

Práctico 6

Lógica de Predicados

Ejercicio 2

Bosquejo de solución

Como primer paso debemos identificar el lenguaje de primer orden, con dos símbolos de predicado P_1 (binario) y P_2 (unario), un símbolo de función f_1 (unario) y un símbolo de constante c_1 .

- a. x_1 es la madre de Juan.

$$f_1(c_1) = ' x_1$$

- b. x_1 es la madre de algún estudiante.

Es equivalente a pensar que existe algún estudiante que tiene a x_1 por madre:

$$((\exists x_2)(P_2(x_2) \wedge f_1(x_2) = ' x_1))$$

- c. Todos los estudiantes son hermanos de Juan.

Si una persona es estudiante, deberá ser hermana de Juan:

$$((\forall x_1)(P_2(x_1) \rightarrow P_1(x_1, c_1))$$

- d. Todos los estudiantes tienen hermanos.

Si una persona es estudiante, deberá tener al menos un hermano:

$$((\forall x_1)(P_2(x_1) \rightarrow ((\exists x_2)P_1(x_1, x_2))))$$

- e. Juan tiene por lo menos 2 hermanos.

Hay al menos dos personas distintas, que son hermanas de Juan:

$$((\exists x_1)((\exists x_2)((\neg x_1 = ' x_2) \wedge P_1(x_1, c_1) \wedge P_1(x_2, c_1))))$$

- f. x_1 es una persona tal que todos sus hermanos son estudiantes pero él no lo es.

Todas las personas que sean hermanas de x_1 deberán ser estudiantes. Además x_1 no lo es.

$$(((\forall x_2)(P_1(x_2, x_1) \rightarrow P_2(x_2))) \wedge (\neg P_2(x_1)))$$

- g. No hay personas que sean estudiantes.

$$(\neg((\exists x_1)P_2(x_1)))$$

Equivalente a pensar que toda persona no es estudiante: $((\forall x_1)(\neg P_2(x_1)))$

- h. Los estudiantes no tienen hermanos.

Toda persona que sea estudiante no tiene ningún hermano.

$$((\forall x_1)(P_2(x_1) \rightarrow (\neg((\exists x_2)P_1(x_2, x_1))))$$

Ejercicio 9

Bosquejo de solución

a. Definimos TERM_C de la siguiente forma:

- $c_1 \in \text{TERM}_C$
- Si $t \in \text{TERM}_C$, entonces $f_1(t) \in \text{TERM}_C$
- Si $t_1, t_2 \in \text{TERM}_C$, entonces $f_2(t_1, t_2) \in \text{TERM}_C$

Notar que no se incluyen las variables, ya que TERM_C es el conjunto de los términos cerrados.

b. Definimos la función F siguiendo el ERP para TERM_C .

- $F(c_1) = 1$
- $F(f_1(t)) = F(t)$
- $F(f_2(t_1, t_2)) = F(t_1) + F(t_2)$

c. Como indica la letra, utilizaremos inducción en TERM_C para probar que para todo $t \in \text{TERM}_C$ se cumple la propiedad:

$$P(t) := F(t) > 0$$

Paso Base.

T) $P(c_1) : F(c_1) > 0$

Demo)

Por definición de F , $F(c_1) = 1 > 0$.

Paso Inductivo 1.

H) $P(t) : F(t) > 0$

T) $P(f_1(t)) : F(f_1(t)) > 0$

Demo)

$$\begin{aligned} & F(f_1(t)) \\ &= \text{(Por def. de } F) \\ & F(t) \\ &> \text{(Por (H))} \\ & 0 \\ &\Rightarrow \\ & F(f_1(t)) > 0 \end{aligned}$$

Paso Inductivo 2.

H) $P(t_1) : F(t_1) > 0$ y $P(t_2) : F(t_2) > 0$

T) $P(f_2(t_1, t_2)) : F(f_2(t_1, t_2)) > 0$

Demo)

$$\begin{aligned} & F(f_2(t_1, t_2)) \\ &= \text{(Por def. de } F) \\ & F(t_1) + F(t_2) \\ &> \text{(Por (H))} \\ & 0 \\ &\Rightarrow \\ & F(f_2(t_1, t_2)) > 0 \end{aligned}$$

Como nos encontramos en las hipótesis del PIP para TERM_C , podemos afirmar que para todo $t \in \text{TERM}_C$ se cumple que $F(t) > 0$.

Ejercicio 10

Bosquejo de solución

Antes de comenzar con las partes vamos a definir TERM y FORM .

Observar que como no hay símbolos de función ni constantes, TERM solo contiene variables por lo que $\text{TERM} = V$.

Definición inductiva de FORM

I $\perp \in \text{FORM}$

II Si $x \in V$ entonces $P(x) \in \text{FORM}$

III Si $x, y \in V$ entonces $x = y \in \text{FORM}$

IV Si $\alpha \in \text{FORM}$ entonces $(\neg\alpha) \in \text{FORM}$

V Si $\alpha, \beta \in \text{FORM}$ entonces $(\alpha * \beta) \in \text{FORM}$

VI Si $\alpha \in \text{FORM}$ entonces $(\forall x_i)\alpha \in \text{FORM}$

VII Si $\alpha \in \text{FORM}$ entonces $(\exists x_i)\alpha \in \text{FORM}$

a. Siguiendo el ERP para FORM definimos la función $\#_{x_1}$

$$\#_{x_1} : \text{FORM} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\#_{x_1}(\perp) = 0$$

$$\#_{x_1}(P_1(x_i)) = \#_{x_1}(x_i)$$

$$\#_{x_1}(x_i = x_j) = \#_{x_1}(x_i) + \#_{x_1}(x_j)$$

$$\#_{x_1}((\alpha * \beta)) = \#_{x_1}(\alpha) + \#_{x_1}(\beta)$$

$$\#_{x_1}((\neg\alpha)) = \#_{x_1}(\alpha)$$

$$\#_{x_1}(((\forall x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

$$\#_{x_1}(((\exists x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

b. Siguiendo el ERP para FORM definimos la función $\#_{x_1}^b$

$$\#_{x_1}^b : \text{FORM} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\#_{x_1}^b(\perp) = 0$$

$$\#_{x_1}^b(P_1(x_i)) = 0$$

$$\#_{x_1}^b(x_i = x_j) = 0$$

$$\#_{x_1}^b((\alpha * \beta)) = \#_{x_1}^b(\alpha) + \#_{x_1}^b(\beta)$$

$$\#_{x_1}^b((\neg\alpha)) = \#_{x_1}^b(\alpha)$$

$$\#_{x_1}^b(((\forall x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}^b(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}^b(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

$$\#_{x_1}^b(((\exists x_i)\alpha)) = \begin{cases} \#_{x_1}^b(\alpha) & \text{si } x_i \neq x_1 \\ 1 + \#_{x_1}^b(\alpha) & \text{si } x_i = x_1 \end{cases}$$

c. Queremos probar $(\forall \varphi \in \text{FORM})(x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi \text{ entonces } \#_{x_1}^b(\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi))$

Demostración por PIP en FORM.

Identificación de la propiedad: $Q(\varphi) := x_1 \text{ libre para } y \text{ en } \varphi \Rightarrow \#_{x_1}^b(\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi)$

Paso Base 1

T) $Q(\perp) : x_1 \text{ libre para } y \text{ en } \perp \Rightarrow \#_{x_1}^b(\perp[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\perp)$

Demo)

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b(\perp[x_1/y]) \\ &= (\text{definición de sustitución}) \\ & \#_{x_1}^b(\perp) \end{aligned}$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } \perp \Rightarrow \#_{x_1}^b(\perp[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\perp)$$

Paso Base 2

T) $Q(P(x_i)) : x_1 \text{ libre para } y \text{ en } P(x_i) \Rightarrow \#_{x_1}^b(P(x_i)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(P(x_i))$

Demo)

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b(P(x_i)[x_1/y]) \\ &= (\text{definición de } \#_{x_1}^b)(*) \\ & 0 \\ &= (\text{definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b(P(x_i)) \end{aligned}$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } P(x_i) \Rightarrow \#_{x_1}^b(P(x_i)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(P(x_i))$$

(*)Observar que para definir $\#_{x_1}^b(P(x_i))$ no se tiene en cuenta si x_i es x_1 por lo que el resultado es independiente de la sustitución.

Paso Base 3

T) $Q(x_i = x_j) : x_1 \text{ libre para } y \text{ en } x_i = x_j \Rightarrow \#_{x_1}^b(x_i = x_j[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(x_i = x_j)$

Demo)

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b(x_i = x_j[x_1/y]) \\ &= (\text{definición de } \#_{x_1}^b)(*) \\ & 0 \\ &= (\text{definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b(x_i = x_j) \end{aligned}$$

Como se cumple el consecuente de la propiedad, entonces se cumple:

$$x_1 \text{ libre para } y \text{ en } P(x_i) \Rightarrow \#_{x_1}^b(P(x_i)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(P(x_i))$$

(*)Observar que para definir $\#_{x_1}^b(x_i = x_j)$ no se tiene en cuenta si x_i es x_1 por lo que el resultado es independiente de la sustitución.

Paso Inductivo 1

H) $Q(\varphi) : x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#_{x_1}^b(\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi)$

T) $Q((\neg\varphi)) : x_1$ libre para y en $(\neg\varphi) \Rightarrow \#_{x_1}^b((\neg\varphi)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b((\neg\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $(\neg\varphi)$ por lo que x_1 libre para y en φ **(A)**.

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b((\neg\varphi)[x_1/y]) \\ &= \text{(definición de sustitución)} \\ & \#_{x_1}^b((\neg\varphi[x_1/y])) \\ &= \text{(definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b(\varphi[x_1/y]) \\ &= \text{(hipótesis y (A))} \\ & \#_{x_1}^b(\varphi) \\ &= \text{(definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b((\neg\varphi)) \end{aligned}$$

Paso Inductivo 2

H) $Q(\varphi_1) : x_1$ libre para y en $\varphi_1 \Rightarrow \#_{x_1}^b(\varphi_1[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi_1)$

$Q(\varphi_2) : x_1$ libre para y en $\varphi_2 \Rightarrow \#_{x_1}^b(\varphi_2[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi_2)$

T) $Q((\varphi_1 * \varphi_2)) : x_1$ libre para y en $(\varphi_1 * \varphi_2) \Rightarrow \#_{x_1}^b((\varphi_1 * \varphi_2)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b((\varphi_1 * \varphi_2))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $(\varphi_1 * \varphi_2)$ por lo que x_1 libre para y en φ_1 **(A)** y x_1 libre para y en φ_2 **(B)**.

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b((\varphi_1 * \varphi_2)[x_1/y]) \\ &= \text{(definición de sustitución)} \\ & \#_{x_1}^b((\varphi_1[x_1/y] * \varphi_2[x_1/y])) \\ &= \text{(definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b(\varphi_1[x_1/y]) + \#_{x_1}^b(\varphi_2[x_1/y]) \\ &= \text{(hipótesis, (A) y (B))} \\ & \#_{x_1}^b(\varphi_1) + \#_{x_1}^b(\varphi_2) \\ &= \text{(definición de } \#_{x_1}^b) \\ & \#_{x_1}^b((\varphi_1 * \varphi_2)) \end{aligned}$$

Paso Inductivo 3

H) $Q(\varphi) : x_1$ libre para y en $\varphi \Rightarrow \#_{x_1}^b(\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(\varphi)$

T) $Q(((\forall x_i)\varphi)) : x_1$ libre para y en $((\forall x_i)\varphi) \Rightarrow \#_{x_1}^b(((\forall x_i)\varphi)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b(((\forall x_i)\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $((\forall x_i)\varphi)$.

Repasando la definición de libre para, esto quiere decir que:

a) $y \notin \text{FV}(((\forall x_i)\varphi))$

o

b) $x_i \notin \text{FV}(x_1)$ y x_1 está libre para y en φ

Separaremos en casos según la definición de libre para:

Caso a)

$$\begin{aligned} & \#_{x_1}^b(((\forall x_i)\varphi)[x_1/y]) \\ &= (y \notin \text{FV}(((\forall x_i)\varphi)) \text{ y def sustitución}) \\ & \#_{x_1}^b(((\forall x_i)\varphi)) \end{aligned}$$

Caso b)

$$\begin{aligned}
 & \#_{x_1}^b (((\forall x_i)\varphi)[x_1/y]) \\
 & = (\text{no se cumple } y \notin \text{FV}(((\forall x_i)\varphi)) \text{ por lo que } y \neq x_i \text{ (*)}) \\
 & \#_{x_1}^b (((\forall x_i)\varphi[x_1/y])) \\
 & = (\text{definición de } \#_{x_1}^b \text{ y } x_i \notin \text{FV}(x_1)) \\
 & \#_{x_1}^b (\varphi[x_1/y]) \\
 & = (\text{hipótesis y } x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi) \\
 & \#_{x_1}^b (\varphi) \\
 & = (\text{definición de } \#_{x_1}^b \text{ y } x_i \notin \text{FV}(x_1)) \\
 & \#_{x_1}^b (((\forall x_i)\varphi))
 \end{aligned}$$

(*) Si no se cumple $y \notin \text{FV}(((\forall x_i)\varphi))$ es porque o bien $y \in \text{FV}(((\forall x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$ o bien $y \notin V(((\forall x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$. Observar que si se cumplen ambos casos a la vez, la demostración para el **Caso a)** siempre vale.

Paso Inductivo 4

H) $Q(\varphi) : x_1 \text{ libre para } y \text{ en } \varphi \Rightarrow \#_{x_1}^b (\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b (\varphi)$

T) $Q(((\exists x_i)\varphi)) : x_1 \text{ libre para } y \text{ en } ((\exists x_i)\varphi) \Rightarrow \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi)[x_1/y]) = \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi))$

Demo)

Supongo x_1 libre para y en $((\exists x_i)\varphi)$.

Repasando la definición de libre para, esto quiere decir que:

a) $y \notin \text{FV}(((\exists x_i)\varphi))$

o

b) $x_i \notin \text{FV}(x_1)$ y x_1 está libre para y en φ

Separaremos en casos según la definición de libre para:

Caso a)

$$\begin{aligned}
 & \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi)[x_1/y]) \\
 & = (y \notin \text{FV}(((\exists x_i)\varphi)) \text{ y def sustitución}) \\
 & \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi))
 \end{aligned}$$

Caso b)

$$\begin{aligned}
 & \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi)[x_1/y]) \\
 & = (\text{no se cumple } y \notin \text{FV}(((\exists x_i)\varphi)) \text{ por lo que } y \neq x_i \text{ (*)}) \\
 & \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi[x_1/y])) \\
 & = (\text{definición de } \#_{x_1}^b \text{ y } x_i \notin \text{FV}(x_1)) \\
 & \#_{x_1}^b (\varphi[x_1/y]) \\
 & = (\text{hipótesis y } x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi) \\
 & \#_{x_1}^b (\varphi) \\
 & = (\text{definición de } \#_{x_1}^b \text{ y } x_i \notin \text{FV}(x_1)) \\
 & \#_{x_1}^b (((\exists x_i)\varphi))
 \end{aligned}$$

(*) Si no se cumple $y \notin \text{FV}(((\exists x_i)\varphi))$ es porque o bien $y \in \text{FV}(((\exists x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$ o bien $y \notin V(((\exists x_i)\varphi))$ y entonces $y \neq x_i$. Observar que si se cumplen ambos casos a la vez, la demostración para el **Caso a)** siempre vale.

Entonces, como se cumplen las hipótesis del PIP podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}\varphi \in \text{FORM})(x_1 \text{ está libre para } y \text{ en } \varphi \text{ entonces } \#_{x_1}^b (\varphi[x_1/y]) = \#_{x_1}^b (\varphi))$$

Ejercicio 13

Bosquejo de solución

a. Teniendo en cuenta el tipo de similaridad del lenguaje, definimos **TERM** como:

- $x_i \in \text{TERM}$ ($i \in \mathbb{N}$)
- Si $t \in \text{TERM}$, entonces $f(t) \in \text{TERM}$
- Si $t_1, t_2 \in \text{TERM}$, entonces $g(t_1, t_2) \in \text{TERM}$
- Si $t_1, t_2 \in \text{TERM}$, entonces $h(t_1, t_2) \in \text{TERM}$

b. Definimos la función C siguiendo el ERP para **TERM**, y además cumpliendo el requisito de que la función debe ser biyectiva. Esto último nos indica que todas las fórmulas de $\text{PROP}_{\neg, \wedge, \vee}$ deben ser alcanzadas por la función, y que si aplicamos C a dos términos distintos, obtenemos imágenes distintas.

- $C(x_i) = p_i$
- $C(f(t)) = (\neg C(t))$
- $C(g(t_1, t_2)) = (C(t_1) \wedge C(t_2))$
- $C(h(t_1, t_2)) = (C(t_1) \vee C(t_2))$

Podemos verificar fácilmente que la función cumple que $C(g(x_1, x_3)) = (p_1 \wedge p_3)$.

c. Teniendo en cuenta la siguiente propiedad vista en práctico 3, la cual es una de las leyes de De Morgan:

$$\varphi \vee \psi \text{ eq } \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Definimos la función R siguiendo el ERP para **TERM**:

- $R(x_i) = x_i$
- $R(f(t)) = f(R(t))$
- $R(g(t_1, t_2)) = g(R(t_1), R(t_2))$
- $R(h(t_1, t_2)) = f(g(f(R(t_1)), f(R(t_2))))$

d. Utilizaremos el PIP para **TERM** y los conocimientos obtenidos sobre semántica de la lógica proposicional del práctico 3; en particular, la ley de De Morgan mencionada antes.

Identificación de la propiedad: $P(t) := C(t) \text{ eq } C(R(t))$.

Paso Base

T) $P(x_i) : C(x_i) \text{ eq } C(R(x_i))$

Demo)

(Por lo visto en práctico 3)

$$\models p_i \leftrightarrow p_i$$

 \Rightarrow (Por definición de eq)

$$p_i \text{ eq } p_i$$

 \Rightarrow (Por definición de C)

$$C(x_i) \text{ eq } C(x_i)$$

 \Rightarrow (Por definición de R)

$$C(x_i) \text{ eq } C(R(x_i))$$

Paso Inductivo 1

$$\mathbf{H)} P(t) : C(t) \text{ eq } C(R(t))$$

$$\mathbf{T)} P(f(t)) : C(f(t)) \text{ eq } C(R(f(t)))$$

Demo)

$$C(f(t))$$

 eq (Por def. de C)

$$(\neg C(t))$$

 eq (Por **(H)** y Teorema de Sustitución)

$$(\neg C(R(t)))$$

 eq (Por def. de C)

$$C(f(R(t)))$$

 eq (Por def. de R)

$$C(R(f(t)))$$

 \Rightarrow (transitiva eq)

$$C(f(t)) \text{ eq } C(R(f(t)))$$

Paso Inductivo 2

$$\mathbf{H)} P(t_1) : C(t_1) \text{ eq } C(R(t_1)) \text{ y } P(t_2) : C(t_2) \text{ eq } C(R(t_2))$$

$$\mathbf{T)} P(g(t_1, t_2)) : C(g(t_1, t_2)) \text{ eq } C(R(g(t_1, t_2)))$$

Demo)

$$C(g(t_1, t_2))$$

 eq (Por def. de C)

$$(C(t_1) \wedge C(t_2))$$

 eq (Por **(H)** y Teo. de Sustitución)

$$(C(R(t_1)) \wedge C(R(t_2)))$$

 eq (Por def. de C)

$$C(g(R(t_1), R(t_2)))$$

 eq (Por def. de R)

$$C(R(g(t_1, t_2)))$$

 \Rightarrow (transitiva eq)

$$C(g(t_1, t_2)) \text{ eq } C(R(g(t_1, t_2)))$$

Paso Inductivo 3

$$\mathbf{H)} P(t_1) : C(t_1) \text{ eq } C(R(t_1)) \text{ y } P(t_2) : C(t_2) \text{ eq } C(R(t_2))$$

$$\mathbf{T)} P(h(t_1, t_2)) : C(h(t_1, t_2)) \text{ eq } C(R(h(t_1, t_2)))$$

Demo)

$$\begin{aligned}
& C(h(t_1, t_2)) \\
& \text{eq (Por def. de } C) \\
& (C(t_1) \vee C(t_2)) \\
& \text{eq (Por ley de De Morgan)} \\
& \neg(\neg C(t_1) \wedge \neg C(t_2)) \\
& \text{eq (Por (H) y Teo. de Sustitución)} \\
& \neg(\neg C(R(t_1)) \wedge \neg C(R(t_2))) \\
& \text{eq (Por def. de } C) \\
& \neg(C(f(R(t_1))) \wedge C(f(R(t_2)))) \\
& \text{eq (Por def. de } C) \\
& \neg(C(g(f(R(t_1)), f(R(t_2)))) \\
& \text{eq (Por def. de } C) \\
& C(f(g(f(R(t_1)), f(R(t_2)))) \\
& \text{eq (Por def. de } R) \\
& C(R(h(t_1, t_2))) \\
& \Rightarrow \text{(transitiva eq)} \\
& C(h(t_1, t_2)) \text{ eq } C(R(h(t_1, t_2)))
\end{aligned}$$

Como se cumplen las hipótesis del PIP para **TERM**, podemos afirmar que para todo término $t \in \mathbf{TERM}$ se cumple que $C(t) \text{ eq } C(R(t))$.