Ejercicio N° 5

parte a:

Se pide demostrar que

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{(ext)} \\ \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \wedge \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{(ext)} \\ \dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \wedge \dot{R} + \vec{M}_R^{(ext)}\end{array}\right.$$

La primer ecuación es la misma por lo que hay que demostrar la segunda partiendo de las fórmulas de cambio de momentos

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_R + \vec{P} \wedge (Q - R)$$
$$\vec{M}_Q = \vec{M}_R + \vec{R}^{(ext)} \wedge (Q - R)$$

Derivo la primera para hacer aparecer $\dot{\vec{L}}_R$

$$\dot{\vec{L}}_Q = \dot{\vec{L}}_R + \dot{\vec{P}} \wedge (Q - R) + \vec{P} \wedge (\dot{Q} - \dot{R})$$

$$\overset{\shortparallel}{\vec{P} \wedge \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}} \qquad \overset{\shortparallel}{\vec{R}_{ext}}$$

$$\overset{\shortparallel}{\vec{M}_R^{(ext)}} + \vec{R}^{(ext)} \wedge (Q - R)$$

$$\Rightarrow \vec{M}_R^{(ext)} = \dot{\vec{L}}_R - \vec{P} \wedge \dot{R} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \wedge \dot{R} + \vec{M}_R^{(ext)}}$$

Que es el resultado al que se quería llegar.

El recíproco es la misma demostración porque es cambiar el nombre del punto.

La importancia de este resultado es que si se aplica una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto, no obtengo nueva información por aplicar la segunda cardinal en otro punto. O sea que una primera cardinal y una segunda cardinal en cualquier punto me dan toda la información que puedo extraer de las ecuaciones cardinales son 2 ecuaciones vectoriales, por lo tanto son 6 ecuaciones escalares.

parte b

Se pide demostrar que:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{P}} = \vec{R}^{(ext)} \\ \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \wedge \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \wedge \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)} \\ \dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \wedge \dot{R} + \vec{M}_R^{(ext)} \\ \dot{\vec{L}}_S = \vec{P} \wedge \dot{S} + \vec{M}_S^{(ext)} \\ Q, R, S \text{ no alineados}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Esta demostración ya se hizo en la parte a. Allí se demostró que dada una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto, la segunda vale en otro punto cualquiera. Por lo tanto también valdrá en un tercer punto cualquiera

$\Leftarrow$ Aquí solo hay que demostrar que dadas 3 segundas cardinales en tres puntos no alineados vale la primer cardinal, porque es inmediato que vale la segunda cardinal en un punto cualquiera

Partimos como en la parte a de la derivación de la fórmula de cambio de momentos:

$$\underbrace{\dot{\vec{L}}_Q}_{\vec{P} \wedge \dot{Q} + \vec{M}_Q^{(ext)}} = \underbrace{\dot{\vec{L}}_R}_{\vec{P} \wedge \dot{R} + \vec{M}_R^{(ext)}} + \dot{\vec{P}} \wedge (Q - R) + \vec{P} \wedge (\dot{Q} - \dot{R})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_Q^{(ext)} = \vec{M}_R^{(ext)} + \underbrace{\dot{\vec{P}} \wedge (Q - R)}_{\vec{R}^{(ext)} \wedge (Q - R)}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} \wedge (Q - R) = \vec{R}^{(ext)} \wedge (Q - R)$$

Y esto significa que las componentes de $\vec{R}^{(ext)}$ y $\dot{\vec{P}}$ perpendiculares a $(Q - R)$ son iguales. Pero como esto vale para 3 puntos Q, R, S no alineados puedo aplicarlo entre Q y S y me quedará que la otra componente de $\vec{R}^{(ext)}$ será igual a la otra componente de $\dot{\vec{P}}$.

O sea que la información contenida en una primera cardinal y una segunda en un punto cualquiera es la misma que se tiene en tres segundas cardinales en tres puntos no alineados. Esto implica que esas 3 segundas cardinales a 6 ecuaciones independientes; y que no siempre hay que aplicar la primera cardinal. Se pueden aplicar solo segundas cardinales en puntos convenientemente elegidos.