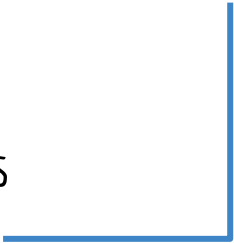




Teoría de Lenguajes

Pumping Lema
para
Lenguajes Regulares



Ejemplo

El siguiente lenguaje.....

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

¿es un lenguaje regular?

Pumping Lema

H) L es un Lenguaje Regular

T) $\exists n \in \mathbb{N} / \forall z \in L \wedge |z| \geq n \exists$ descomposición de z : $z = uvw /$

i) $|uv| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

iii) $\forall i \geq 0 \ z_i = uv^i w \in L$

Contrarrecíproco del Pumping Lema

H) Sea un lenguaje L

$\forall n \in \mathbb{N} / \exists z \in L \wedge |z| \geq n \quad \forall$ descomposición de $z: z = uvw /$

i) $|uv| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

iii) $\exists i \geq 0, z_i = uv^i w \notin L$

T) L no es un Lenguaje Regular

Contrarrecíproco del Pumping Lema

Para probar que L no es un Lenguaje Regular

Dado $n \in \mathbb{N}$

Elegir $z = \dots$ (en función del n) con $z \in L \wedge |z| \geq n$

Probar $\forall$ descomposición de $z = uvw$ /

i) $|uv| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

Encontrar $i \geq 0$ y justificar que $z_i = uv^i w \notin L$

Agregar la cláusula que dice “Estas son todas las descomposiciones de z que cumplen i) y ii), cualquier otra falla en la iii)”

Entonces L NO es un Lenguaje Regular

Pumping Lema

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

Intuitivamente creemos - en base a lo que estuvimos comentando antes - que NO es un lenguaje regular e intentaremos probarlo por el contrarrecíproco del PL

Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

Pasos:

- 1.- Fijamos un N (positivo y arbitrario)
- 2.- Elegimos una tira $z \in L$, en función del N y que $|z| \geq N$
- 3.- Se hacen todas las descomposiciones de z que cumplan: $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$;
- 4.- Se busca para cada caso un $i \geq 0$ de manera que $uv^i w \notin L$
- 5.- Si se logra, colocar la cláusula extrema que que no hay más casos a estudiar que cumplen $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$
- 6.- Ahora si podemos afirmar que L NO es un lenguaje regular

Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$

Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$
- $z = 0^{2N} 1^{2N}$
- $z = 0^{3N} 1^{3N}$
- $z = 0^{4N} 1^{4N}$
-

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|\mathcal{N}/2|} 1^{|\mathcal{N}/2|}$$

$\mathcal{N}/2$

$\mathcal{N}/2$

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u | | v | | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u || v || w |
- (2) | u || v || w |
- (3) | u || v || w |

- (1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
 $v = 0^q$ $q \geq 1$
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

$$\begin{array}{lcl} (1) & | & u \quad | \quad v \quad | \quad w \quad | \\ (2) & | & u \quad | \quad v \quad | \quad w \quad | \\ (3) & | & u \quad | \quad v \quad | \quad w \quad | \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (1) & u = 0^p & p \geq 0 \\ & v = 0^q & q \geq 1 \\ & & p+q \leq N \end{array}$$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

$$z_i = 0^p (0^q)^i 0^{|N/2|-q-p} 1^{|N/2|} = 0^{|N/2|+(i-1)q} 1^{|N/2|}$$

con $i=0$

$$z_0 = 0^{|N/2|-q} 1^{|N/2|}$$

$z_0 \notin L$ porque hay menos 0s que 1s
(porque $q \geq 1$)

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u || v || w |
- (2) | u || v || w |
- (3) | u || v || w |

- (1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
 $v = 0^q$ $q \geq 1$
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

- (2) $u = 0^{|N/2|-p}$
 $v = 0^p 1^q$ $p, q \geq 1$
 $|N/2|+q \leq N$
 $w = 1^{|N/2|-q}$

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

$$\begin{array}{lcl}
 (1) & | & u \quad || \quad v \quad || \quad w \quad | \\
 (2) & | & \quad u \quad || \quad v \quad \quad \quad || \quad \quad w \quad | \\
 (3) & | & \quad u \quad \quad \quad || \quad v \quad || \quad w \quad |
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad u = 0^p \quad p \geq 0 \\
 \quad \quad v = 0^q \quad q \geq 1 \\
 \quad \quad \quad p+q \leq N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|} \\
 u = 0^{|N/2|-p}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (2) \quad v = 0^p 1^q \quad p, q \geq 1 \\
 \quad \quad \quad |N/2|+q \leq N
 \end{array}$$

$$W = 1^{|N/2|-q}$$

$$z_i = 0^{|N/2|-p} (0^p 1^q)^i 1^{|N/2|-q}$$

con $i=2$

$$z_2 = 0^{|N/2|-p} 0^p 1^q 0^p 1^q 1^{|N/2|-q} = 0^{|N/2|} 1^q 0^p 1^{|N/2|}$$

$z_2 \notin L$ porque se mezclan 0's con 1's
(porque $p \geq 1$)

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u | | v | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

- (1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
 $v = 0^q$ $q \geq 1$
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

- (2) $u = 0^{|N/2|-p}$
 $v = 0^p 1^q$ $p, q \geq 1$
 $w = 1^{|N/2|-q}$

- (3) $u = 0^{|N/2|} 1^p$ $p \geq 0$
 $v = 1^q$ $q \geq 1$
 $w = 1^{|N/2|-p-q}$

Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

$\begin{array}{ccc} & N/2 & N/2 \\ 00000 & \dots\dots\dots & 00011111 & \dots\dots\dots & 11111111 \end{array}$

- (1) | u | | v | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

- (1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
 $v = 0^q$ $q \geq 1$
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

- (2) $u = 0^{|N/2|-p}$
 $v = 0^p 1^q$ $p, q \geq 1$
 $w = 1^{|N/2|-q}$

- (3) $u = 0^{|N/2|} 1^p$ $p \geq 0$
 $v = 1^q$ $q \geq 1$
 $w = 1^{|N/2|-p-q}$

el caso (3) es análogo al caso (1) pero al revés, si elijo la misma i , la cantidad de 0's queda mayor que la cantidad de 1's

Aplicación II (eligiendo otra tira)

$$z = 0^N 1^N$$

00000.....00011111.....11111111

(1) | u | | v | | w

Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

$\begin{array}{cc} N & N \\ 00000 & \dots\dots\dots 00011111 & \dots\dots\dots 11111111 \end{array}$

$$(1) \quad |u| \quad ||v|| \quad w \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & u = 0^p \quad p \geq 0 \\
 & v = 0^q \quad q \geq 1 \quad p+q \leq N \\
 & w = 0^{N-p-q} 1^N
 \end{aligned}$$

Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

$\begin{matrix} & N & & N \\ 00000 & \dots\dots\dots & 00011111 & \dots\dots\dots & 11111111 \end{matrix}$

$$(1) \quad | \quad u \quad | \quad | \quad v \quad | \quad | \quad w \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u &= 0^p & p \geq 0 \\
 v &= 0^q & q \geq 1 \quad p+q \leq N \\
 w &= 0^{N-p-q} 1^N
 \end{aligned}$$

De donde $z_i = 0^p (0^q)^i 0^{N-q-p} 1^N$

Luego, tomando por ejemplo $i=0$ queda:

$z_0 = 0^{N-q} 1^N$ y como $q \geq 1$, la cantidad de 0's es menor que la cantidad de 1's

Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

$\begin{matrix} & N & & N \\ 00000 & \dots & 000 & 11111 & \dots & 1111111 \end{matrix}$

$$(1) \quad |u| \quad ||v|| \quad w \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & u = 0^p \quad p \geq 0 \\
 & v = 0^q \quad q \geq 1 \quad p+q \leq N \\
 & w = 0^{N-p-q} 1^N
 \end{aligned}$$

De donde $z_i = 0^p (0^q)^i 0^{N-q-p} 1^N$

Luego, tomando por ejemplo $i=0$ queda:

$z_0 = 0^{N-q} 1^N$ y como $q \geq 1$, la cantidad de 0's es menor que la cantidad de 1's

(Notación: $|z_0|_0 < |z_0|_1$) y por lo tanto $z_0 \notin L$

y como es la única descomposición que cumple $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1 \Rightarrow \mathbf{L \text{ NO Regular}}$

Aplicación III - (otro ejemplo)

Sea el lenguaje

$$L_2 = \{ x / x = d_1 d_2 d_3 \dots d_n a^p / d_i \in \{1, 2, 3\} \wedge \sum_{i=1}^{i=n} d_i = 3^* p, p > 0 \}$$
 (Febrero 2021)

¿es regular?

Ejemplos de tiras:

- 33aa
- 312aa
- 223131aaaa
- ...