(x_i) \Rightarrow \#^b_{x_1}(P(x_i)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(P(x_i))$$

(*)Observar que para definir $\#^b_{x_1}(P(x_i))$ no se tiene en cuenta si x_i es x_1 por lo que el resultado es independiente de la sustitución.

Paso Base 3

T) $Q(x_i =' x_j) : x_1$ libre para y en $x_i =' x_j \Rightarrow \#^b_{x_1}(x_i =' x_j[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(x_i =' x_j)$

Demo)

$$\#^b_{x_1}(x_i =' x_j[x_1/y])$$
$$= \text{(definición de } \#^b_{x_1}\text{)}(*)$$
$$0$$
$$= \text{(definición de } \#^b_{x_1}\text{)}$$
$$\#^b_{x_1}(x_i =' x_j)$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } P(x_i) \Rightarrow \#^b_{x_1}(P(x_i)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}([x_1/y])$$

(*)Observar que para definir $\#^b_{x_1}(x_i =' x_j)$ no se tiene en cuenta si x_i es x_1 por lo que el resultado es independiente de la sustitución.

Paso Inductivo 1

H) $Q(\varphi) : x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi)$

T) $Q((\neg\varphi)) : x_1$ libre para y en $(\neg\varphi) \Rightarrow \#^b_{x_1}((\neg\varphi)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}((\neg\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $(\neg\varphi)$ por lo que x_1 libre para y en φ **(A)**.

$\#^b_{x_1}((\neg\varphi)[x_1/y])$
$=$ (definición de sustitución)
$\#^b_{x_1}((\neg\varphi[x_1/y]))$
$=$ (definición de $\#^b_{x_1}$)
$\#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y])$
$=$ (hipótesis y **(A)**)
$\#^b_{x_1}(\varphi)$
$=$ (definición de $\#^b_{x_1}$)
$\#^b_{x_1}((\neg\varphi))$

Paso Inductivo 2

H) $Q(\varphi_1) : x_1$ libre para y en $\varphi_1 \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi_1[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi_1)$
$Q(\varphi_2) : x_1$ libre para y en $\varphi_2 \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi_2[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi_2)$

T) $Q((\varphi_1 * \varphi_2)) : x_1$ libre para y en $(\varphi_1 * \varphi_2) \Rightarrow \#^b_{x_1}((\varphi_1 * \varphi_2)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}((\varphi_1 * \varphi_2))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $(\varphi_1 * \varphi_2)$ por lo que x_1 libre para y en φ_1 **(A)** y x_1 libre para y en φ_2 **(B)**.

$\#^b_{x_1}((\varphi_1 * \varphi_2)[x_1/y])$
$=$ (definición de sustitución)
$\#^b_{x_1}((\varphi_1[x_1/y] * \varphi_2[x_1/y]))$
$=$ (definición de $\#^b_{x_1}$)
$\#^b_{x_1}(\varphi_1[x_1/y]) + \#^b_{x_1}(\varphi_2[x_1/y])$
$=$ (hipótesis, **(A)** y **(B)**)
$\#^b_{x_1}(\varphi_1) + \#^b_{x_1}(\varphi_2)$
$=$ (definición de $\#^b_{x_1}$)
$\#^b_{x_1}((\varphi_1 * \varphi_2))$

Paso Inductivo 3

H) $Q(\varphi) : x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi)$

T) $Q(((\forall x_i)\varphi)) : x_1$ libre para y en $((\forall x_i)\varphi) \Rightarrow \#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $((\forall x_i)\varphi)$.
Repasando la definición de libre para, esto quiere decir que:

a) $y \notin \mathrm{FV}(((\forall x_i)\varphi))$
o
b) $x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)$ y x_1 está libre para y en φ

Separaremos en casos según la definición de libre para:

Caso a)

$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi)[x_1/y])$$
$$= (y \notin \mathrm{FV}(((\forall x_i)\varphi)) \text{ y def sustitución})$$
$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi))$$

Caso b)

$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi)[x_1/y])$$
$$= (\text{no se cumple } y \notin \mathrm{FV}(((\forall x_i)\varphi)) \text{ por lo que } y \neq x_i \ (*))$$
$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi[x_1/y]))$$
$$= (\text{definición de } \#^b_{x_1} \text{ y } x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)\ )$$
$$\#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y])$$
$$= (\text{ hipótesis y } x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi)$$
$$\#^b_{x_1}(\varphi)$$
$$= (\text{definición de } \#^b_{x_1} \text{ y } x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)\ )$$
$$\#^b_{x_1}(((\forall x_i)\varphi))$$

(*) Si no se cumple $y \notin \mathrm{FV}(((\forall x_i)\varphi))$ es porque o bien $y \in \mathrm{FV}(((\forall x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$ o bien $y \notin V(((\forall x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$. Observar que si se cumplen ambos casos a la vez, la demostración para el **Caso a)** siempre vale.

Paso Inductivo 4

H) $Q(\varphi) : x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi)$

T) $Q(((\exists x_i)\varphi)) : x_1$ libre para y en $((\exists x_i)\varphi) \Rightarrow \#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi)[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(((\exists x)\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $((\exists x_i)\varphi)$.

Repasando la definición de libre para, esto quiere decir que:

a) $y \notin \mathrm{FV}(((\exists x_i)\varphi))$

o

b) $x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)$ y x_1 está libre para y en φ

Separaremos en casos según la definición de libre para:

Caso a)

$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi)[x_1/y])$$
$$= (y \notin \mathrm{FV}(((\exists x_i)\varphi)) \text{ y def sustitución})$$
$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi))$$

Caso b)

$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi)[x_1/y])$$
$$= (\text{no se cumple } y \notin \mathrm{FV}(((\exists x_i)\varphi)) \text{ por lo que } y \neq x_i \ (*))$$
$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi[x_1/y]))$$
$$= (\text{definición de } \#^b_{x_1} \text{ y } x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)\ )$$
$$\#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y])$$
$$= (\text{ hipótesis y } x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi)$$
$$\#^b_{x_1}(\varphi)$$
$$= (\text{definición de } \#^b_{x_1} \text{ y } x_i \notin \mathrm{FV}(x_1)\ )$$
$$\#^b_{x_1}(((\exists x_i)\varphi))$$

(*) Si no se cumple $y \notin \mathrm{FV}(((\exists x_i)\varphi))$ es porque o bien $y \in \mathrm{FV}(((\exists x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$ o bien $y \notin V(((\exists x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$. Observar que si se cumplen ambos casos a la vez, la demostración para el **Caso a)** siempre vale.

Entonces, como se cumplen las hipótesis del PIP podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \mathtt{FORM})(x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi \text{ entonces } \#^b_{x_1}(\varphi[x_1/y]) = \#^b_{x_1}(\varphi))$$

Ejercicio 13

Bosquejo de solución

a. Teniendo en cuenta el tipo de similaridad del lenguaje, definimos `TERM` como:

- $x_i \in \texttt{TERM}$ $(i \in \mathbb{N})$
- Si $t \in \texttt{TERM}$, entonces $f(t) \in \texttt{TERM}$
- Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}$, entonces $g(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}$
- Si $t_1, t_2 \in \texttt{TERM}$, entonces $h(t_1, t_2) \in \texttt{TERM}$

b. Definimos la función C siguiendo el ERP para `TERM`, y además cumpliendo el requisito de que la función debe ser biyectiva. Esto ultimo nos indica que todas las fórmulas de $\texttt{PROP}_{\neg,\wedge,\vee}$ deben ser alcanzadas por la función, y que si aplicamos C a dos términos distintos, obtenemos imágenes distintas.

- $C(x_i) = p_i$
- $C(f(t)) = (\neg C(t))$
- $C(g(t_1, t_2)) = (C(t_1) \wedge C(t_2))$
- $C(h(t_1, t_2)) = (C(t_1) \vee C(t_2))$

Podemos verificar fácilmente que la función cumple que $C(g(x_1, x_3)) = (p_1 \wedge p_3)$.

c. Teniendo en cuenta la siguiente propiedad vista en práctico 3, la cual es una de las leyes de De Morgan:

$$\varphi \vee \psi \ eq \ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Definimos la función R siguiendo el ERP para `TERM`:

- $R(x_i) = x_i$
- $R(f(t)) = f(R(t))$
- $R(g(t_1, t_2)) = g(R(t_1), R(t_2))$
- $R(h(t_1, t_2)) = f(g(f(R(t_1)), f(R(t_2))))$

d. Utilizaremos el PIP para `TERM` y los conocimientos obtenidos sobre semántica de la lógica proposicional del práctico 3; en particular, la ley de De Morgan mencionada antes.

Identificación de la propiedad: $P(t) := C(t) \ eq \ C(R(t))$.

Paso Base

T) $P(x_i) : C(x_i) \ eq \ C(R(x_i))$

Demo)

(Por lo visto en práctico 3)

$\models p_i \leftrightarrow p_i$

$\Rightarrow$ (Por definición de eq)

$p_i \ eq \ p_i$

$\Rightarrow$ (Por definición de C)

$C(x_i) \ eq \ C(x_i)$

$\Rightarrow$ (Por definición de R)

$C(x_i) \ eq \ C(R(x_i))$

Paso Inductivo 1

H) $P(t) : C(t) \ eq \ C(R(t))$

T) $P(f(t)) : C(f(t)) \ eq \ C(R(f(t)))$

Demo)

$C(f(t))$

eq (Por def. de C)

$(\neg C(t))$

eq (Por **(H)** y Teorema de Sustitución)

$(\neg C(R(t)))$

eq (Por def. de C)

$C(f(R(t)))$

eq (Por def. de R)

$C(R(f(t)))$

$\Rightarrow$ (transitiva eq)

$C(f(t)) \ eq \ C(R(f(t)))$

Paso Inductivo 2

H) $P(t_1) : C(t_1) \ eq \ C(R(t_1))$ y $P(t_2) : C(t_2) \ eq \ C(R(t_2))$

T) $P(g(t_1, t_2)) : C(g(t_1, t_2)) \ eq \ C(R(g(t_1, t_2)))$

Demo)

$C(g(t_1, t_2))$

eq (Por def. de C)

$(C(t_1) \wedge C(t_2))$

eq (Por **(H)** y Teo. de Sustitución)

$(C(R(t_1)) \wedge C(R(t_2)))$

eq (Por def. de C)

$C(g(R(t_1), R(t_2)))$

eq (Por def. de R)

$C(R(g(t_1, t_2)))$

$\Rightarrow$ (transitiva eq)

$C(g(t_1, t_2)) \ eq \ C(R(g(t_1, t_2)))$

Paso Inductivo 3

H) $P(t_1) : C(t_1) \ eq \ C(R(t_1))$ y $P(t_2) : C(t_2) \ eq \ C(R(t_2))$

T) $P(h(t_1, t_2)) : C(h(t_1, t_2)) \ eq \ C(R(h(t_1, t_2)))$

Demo)

$$
\begin{array}{l}
C\left(h\left(t_1, t_2\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por def. de } C\text{)} \\
\left(C\left(t_1\right) \vee C\left(t_2\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por ley de De Morgan)} \\
\neg\left(\neg C\left(t_1\right) \wedge \neg C\left(t_2\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por } \textbf{(H)} \text{ y Teo. de Sustitución)} \\
\neg\left(\neg C\left(R\left(t_1\right)\right) \wedge \neg C\left(R\left(t_2\right)\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por def. de } C\text{)} \\
\neg\left(C\left(f\left(R\left(t_1\right)\right)\right) \wedge C\left(f\left(R\left(t_2\right)\right)\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por def. de } C\text{)} \\
\neg\left(C\left(g\left(f\left(R\left(t_1\right)\right), f\left(R\left(t_2\right)\right)\right)\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por def. de } C\text{)} \\
C\left(f\left(g\left(f\left(R\left(t_1\right)\right), f\left(R\left(t_2\right)\right)\right)\right)\right) \\
\quad eq \text{ (Por def. de } R\text{)} \\
C\left(R\left(h\left(t_1, t_2\right)\right)\right) \\
\Rightarrow \text{ (transitiva } eq\text{)} \\
C\left(h\left(t_1, t_2\right)\right) \ eq \ C\left(R\left(h\left(t_1, t_2\right)\right)\right)
\end{array}
$$

Como se cumplen las hipótesis del PIP para `TERM`, podemos afirmar que para todo término $t \in$ `TERM` se cumple que $C(t)$ eq $C(R(t))$.