Práctico 4

Deducción Natural - Lógica Proposicional

Ejercicio 7

Bosquejo de solución

a. $\vdash \varphi \lor \psi \to \psi \lor \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi \lor \psi]^1 \qquad \dfrac{[\varphi]^2}{\psi \lor \varphi}\, I\lor \qquad \dfrac{[\psi]^2}{\psi \lor \varphi}\, I\lor}{\psi \lor \varphi}\, E\lor (2)}{\varphi \lor \psi \to \psi \lor \varphi}\, I\to (1)$$

b. $\vdash \varphi \lor \varphi \to \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi \lor \varphi]^1 \qquad [\varphi]^2 \qquad [\varphi]^2}{\varphi}\, E\lor (2)}{(\varphi \lor \varphi) \to \varphi}\, I\to (1)$$

c. $\vdash \varphi \lor \neg\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \lor \neg\varphi)]^1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^2}{\varphi \lor \neg\varphi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{\varphi}\, RAA(2)}{\varphi \lor \neg\varphi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{\varphi \lor \neg\varphi}\, RAA(1)$$

d. $\vdash (\varphi \lor \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\varphi \lor \psi)]^1 \qquad \dfrac{[(\varphi \to \psi)]^2 \qquad [\varphi]^3}{\psi}\, E\to \qquad [\psi]^3}{\psi}\, E\lor (3)}{((\varphi \to \psi) \to \psi)}\, I\to (2) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \lor \psi)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \lor \psi)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{[((\varphi \to \psi) \to \psi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^5 \qquad [\varphi]^6}{\bot}\, E\neg}{\psi}\, E\bot}{\varphi \to \psi}\, I\to (6)}{\psi}\, E\to}{\varphi \lor \psi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{\varphi}\, RAA(5)}{\varphi \lor \psi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{(\varphi \lor \psi)}\, RAA(4)}{(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)}\, I\leftrightarrow (1)$$

e. $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi \lor \psi)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi \lor \psi)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi \to \psi]^1 \qquad [\varphi]^3}{\psi}\, E\to}{\neg\varphi \lor \psi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{\neg\varphi}\, I\neg(3)}{\neg\varphi \lor \psi}\, I\lor}{\bot}\, E\neg}{\neg\varphi \lor \psi}\, RAA(2) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi \lor \psi]^5 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^5 \qquad [\varphi]^4}{\bot}\, E\neg}{\psi}\, E\bot \qquad [\psi]^5}{\psi}\, E\lor (5)}{\varphi \to \psi}\, I\to (4)}{(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \lor \psi)}\, I\leftrightarrow (1)$$

f. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]^2}{\psi \to \varphi}\, I\to}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\psi}\, E\bot}{(\varphi \to \psi)}\, I\to(2)}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)}\, RAA(1)$$

Ejercicio 8

Bosquejo de solución

a.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \psi)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)]^1 \qquad \dfrac{[\neg\varphi]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \psi)]^2 \qquad \dfrac{[\psi]^4}{\varphi \vee \psi}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\neg\psi}\, I\neg(4)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}\, I\wedge}{\bot}\, E\neg}{\varphi}\, RAA(3)}{\varphi \vee \psi}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\varphi \vee \psi}\, RAA(2)}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi}\, I\to(1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \psi)]^2 \qquad \dfrac{[\varphi]^3}{\varphi \vee \psi}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\neg\varphi}\, I\neg(3) \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\varphi \vee \psi)]^2 \qquad \dfrac{[\psi]^4}{\varphi \vee \psi}\, I\vee}{\bot}\, E\neg}{\neg\psi}\, I\neg(4)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}\, I\wedge}{\bot}\, E\neg}{\varphi \vee \psi}\, RAA(2)}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi}\, I\to(1)$$

b. **H)** $\varphi \vdash \sigma$ y $\psi \vdash \sigma$.

T) $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \sigma$

Demo)

De la parte (a), sabemos que $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$.
Por lo tanto $(\bar{\exists} D \in \texttt{DER}) H(D) = \emptyset$ y $C(D) = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$**(A)**
Como $D \in \texttt{DER}$ por **(A)** y $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \in \texttt{DER}$ por regla 1, aplicando la regla de eliminación del implica se cumple que $(\bar{\exists} D_1 \in \texttt{DER}) H(D_1) = \{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\}$ y $C(D_1) = \varphi \vee \psi$ **(B)**
Sea D_1 el elemento construido en **(B)**

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi \end{array} \qquad \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}{\varphi \vee \psi}\ E\to$$

Además, por hipótesis tenemos las siguientes derivaciones **(C)**:

- Como $\varphi \vdash \sigma$, $(\bar{\exists} D_2 \in \texttt{DER}) H(D_2) = \{\varphi\}$ y $C(D_2) = \sigma$.
  Sea D_2

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \bigtriangledown \\ \sigma \end{array}$$

- Como $\psi \vdash \sigma$, $(\bar{\exists} D_3 \in \texttt{DER}) H(D_3) = \{\psi\}$ y $C(D_3) = \sigma$.
  Sea D_3

$$\begin{array}{c} \psi \\ \bigtriangledown \\ \sigma \end{array}$$

Por lo tanto, como D_1, D_2 y $D_3 \in \texttt{DER}$ por **(A)**, **(B)** y **(C)**, aplicando la regla de eliminación del or, podemos afirmar que $(\bar{\exists} D_4 \in \texttt{DER}) H(D_4) = \{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\}$ y $C(D_4) = \sigma$ y por lo tanto $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \sigma$ que es lo que queríamos probar.

La D_4 que se construye como testigo del existencial es la siguiente:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \overset{D_1}{\bigtriangledown} \\ \varphi \vee \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi]^1 \\ \overset{D_2}{\bigtriangledown} \\ \sigma \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi]^1 \\ \overset{D_3}{\bigtriangledown} \\ \sigma \end{array}}{\sigma}\ E\vee(1)$$

Ejercicio 9

Bosquejo de solución

a. **Definición inductiva de $R \subseteq Pot(\texttt{PROP}) \times \texttt{PROP}$**

- I $(\{\varphi\}, \varphi) \in R$
- II Si $(\Gamma, \varphi) \in R$ y $(\Gamma, \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi \land \psi) \in R$
- III Si $(\Gamma, \varphi \land \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi) \in R$
- IV Si $(\Gamma, \varphi \land \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \psi) \in R$
- V Si $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi \to \psi) \in R$
- VI Si $(\Gamma, \varphi) \in R$ y $(\Gamma, \varphi \to \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \psi) \in R$
- VII Si $(\Gamma, \varphi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi \lor \psi) \in R$
- VIII Si $(\Gamma, \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi \lor \psi) \in R$
- IX Si $(\Gamma, \varphi \lor \psi) \in R, (\Gamma \cup \{\varphi\}, \gamma) \in R, (\Gamma \cup \{\psi\}, \gamma) \in R$ entonces $(\Gamma, \gamma) \in R$
- X Si $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \psi) \in R$ y $(\Gamma \cup \{\psi\}, \varphi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$
- XI Si $(\Gamma, \varphi) \in R$ y $(\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \psi) \in R$
- XII Si $(\Gamma, \psi) \in R$ y $(\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi) \in R$
- XIII Si $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \bot) \in R$ entonces $(\Gamma, \neg\varphi) \in R$
- XIV Si $(\Gamma, \neg\varphi) \in R$ y $(\Gamma, \varphi) \in R$ entonces $(\Gamma, \bot) \in R$
- XV Si $(\Gamma, \bot) \in R$ y $\varphi \in \texttt{PROP}$ entonces $(\Gamma, \varphi) \in R$
- XVI Si $(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \bot) \in R$ entonces $(\Gamma, \varphi) \in R$
- XVII Si $(\Gamma, \varphi) \in R$ y $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ entonces $(\Gamma \cup \Delta, \varphi) \in R$

b. Damos dos secuencias de reglas distintas que construyen el elemento $(\{\bot\}, \bot \lor \bot) \in R$:

I

(def. de R, regla I.)
$(\{\bot\}, \bot) \in R$
$\Rightarrow$ (def. de R, regla VII.)
$(\{\bot\}, \bot \lor \bot) \in R$

II

(def. de R, regla I.)
$(\{\bot\}, \bot) \in R$
$\Rightarrow$ (def. de R, regla VIII.)
$(\{\bot\}, \bot \lor \bot) \in R$

c. Queremos probar

$$(\Gamma, \varphi) \in R \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Directo

$$(\Gamma, \varphi) \in R \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } \vdash)$$
$$(\bar{\forall}(\Gamma, \varphi) \in R)(\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi$$

Demostraremos esto usando el PIP para R en (Γ, φ).

En este punto, a modo de adelanto, se presentará la identificación de la propiedad y tres de los pasos inductivos para mostrar el estilo de la prueba. La demostración se encuentra en el anexo A al final del documento.

Identificamos la propiedad a utilizar,

$$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) := (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$$

Paso Inductivo 1

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \wedge \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}$$

y se cumple: $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma$ y $H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$

Luego, aplicando la regla $I_\wedge$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{cc} \overset{A}{\bigtriangledown} & \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}\, I_\wedge$$

Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple por construccón: $C(D) = (\varphi \wedge \psi)$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.

Paso Inductivo 4

H) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\}, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \to \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \to \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \varphi \\ \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$

Luego, aplicando la regla $I_\to$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^1 \\ \bigtriangledown A \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ I^1_{\to}$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D}) - \{\varphi\}$[1].
Como $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, se cumple que $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D}) - \{\varphi\} \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 8

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \vee \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi)$
$\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\}, \gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$
$\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\psi\}, \gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\psi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$

Demo.
Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c}\bigtriangledown A \\ \varphi \vee \psi\end{array},\ \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c}\varphi \\ \bigtriangledown \\ \gamma\end{array} \text{ y } \mathcal{D}_3 = \begin{array}{c}\psi \\ \bigtriangledown \\ \gamma\end{array}$$

donde se cumple $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma,\ H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\},\ H(\mathcal{D}_3) \subseteq \Gamma \cup \{\psi\}$
Luego, aplicando la regla $E_{\vee}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{D_1 \quad D_2^{[\varphi]} \quad D_3^{[\psi]}}{\gamma}\ E_{\vee}$$

donde $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup (H(\mathcal{D}_2) - \{\varphi\}) \cup (H(\mathcal{D}_3) - \{\psi\})$.
Por lo que, aplicando la hipótesis y conceptos conocidos de álgebra de conjuntos: $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

[1]En esta aplicación de $I_{\to}$ elegimos cancelar todas las ocurrencias de la hipótesis φ en en $\mathcal{D}$

Recíproco

Previamente se debe probar el siguiente Lema:

Lema $(\bar{\forall}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}), C(\mathcal{D})) \in R$

Se probará usando el PIP para $\texttt{DER}$.

En este punto, a modo de adelanto, se presentará la identificación de la propiedad, el paso base y un par de pasos inductivos para mostrar el estilo de la prueba. La demostración se encuentra en el anexo B al final del documento.

Id. Propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{D}) := (H(\mathcal{D}), C(\mathcal{D})) \in R$

Paso Base (HIP)

T) $\mathcal{P}(\varphi) = (H(\varphi), C(\varphi)) \in R$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
(H(\varphi), C(\varphi)) \\
= \text{(Def. de Hip. y Conclusión en } \texttt{DER}\text{)} \\
(\{\varphi\}, \varphi) \\
\Rightarrow \text{(Regla I def. de R)} \\
(\{\varphi\}, \varphi) \in R
\end{array}
$$

Paso Inductivo I $\wedge$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \nabla^{D} \\ \varphi \end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \nabla^{D'} \\ \psi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{c} \nabla^{D} \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \nabla^{D'} \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} I\wedge$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

$$
\begin{array}{l}
\text{(Por H))} \\
(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R \\
\Rightarrow \text{(Def. de Conclusión en } \texttt{DER} \text{ y } \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\text{)} \\
(H(\mathcal{D}_1), \varphi) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R \\
\Rightarrow \text{(Regla XVII def. R)} \\
(H(\mathcal{D}_1) \cup H(D_2), \varphi) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R \\
\Rightarrow \text{(Regla II def. R)} \\
(H(\mathcal{D}_1) \cup H(D_2), \varphi \wedge \psi) \in R \\
\Rightarrow \text{(Def. de Hip. y Conclusión en } \texttt{DER} \text{ y } \mathcal{D}_3\text{)} \\
(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R
\end{array}
$$

Paso Inductivo E $\vee$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \vee \psi \end{array}$, $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \varphi \\ \bigtriangledown D' \\ \gamma \end{array}$ y $\mathcal{D}_3 = \begin{array}{c} \psi \\ \bigtriangledown D'' \\ \gamma \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_4 = \dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \bigtriangledown D' \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \bigtriangledown D'' \\ \gamma \end{array}}{\gamma}\ E\vee$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_4) = (H(\mathcal{D}_4), C(\mathcal{D}_4)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \Gamma_2, \Gamma_3$ finitos)
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\varphi\}, C(\mathcal{D}_2)) \in R$ y $(\Gamma_3 \cup \{\psi\}, C(\mathcal{D}_3)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \vee \psi) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\varphi\}, \gamma) \in R$ y $(\Gamma_3 \cup \{\psi\}, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \varphi \vee \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{\varphi\}, \gamma) \in R$ y
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{\psi\}, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla IX def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_4$)
$(H(\mathcal{D}_4), C(\mathcal{D}_4)) \in R$

■

Recíproco

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow (\Gamma, \varphi) \in R$$

Dem.

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \mathtt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Sea ese elemento: $\mathcal{D}_1 \in \mathtt{DER}$ y $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}, \Delta \subseteq \mathtt{PROP}$ tal que:

- $\Gamma = H(\mathcal{D}_1) \cup \Delta$
- $C(\mathcal{D}_1) = \varphi$

(Por Lema anterior)
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\Rightarrow$ (def. $C(\mathcal{D}_1)$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Delta, \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def.Γ)
$(\Gamma, \varphi) \in R$

■

d. Queremos probar que para todo $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ y para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$ tales que: $(\Gamma, \varphi) \in R$ existe un conjunto finito Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, tal que también se cumple $(\Gamma', \varphi) \in R$.

   Sean $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ y $\varphi \in \texttt{PROP}$ tales que $(\Gamma, \varphi) \in R$. Por la parte anterior, sabemos que $\Gamma \vdash \varphi$, que por definición es equivalente a que exista $\mathcal{D} \in \texttt{DER}$ tal que $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi$.

   Luego, como el árbol de derivción $\mathcal{D}$ es un elemento construido inductivamente, este debe ser finito. En particular, debe tener una cantidad finita de hojas, que se corresponden con las hipótesis sin cancelar de $\mathcal{D}$ dadas por el conjunto $H(\mathcal{D})$.

   Entonces tomando $\Gamma' = H(\mathcal{D})$, sabemos que la derivación $\mathcal{D}$ cumple $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma'$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi$. Lo anterior resulta equivalente a $\Gamma' \vdash \varphi$. Aplicando nuevamente la parte anterior obtenemos $(\Gamma', \varphi) \in R$.

Ejercicio 12

Bosquejo de solución

Comenzaremos intentando modelar la realidad utilizando fórmulas de PROP. Por un lado, utilizamos letras proposicionales para modelar los síntomas y los diagnósticos:

- $p_1 =$ Tiene fiebre
- $p_2 =$ Tiene piel amarilla
- $p_3 =$ Tiene hepatitis
- $p_4 =$ Tiene rubeola

Como se puede observar, los síntomas y diagnósticos son efectivamente elementos atómicos ya que no se pueden descomponer en elementos más pequeños del lenguaje. Por otro lado, representamos las reglas mediante fórmulas de PROP:

- Regla 1: $\varphi_1 = (p_1 \lor p_2) \to (p_3 \lor p_4)$
- Regla 2: $\varphi_2 = \neg p_4 \lor p_1$
- Regla 3: $\varphi_3 = (p_3 \land \neg p_4) \to p_2$

Sabemos que estas reglas se cumplen en la realidad planteada. Además de estas reglas, tenemos las hipótesis adicionales de que el paciente no tiene la piel amarillenta y tiene fiebre, la cual podemos representar con las siguientes fórmulas:

- $\varphi_4 = \neg p_2$
- $\varphi_5 = p_1$

De esta forma modelamos la realidad del problema. Ahora se nos plantean las preguntas "¿El paciente tiene rubeola?" y "¿El paciente tiene hepatitis?". Para contestarlas utilizando el modelo construido, debemos verificar que a partir de nuestro conjunto de reglas e hipótesis $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ podemos demostrar las conclusiones p_4 (El paciente tiene rubeola) y p_3 (El paciente tiene hepatitis). Esto es equivalente a analizar si se cumple que $\Gamma \vdash p_4$ y $\Gamma \vdash p_3$.

a. Primero vamos a probar que se cumple $\Gamma \vdash p_4$. Para esto, construimos la siguiente derivación:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(p_1 \lor p_2) \to (p_3 \lor p_4)$}
\AxiomC{p_1}
\RightLabel{$I\lor$}
\UnaryInfC{$p_1 \lor p_2$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{$p_3 \lor p_4$}
\AxiomC{$\neg p_2$}
\AxiomC{$(p_3 \land \neg p_4) \to p_2$}
\AxiomC{$[p_3]^1$}
\AxiomC{$[\neg p_4]^2$}
\RightLabel{$I\land$}
\BinaryInfC{$p_3 \land \neg p_4$}
\RightLabel{$E\to$}
\BinaryInfC{p_2}
\RightLabel{$E\neg$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$RAA(2)$}
\UnaryInfC{p_4}
\AxiomC{$[p_4]^1$}
\RightLabel{$E\lor(1)$}
\TrinaryInfC{p_4}
\end{prooftree}
$$

Por lo tanto, observamos que a partir de las reglas que se cumplen en nuestra realidad, podemos demostrar que se cumple p_4. En este caso, el paciente tiene rubeola.

b. Mirando las reglas de la realidad, ¿se puede afirmar que el paciente tiene hepatitis? Mirando las hipótesis que tenemos y tratando de sacar conclusiones en el metalenguaje, podemos observar que no parece haber una línea de razonamiento que nos permita concluir que el paciente tiene hepatitis. De forma análoga, tampoco parece haber una línea de razonamiento que nos permita concluir que el paciente **no** tiene hepatitis.
Las dos afirmaciones anteriores quieren decir que nuestro conjunto de hipótesis no permite determinar la veracidad de la afirmación "tiene hepatitis".
Volviendo al modelo realizado de la realidad con lógica proposicional, no parece ser posible probar $\Gamma \vdash p_3$ ni $\Gamma \vdash \neg p_3$. Para poder asegurar lo anterior, deberíamos ser capaces de demostrar que efectivamente $\Gamma \nvdash p_3$ y $\Gamma \nvdash \neg p_3$

$\Gamma \nvdash p_3$
$\Leftarrow$ (contrarrecíproco de corrección)
$\Gamma \not\models p_3$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1$ y $v(p_3) = 0$

$\Gamma \nvdash \neg p_3$
$\Leftarrow$ (contrarrecíproco de corrección)
$\Gamma \not\models \neg p_3$
$\Leftrightarrow$ (def. $\not\models$)
$(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1$ y $v(\neg p_3) = 0$

Resta probar que $(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1$ y $v(p_3) = 0$ y $(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1$ y $v(\neg p_3) = 0$

1. Sea v_1 una valuación tal que: $v_1(p_1) = 1,\ v_1(p_2) = 0,\ v_1(p_3) = 0$ y $v_1(p_4) = 1$
   Hay que ver que $v_1(\Gamma) = 1$ y $v_1(p_3) = 0$:
   $v_1(\varphi_1) = v_1((p_1 \vee p_2) \to (p_3 \vee p_4)) = max = \{1 - v_1(p_1 \vee p_2),\ v_1(p_3 \vee p_4)\} = 1$
   $v_1(\varphi_2) = v_1(\neg p_4 \vee p_1) = max\{v_1(\neg p_4), v_1(p_1)\} = 1$
   $v_1(\varphi_3) = v_1((p_3 \wedge \neg p_4) \to p_2) = max\{1 - v_1(p_3 \wedge p_4),\ v_1(p_2)\} = 1$
   $v_1(\varphi_4) = v_1(\neg p_2) = 1$
   $v_1(\varphi_5) = v_1(p_1) = 1$
   $v_1(p_3) = 0$

2. Sea v_2 una valuación tal que: $v_2(p_1) = 1,\ v_2(p_2) = 0,\ v_2(p_3) = 1$ y $v_2(p_4) = 1$
   Hay que ver que $v_2(\Gamma) = 1$ y $v_2(\neg p_3) = 0$:
   $v_2(\varphi_1) = v_2((p_1 \vee p_2) \to (p_3 \vee p_4)) = max = \{1 - v_2(p_1 \vee p_2),\ v_2(p_3 \vee p_4)\} = 1$
   $v_2(\varphi_2) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) = max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} = 1$
   $v_2(\varphi_3) = v_2((p_3 \wedge \neg p_4) \to p_2) = max\{1 - v_2(p_3 \wedge p_4),\ v_2(p_2)\} = 1$
   $v_2(\varphi_4) = v_2(\neg p_2) = 1$
   $v_2(\varphi_5) = v_2(p_1) = 1$
   $v_2(\neg p_3) = 0$

A. Ejercicio 9 - Directo

$$(\Gamma, \varphi) \in R \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$
$$\Leftrightarrow \text{(def. } \vdash\text{)}$$
$$(\bar{\forall}(\Gamma, \varphi) \in R)(\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi$$

Demostraremos esto usando el PIP para R en (Γ, φ).
Identificamos la propiedad a utilizar,

$$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) := (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$$

Paso Base

T) $P((\{\varphi\}, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo.

$$\text{(por regla HIP de DER)}$$
$$\varphi \in \texttt{DER}$$
$$\Rightarrow \text{(tomando } \varphi \in \texttt{DER} \text{ como testigo)}$$
$$(\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})H(\mathcal{D}) = \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi$$
$$\Rightarrow (\{\varphi\} \subseteq \{\varphi\})$$
$$(\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$$

Paso Inductivo 1

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \wedge \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de `DER`,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}$$

y se cumple: $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma$ y $H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$
Luego, aplicando la regla $I_\wedge$ de `DER` tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{cc} \overset{A}{\bigtriangledown} & \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} I_\wedge$$

Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple por construccón: $C(D) = (\varphi \wedge \psi)$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.

Paso Inductivo 2

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \wedge \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{A} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.

Luego, aplicando la regla $E_{\wedge 1}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{A} \\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ E_{\wedge 1} \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D})$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi$.

Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 3

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \wedge \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \wedge \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$D = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{A} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}$$

con $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.

Luego, aplicando la regla $E_{\wedge 2}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{A} \\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ E_{\wedge 2} \end{array}$$

Razonando como en el paso anterior y tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 4

H) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\}, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \to \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \to \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \varphi \\ \bigtriangledown_{A} \\ \psi \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$

Luego, aplicando la regla $I_{\to}$ de `DER` tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^1\\ \triangledown A\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ I_{\to}^1$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D}) - \{\varphi\}$ [2].
Por lo tanto: $H(\mathcal{D}') \subseteq H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 5

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \to \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \to \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de `DER`,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c}\triangledown A\\ \varphi\end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c}\triangledown B\\ \psi \to \psi\end{array}$$

con $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma$ y $H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$ y
Luego, aplicando la regla $E_{\to}$ de `DER` tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } D = \dfrac{\begin{array}{c}\triangledown B\\ \varphi \to \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\triangledown A\\ \varphi\end{array}}{\psi}\ E_{\to}$$

Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple por construccón: $C(\mathcal{D}) = \psi$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.

Paso Inductivo 6

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \vee \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de `DER`,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c}\triangledown A\\ \varphi\end{array}$$

Luego, aplicando la regla $I_{\vee 1}$ de `DER` tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } D' = \dfrac{\begin{array}{c}\triangledown A\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ I_{\vee 1}$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D})$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi$.
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 7

[2]Notar que podría ocurrir que $\varphi \notin H(\mathcal{D})$ y en ese caso $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}')$

H) $\mathcal{P}((\Gamma,\psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma,\varphi \vee \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}$$

Luego, aplicando la regla $I_{\vee 2}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } D' = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}}{\varphi \vee \psi}\ I_{\vee 2}$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D})$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi$.
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 8

H) $\mathcal{P}((\Gamma,\varphi \vee \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \vee \psi)$
$\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\},\gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$
$\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\psi\},\gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\psi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma,\gamma)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \gamma)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \varphi \vee \psi \end{array}, \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \varphi \\ \bigvee \\ \gamma \end{array} \text{ y } \mathcal{D}_3 = \begin{array}{c} \psi \\ \bigvee \\ \gamma \end{array}$$

donde se cumple $H(\mathcal{D}_i) \subseteq \Gamma$ para $i \in \{1,2,3\}$.
Luego, aplicando la regla $E_\vee$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{D_1 \quad D_2^{[\varphi]} \quad D_3^{[\psi]}}{\gamma}\ E_\vee$$

donde $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup (H(\mathcal{D}_2) - \{\varphi\}) \cup (H(\mathcal{D}_3) - \{\psi\})$.
Por lo que, aplicando la hipótesis y conceptos conocidos de álgebra de conjuntos: $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 9

H) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\}, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$
$\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\psi\}, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\psi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma\, \varphi \leftrightarrow \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \leftrightarrow \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c}\varphi\\ \bigvee\\ \psi\end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c}\psi\\ \bigvee\\ \varphi\end{array}$$

Luego, aplicando la regla $I_{\leftrightarrow}$ de DER tenemos que

$$D \in \texttt{DER} \text{ con } D = \cfrac{D_1^{[\varphi]} \quad D_2^{[\psi]}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\; I_{\leftrightarrow}$$

Por construcción: $H(\mathcal{D}) = (H(\mathcal{D}_1) - \{\varphi\}) \cup (H(\mathcal{D}_2) - \{\varphi\})$.
Por lo que, aplicando la hipótesis y conceptos conocidos de álgebra de conjuntos: $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 10

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \leftrightarrow \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c}\overset{A}{\bigtriangledown}\\ \psi\end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c}\overset{B}{\bigtriangledown}\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma$ y $H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$
Luego, aplicando la regla $E_{\leftrightarrow 1}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \cfrac{\begin{array}{c}\overset{B}{\bigtriangledown}\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\overset{A}{\bigtriangledown}\\ \varphi\end{array}}{\psi}\; E_{\leftrightarrow 1}$$

Por construccón se cumple: $C(\mathcal{D}) = \psi$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 11

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \psi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi \leftrightarrow \psi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi \leftrightarrow \psi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma\, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}_1) \subseteq \Gamma$ y $H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$

Luego, aplicando la regla $E_{\leftrightarrow 2}$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}}{\varphi}\ E_{\leftrightarrow 2}$$

Por construccón se cumple: $C(\mathcal{D}) = \varphi$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 12

H) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\varphi\}, \bot)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ y } C(\mathcal{D}) = \bot)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \neg\varphi)) : (\bar{\exists}(\mathcal{D} \in \texttt{DER})H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \neg\varphi)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \varphi \\ \bigvee \\ \bot \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.

Luego, aplicando la regla $I_\neg$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \bigvee \\ \bot \end{array}}{\neg\varphi}\ I_\neg$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D}) - \{\varphi\}$.
Por lo tanto: $H(\mathcal{D}') \subseteq H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 13

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \neg\varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \neg\varphi)$
$\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \perp)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \perp)$

Demo.

Por hipótesis sabemos que existen las siguientes derivaciones, ambas elementos de DER,

$$\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \neg\varphi \end{array} \text{ y } \mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}$$

donde se cumple: $H(\mathcal{D}_i) \subseteq \Gamma$ para $i \in \{1, 2\}$.
Luego, aplicando la regla $E_\neg$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D} \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \neg\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{B}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}}{\perp} E_\neg$$

Por construccón se cumple: $C(\mathcal{D}) = \perp$ y $H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2) \subseteq \Gamma$.
Tomando $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 14

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \perp)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \perp)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo. Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de DER,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \perp \end{array}$$

Luego, aplicando la regla $E_\perp$ de DER tenemos que

$$\mathcal{D}' \in \texttt{DER} \text{ con } \mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{A}{\bigtriangledown} \\ \perp \end{array}}{\varphi} E_\perp$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D})$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi$.
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 15

H) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \bot)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ y $C(\mathcal{D}) = \bot)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}(\mathcal{D} \in \texttt{DER})H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo. Por hipótesis sabemos que existe la siguiente derivación, elemento de $\texttt{DER}$,

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \bigvee \\ \bot \end{array}$$

donde $H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.
Luego, aplicando la regla RAA de $\texttt{DER}$ tenemos que

$$D' \in \texttt{DER} \text{ con } D' = \dfrac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \bigvee \\ \varphi \end{array}}{\bot}\ RAA$$

donde $H(\mathcal{D}') = H(\mathcal{D}) - \{\neg\varphi\}$.
Por lo tanto: $H(\mathcal{D}') \subseteq H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$
Tomando $\mathcal{D}'$ como testigo se cumple la tesis.

Paso Inductivo 16

H) $\mathcal{P}((\Gamma, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi)$

T) $\mathcal{P}((\Gamma \cup \Delta, \varphi)) : (\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \cup \Delta$ y $C(\mathcal{D}) = \varphi)$

Demo. Considerando la misma derivación $\mathcal{D}$ que surge de la hipótesis se cumple que:
$H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$
$C(\mathcal{D}) = \varphi$
Por lo tanto, tomando la misma $\mathcal{D}$ como testigo se cumple la tesis.

Como se cumplen todas las hipótesis del PIP para R, podemos afirmar que:

$$(\bar{\forall}(\Gamma, \varphi) \in R)(\bar{\exists}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma \text{ y } C(\mathcal{D}) = \varphi)$$

Completando esto la demostración del directo del enunciado a probar.

B. Ejercicio 9 - Recíproco - Lema

Lema $(\bar{\forall}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}), C(\mathcal{D})) \in R$

Se probará usando el PIP para $\texttt{DER}$.

Id.Propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{D}) := (H(\mathcal{D}), C(\mathcal{D})) \in R$

Paso Base (HIP)

T) $\mathcal{P}(\varphi) = (H(\varphi), C(\varphi)) \in R$

Demo.

$$\begin{aligned}
&(H(\varphi), C(\varphi))\\
&= \text{(Def. de Hip. y Conclusión en DER)}\\
&(\{\varphi\}, \varphi)\\
&\Rightarrow \text{(Regla I def. de R)}\\
&(\{\varphi\}, \varphi) \in R
\end{aligned}$$

Paso Inductivo I $\wedge$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \nabla D \\ \varphi \end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \nabla D' \\ \psi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{cc} \nabla D & \nabla D' \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}\, I\wedge$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

$$\begin{aligned}
&\text{(Por H))}\\
&(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R\\
&\Rightarrow \text{(Def. de Conclusión en DER y } \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)\\
&(H(\mathcal{D}_1), \varphi) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R\\
&\Rightarrow \text{(Regla XVII def. R)}\\
&(H(\mathcal{D}_1) \cup H(D_2), \varphi) \in R \text{ y } (H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R\\
&\Rightarrow \text{(Regla II def. R)}\\
&(H(\mathcal{D}_1) \cup H(D_2), \varphi \wedge \psi) \in R\\
&\Rightarrow \text{(Def. de Hip. y Conclusión en DER y } \mathcal{D}_3)\\
&(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R
\end{aligned}$$

Paso Inductivo E $\wedge_1$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}.$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

T) Sea $D_2 = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi}\, E\wedge_1.$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Demo.

(Por H))

$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)

$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \wedge \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hip en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), \varphi \wedge \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Regla III def. R)

$(H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo E $\wedge_2$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}.$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

T) Sea $D_2 = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi}\, E\wedge_2.$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Demo.

(Por H))

$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)

$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \wedge \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hip en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), \varphi \wedge \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Regla IV def. R)

$(H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo I $\rightarrow$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \varphi \\ \nabla\!\!\!\!\!\;{}^{D} \\ \psi \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} [\varphi] \\ \nabla\!\!\!\!\!\;{}^{D} \\ \dfrac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi}\ I \rightarrow \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$$

Demo.

(Por H))

$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_1$ y Γ_1 finito)

$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)

$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Regla V def. R)

$(\Gamma_1, \varphi \rightarrow \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo E $\to$

H) Sean $D_1 = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \varphi \to \psi \end{array}$ y $D_2 = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{D'} \\ \varphi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $D_3 = \dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \varphi \to \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigtriangledown_{D'} \\ \varphi \end{array}}{\psi}\ E\to$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \to \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi \to \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla VI def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Paso Inductivo I $\vee_1$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \varphi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi}\ I\vee_1$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla VII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \vee \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo I $\vee_2$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi}\, I\vee_2$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$$

Demo.

(Por H))

$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)

$(H(\mathcal{D}_1), \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Regla VIII def. R)

$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \vee \psi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo E $\vee$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \vee \psi \end{array}$, $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \varphi \\ \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \gamma \end{array}$ y $\mathcal{D}_3 = \begin{array}{c} \psi \\ \overset{D''}{\bigtriangledown} \\ \gamma \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$$

T) Sea $\mathcal{D}_4 = \dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \overset{D''}{\bigtriangledown} \\ \gamma \end{array}}{\gamma}\, E\vee$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_4) = (H(\mathcal{D}_4), C(\mathcal{D}_4)) \in R$$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \Gamma_2, \Gamma_3$ finitos)
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\varphi\}, C(\mathcal{D}_2)) \in R$ y $(\Gamma_3 \cup \{\psi\}, C(\mathcal{D}_3)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \vee \psi) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\varphi\}, \gamma) \in R$ y $(\Gamma_3 \cup \{\psi\}, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \varphi \vee \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{\varphi\}, \gamma) \in R$ y
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \{\psi\}, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla IX def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \gamma) \in R$
$\Rightarrow$ (Def.de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_4$)
$(H(\mathcal{D}_4), C(\mathcal{D}_4)) \in R$

Paso Inductivo I $\leftrightarrow$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c}\varphi\\ \bigtriangledown D\\ \psi\end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c}\psi\\ \bigtriangledown D'\\ \varphi\end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \bigtriangledown D\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \bigtriangledown D'\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ I\leftrightarrow$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ finitos)
$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\psi\}, C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, \psi) \in R$ y $(\Gamma_2 \cup \{\psi\}, \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\varphi\}, \psi) \in R$ y $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\psi\}, \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla X def. R)
$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Paso Inductivo E $\leftrightarrow_1$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \stackrel{D}{\nabla} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \stackrel{D'}{\nabla} \\ \varphi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{c} \stackrel{D}{\nabla} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \stackrel{D'}{\nabla} \\ \varphi \end{array}}{\psi} E \leftrightarrow_1$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XI def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Paso Inductivo E $\leftrightarrow_2$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \stackrel{D}{\nabla} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \stackrel{D'}{\nabla} \\ \psi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{c} \stackrel{D}{\nabla} \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \stackrel{D'}{\nabla} \\ \psi \end{array}}{\varphi} E \leftrightarrow_2$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi \leftrightarrow \psi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \psi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Paso Inductivo I $\neg$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \varphi \\ \nabla D \\ \bot \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} [\varphi] \\ \nabla D \\ \dfrac{\bot}{\neg\varphi}\ I\neg \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_1, \Gamma_1$ finito)
$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)
$(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, \bot) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XIII def. R)
$(\Gamma_1, \neg\varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo E $\neg$

H) Sean $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \neg\varphi \end{array}$ y $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} \bigtriangledown D' \\ \varphi \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_3 = \dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \neg\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \bigtriangledown D' \\ \varphi \end{array}}{\perp} E\neg$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_3) = (H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en DER y $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_1), \neg\varphi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XVII def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \neg\varphi) \in R$ y $(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XIV def. R)
$(H(\mathcal{D}_1) \cup H(\mathcal{D}_2), \perp) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en DER y $\mathcal{D}_3$)
$(H(\mathcal{D}_3), C(\mathcal{D}_3)) \in R$

Paso Inductivo E $\perp$

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \perp \end{array}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \perp \end{array}}{\varphi} E\perp$.

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Demo.

(Por H))
$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en DER y $\mathcal{D}_1$)
$(H(\mathcal{D}_1), \perp) \in R$
$\Rightarrow$ (Regla XV def. R)
$(H(\mathcal{D}_1), \varphi) \in R$
$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en DER y $\mathcal{D}_2$)
$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Paso Inductivo RAA

H) Sea $\mathcal{D}_1 = \begin{array}{c} \neg\varphi \\ \bigtriangledown D \\ \bot \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_1) = (H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$$

T) Sea $\mathcal{D}_2 = \begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \bigtriangledown D \\ \dfrac{\bot}{\varphi}\, RAA \end{array}$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}_2) = (H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$$

Demo.

(Por H))

$(H(\mathcal{D}_1), C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis en `DER` y $\mathcal{D}_1, \Gamma_1$ finito)

$(\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\}, C(\mathcal{D}_1)) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_1$)

$(\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\}, \bot) \in R$

$\Rightarrow$ (Regla XVI def. R)

$(\Gamma_1, \varphi) \in R$

$\Rightarrow$ (Def. de Hipótesis y Conclusión en `DER` y $\mathcal{D}_2$)

$(H(\mathcal{D}_2), C(\mathcal{D}_2)) \in R$

Por lo demostrado en el paso base, todos los pasos inductivos y aplicando el PIP para `DER` se cumple la propiedad

$$(\bar{\forall}\mathcal{D} \in \texttt{DER})(H(\mathcal{D}), C(\mathcal{D})) \in R)$$

■