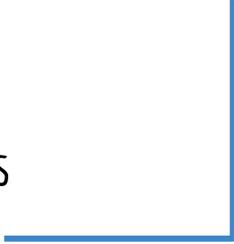




# Teoría de Lenguajes

Pumping Lema  
para  
Lenguajes Regulares



# Ejemplo

El siguiente lenguaje.....

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

¿es un lenguaje regular?

# Pumping Lema

H) L es un Lenguaje Regular

T)  $\exists n \in \mathbb{N} / \forall z \in L \wedge |z| \geq n \exists$  descomposición de  $z$ :  $z = uvw /$

i)  $|uv| \leq n$

ii)  $|v| \geq 1$

iii)  $\forall i \geq 0 z_i = uv^i w \in L$

# Contrarrecíproco del Pumping Lema

H) Sea un lenguaje L

$\forall n \in \mathbb{N} / \exists z \in L \wedge |z| \geq n \quad \forall$  descomposición de z:  $z = uvw /$

i)  $|uv| \leq n$

ii)  $|v| \geq 1$

iii)  $\exists i \geq 0, z_i = uv^i w \notin L$

T) L no es un Lenguaje Regular

# Contrarrecíproco del Pumping Lema

Para probar que  $L$  no es un Lenguaje Regular

Dado  $n \in \mathbb{N}$

Elegir  $z = \dots$  (en función del  $n$ ) con  $z \in L \wedge |z| \geq n$

Probar  $\forall$  descomposición de  $z = uvw /$

i)  $|uv| \leq n$

ii)  $|v| \geq 1$

Encontrar  $i \geq 0$  y justificar que  $z_i = uv^i w \notin L$

Agregar la cláusula que dice “Estas son todas las descomposiciones de  $z$  que cumplen i) y ii), cualquier otra falla en la iii)”

*Entonces  $L$  NO es un Lenguaje Regular*

# Pumping Lema

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

Intuitivamente creemos - en base a lo que estuvimos comentando antes - que NO es un lenguaje regular e intentaremos probarlo por el contrarrecíproco del PL

# Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

Pasos:

- 1.- Fijamos un  $N$  (positivo y arbitrario)
- 2.- Elegimos una tira  $z \in L$ , en función del  $N$  y que  $|z| \geq N$
- 3.- Se hacen todas las descomposiciones de  $z$  que cumplan:  $|uv| \leq N$  y  $|v| \geq 1$  ;
- 4.- Se busca para cada caso un  $i \geq 0$  de manera que  $uv^i w \notin L$
- 5.- Si se logra, entonces podemos afirmar que  $L$  NO es un lenguaje regular

# Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$

# Pumping Lema

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$
- $z = 0^{2N} 1^{2N}$
- $z = 0^{3N} 1^{3N}$
- $z = 0^{4N} 1^{4N}$
- .....

# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{\lfloor N/2 \rfloor} 1^{\lfloor N/2 \rfloor}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u | | v | | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u || v || w |
- (2) | u || v || w |
- (3) | u || v || w |

- (1)  $u = 0^p \quad p \geq 0$   
 $v = 0^q \quad q \geq 1$   
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

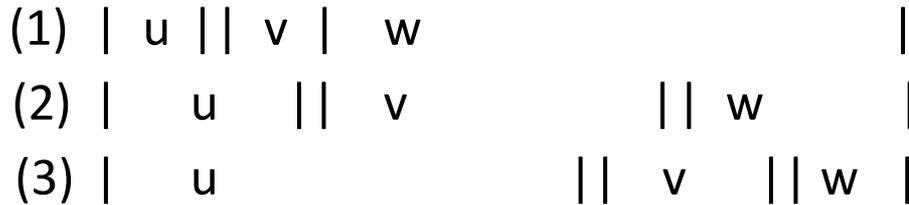
# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111



$$(1) \quad \begin{aligned} u &= 0^p & p \geq 0 \\ v &= 0^q & q \geq 1 \\ & & p+q \leq N \end{aligned}$$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

$$z_i = 0^p (0^q)^i 0^{|N/2|-q-p} 1^{|N/2|} = 0^{|N/2|+(i-1)q} 1^{|N/2|}$$

con  $i=0$

$$z_0 = 0^{|N/2|-q} 1^{|N/2|}$$

$z_0 \notin L$  porque hay menos 0s que 1s  
(porque  $q \geq 1$ )

# Aplicación (cont.)

$$z = \underbrace{0^{N/2}}_{N/2} \underbrace{1^{N/2}}_{N/2}$$

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u || v || w |
- (2) | u || v || w |
- (3) | u || v || w |

(1)  $u = 0^p \quad p \geq 0$   
 $v = 0^q \quad q \geq 1$   
 $p+q \leq N$

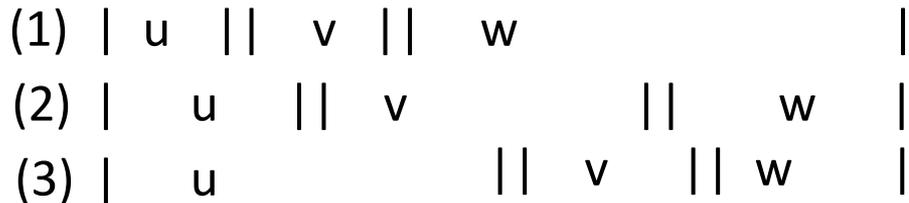
$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{N/2}$$

(2)  $u = 0^{|N/2|-p}$   
 $v = 0^p 1^q \quad p, q \geq 1$   
 $w = 1^{|N/2|-q}$

# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{\overbrace{|N/2|}^{\text{N/2}}} 1^{\overbrace{|N/2|}^{\text{N/2}}}$$

00000.....00011111.....1111111



$$(1) \quad \begin{aligned} u &= 0^p & p \geq 0 \\ v &= 0^q & q \geq 1 \\ & & p+q \leq N \end{aligned}$$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= 0^{|N/2|-p} \\ v &= 0^p 1^q & p, q \geq 1 \\ w &= 1^{|N/2|-q} \end{aligned}$$

$$z_i = 0^{|N/2|-p} (0^p 1^q)^i 1^{|N/2|-q}$$

con  $i=2$

$$z_2 = 0^{|N/2|-p} 0^p 1^q 0^p 1^q 1^{|N/2|-q} = 0^{|N/2|} 1^q 0^p 1^{|N/2|}$$

$z_2 \notin L$  porque se mezclan 0's con 1's  
(porque  $p \geq 1$ )

# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u | | v | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

- (1)  $u = 0^p$   $p \geq 0$   
 $v = 0^q$   $q \geq 1$   
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

- (2)  $u = 0^{|N/2|-p}$   
 $v = 0^p 1^q$   $p, q \geq 1$   
 $w = 1^{|N/2|-q}$

- (3)  $u = 0^{|N/2|} 1^p$   $p \geq 0$   
 $v = 1^q$   $q \geq 1$   
 $w = 1^{|N/2|-p-q}$

# Aplicación (cont.)

$$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$$

N/2

N/2

00000.....00011111.....1111111

- (1) | u | | v | w |
- (2) | u | | v | | w |
- (3) | u | | v | | w |

- (1)  $u = 0^p$   $p \geq 0$   
 $v = 0^q$   $q \geq 1$   
 $p+q \leq N$

$$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$$

- (2)  $u = 0^{|N/2|-p}$   
 $v = 0^p 1^q$   $p, q \geq 1$   
 $w = 1^{|N/2|-q}$

- (3)  $u = 0^{|N/2|} 1^p$   $p \geq 0$   
 $v = 1^q$   $q \geq 1$   
 $w = 1^{|N/2|-p-q}$

el caso (3) es análogo al caso (1) pero al revés, si elijo la misma  $i$ , la cantidad de 0's queda mayor que la cantidad de 1's

# Aplicación II (eligiendo otra tira)

$$z = 0^N 1^N$$

N                      N

00000.....00011111.....1111111

(1) | u | | v | | w |

# Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

N                      N

00000.....00011111.....1111111

$$(1) \quad | u \quad | | v | | \quad w \quad |$$

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= 0^p & p \geq 0 \\ v &= 0^q & q \geq 1 \quad p+q \leq N \\ w &= 0^{N-p-q} 1^N \end{aligned}$$

# Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

N
N  
 00000.....00011111.....1111111

$$(1) \quad | u \quad | | v | | \quad w \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u &= 0^p & p \geq 0 \\
 v &= 0^q & q \geq 1 \quad p+q \leq N \\
 w &= 0^{N-p-q} 1^N
 \end{aligned}$$

De donde  $z_i = 0^p (0^q)^i 0^{N-q-p} 1^N$

Luego, tomando por ejemplo  $i=0$  queda:

$z_0 = 0^{N-q} 1^N$  y como  $q \geq 1$ , la cantidad de 0's es menor que la cantidad de 1's

# Aplicación II (cont.)

$$z = 0^N 1^N$$

N
N  
 00000.....00011111.....1111111

$$(1) \quad |u| \quad ||v|| \quad w \quad |$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u &= 0^p & p \geq 0 \\
 v &= 0^q & q \geq 1 \quad p+q \leq N \\
 w &= 0^{N-p-q} 1^N
 \end{aligned}$$

De donde  $z_i = 0^p (0^q)^i 0^{N-q-p} 1^N$

Luego, tomando por ejemplo  $i=0$  queda:

$z_0 = 0^{N-q} 1^N$  y como  $q \geq 1$ , la cantidad de 0's es menor que la cantidad de 1's

(Notación:  $|z_0|_0 < |z_0|_1$ ) y por lo tanto  $z_0 \notin L$

y como es la única descomposición que cumple  $|uv| \leq N$  y  $|v| \geq 1 \Rightarrow$  **L NO Regular**

# Aplicación III - (otro ejemplo)

Sea el lenguaje

$$L_2 = \{ x / x = d_1 d_2 d_3 \dots d_n a^p / d_i \in \{1, 2, 3\} \wedge \sum_{i=1}^{i=n} d_i = 3^* p, p > 0 \} \quad (\text{Febrero 2021})$$

¿es regular?

Ejemplos de tiras:

- 33aa
- 312aa
- 223131aaaa
- ...