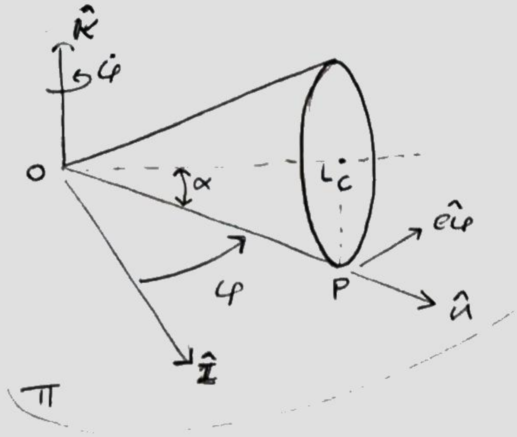
Ejercicio V.10



$\hat{K}$: versor normal al plano Π

$\hat{I}$: versor fijo en el plano Π

O : vértice del cono

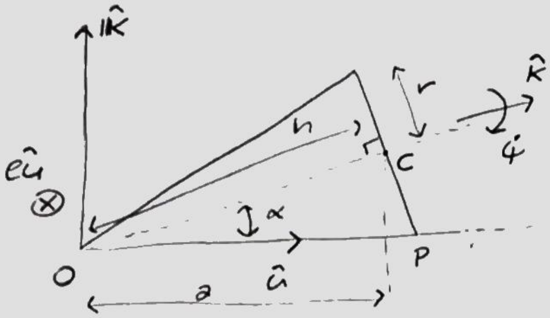
C : centro de la base del cono

$\hat{u}$: recta de contacto del cono con el plano Π

φ: ángulo que forma $\hat{u}$ con $\hat{I}$;

vamos a escribir $\vec{\omega}$ en términos de $\dot{\varphi}$

Consideremos por claridad un diagrama en el plano $(\hat{K}, \hat{u})$:



Supongamos que la altura del cono es h (no interviene en $\vec{\omega}$, es sólo auxiliar), por lo que su base es de radio $r = \operatorname{tg}\alpha\, h$

1) Vamos a considerar la velocidad angular escrita en forma genérica según la base $\{\hat{u}, \hat{e_\varphi}, \hat{K}\}$:

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega_1 \hat{u} + \omega_2 \hat{e_\varphi} + \omega_3 \hat{K}}$$

Para hallar $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ consideremos la velocidad de 3 puntos no alineados:

O, P, C (P podría ser un punto cualquiera, distinto de O, sobre $\hat{u}$)

Como el cono rueda sin deslizarse, la velocidad instantánea de los puntos sobre la recta de contacto es nula:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v_O} &= 0 \\ \vec{v_P} &= 0 \end{aligned}}$$

Por otro lado, puedo determinar la velocidad de C ya que puedo seguirlo fácilmente sobre su trayectoria (una circunferencia de radio a), por lo que derivando su posición encuentro que su velocidad instantánea es: ← hacer ésto !

$$\boxed{\vec{v}_C = a\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi} \quad , \quad a = h\cos\alpha$$

- Consideremos ahora la distribución de velocidades de un rígido entre P y O:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(P-O)$$

Como: $\vec{v}_O = 0$, $\vec{v}_P = 0$

$\boxed{\vec{\omega}\times(P-O) = 0}$ pero $P-O = \dfrac{h}{\cos\alpha}\hat{a}$:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}\times\hat{a} = 0} : \boxed{\begin{matrix}\omega_2 = 0\\ \omega_3 = 0\end{matrix}}$$

(7.b) de regalo!)

Nos queda entonces: $\vec{\omega} = \omega_1\hat{a}$,

- Consideremos luego la distribución de velocidades entre C y O:

$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{v}_O}_{=0} + \vec{\omega}\times(C-O) \quad , \quad \begin{matrix}\vec{v}_C = a\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = h\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \\ C-O = h\hat{k}\end{matrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{h}\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = \omega_1\hat{a}\times(h\hat{k}) = \omega_1 h\underbrace{\hat{a}\times\hat{k}}_{-\operatorname{sen}\alpha\,\hat{e}_\varphi} = -\omega_1\cancel{h}\operatorname{sen}\alpha\,\hat{e}_\varphi$$

$\Rightarrow$ (despejando ω_1)

$$\omega_1 = -\dot{\varphi}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\dot{\varphi}\,\operatorname{ctg}\alpha \quad : \quad \boxed{\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,\operatorname{ctg}\alpha\,\hat{a}}$$

Obs: Si tomo un punto cualquiera de la recta de contacto que no sea O para aplicar la distribución de velocidades de un rígido, debo llegar a lo mismo

(considere $P = O + x\hat{a}$ y plantee $\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega}\times(C-P)$ ...)

2) Para hallar la velocidad angular podemos también considerar su descomposición en rotaciones simples; escribimos $\vec{\omega}$ como:

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{K} + \dot{\psi}\,\hat{k}}$$

Lo que estamos escribiendo con el formato anterior es algo similar a la construcción que nos lleva a la velocidad angular en términos de los ángulos de Euler:

- la velocidad angular del rígido relativa al sistema identificado por la base $\{\hat{u}, \hat{e}_{\hat{u}}, \hat{k}\}$ corresponde a una rotación simple alrededor de $\hat{R}$:

$$\vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi}\,\hat{R}$$

- a su vez, la velocidad angular del sistema $\{\hat{u}, \hat{e}_{\hat{u}}, \hat{k}\}$ es:

$$\vec{\omega}_{\{\hat{u}, \hat{e}_{\hat{u}}, \hat{k}\}} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$$

Por lo que a partir del Teorema de Adición de Velocidades Angulares nos queda $\vec{\omega}$.

- Lo que tenemos que hacer ahora es determinar $\dot{\psi}$ en función de $\dot{\varphi}$, para lo cual usamos que el rígido rueda sin deslizarse, por lo que la recta de contacto es eje instantáneo de rotación $\longleftrightarrow \vec{\omega} \parallel \hat{u}$;

Como $\hat{u}$, $\hat{R}$ y $\hat{k}$ están en el mismo plano, en donde podemos escribir cualquier vector como combinación de $\hat{u}$ y $\hat{k}$ digamos, la condición de que rueda sin deslizarse es equivalente a:

$$\boxed{\vec{\omega} \cdot \hat{k} = 0}$$

$\Rightarrow$ (sustituyendo $\vec{\omega}$)

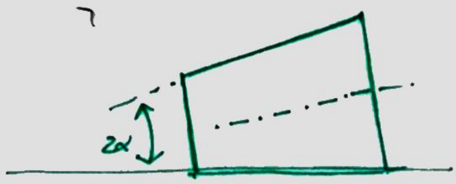
$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\hat{R}\cdot\hat{k} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\text{sen}\,\alpha = 0 : \quad \boxed{\dot{\psi} = -\frac{\dot{\varphi}}{\text{sen}\,\alpha}}$$

y volviendo a la forma de $\vec{\omega}$ en términos de rotaciones simples:

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k} - \frac{\dot{\varphi}}{\text{sen}\,\alpha}\underbrace{\hat{R}}_{\cos\alpha\,\hat{u} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{k}} = -\dot{\varphi}\,\text{ctg}\,\alpha\,\hat{u}}$$

¿ Cómo escribiría la rodadura sin deslizamiento de un cono trunco?

[Considere además la dirección de la pág. sig]



• Discusión sobre algunos aspectos cinemáticos extra

• grados de libertad del problema físico : más allá de que pudimos escribir

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(\dot{\varphi})$, se puede ver que φ es el único grado de libertad del problema,

es decir, especificándolo tenemos determinado la configuración completa del cono

rodando sin deslizarse sobre el plano Π :

▪ la orientación del cono en el espacio está determinada por φ (el ángulo ψ

de giro sobre su eje está vinculado con φ : $\dot{\psi} = \frac{-\dot{\varphi}}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$\int dt \downarrow$$

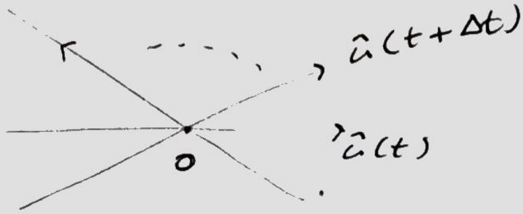
$$\psi - \psi_0 = -\frac{(\varphi - \varphi_0)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

▪ el movimiento de C está determinado por φ (de hecho, cualquier punto del eje del cono se mueve sobre una circunferencia y podemos seguirlo sobre ella) ⟵ observe ésto!

- Otra forma de pensarlo es observar que O permanece fijo , este punto merece atención *

⇒ De 6 grados de libertad que puede tener un rígido , con especificar φ alcanza: nuestro problema tiene sólo un grado de libertad : $\{\varphi\}$

(*) O fijo : vale la pena observar que la recta (indicada por $\hat{u}$) en donde se ubican los puntos que son instantáneamente de contacto , y como el piso está fijo y el cono rueda sin deslizarse , tienen velocidad nula, cambia su orientación en el tiempo pero siempre pasa por el vértice del cono O



⇒ $\vec{v}_O = 0$ (por ser parte de la recta de contacto),

$\dot{O} = 0$ (el punto geométrico que es intersección de las rectas es siempre el mismo)

⇒ O está fijo (como caso no fijo, qué pasa por ej. con $\dot{P}$?)