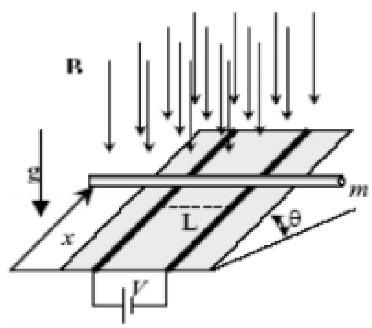
Resolución del ejercicio 3

Práctico 6

Una barra cilíndrica conductora de resistencia eléctrica despreciable y masa m se apoya sobre dos rieles paralelos, separados una distancia L. Los mencionados rieles tienen sección transversal A, están construídos con un material de resistividad ρ y se encuentran montados sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El sistema está sometido a un campo magnético uniforme y constante $\vec{B}$ con la misma dirección y sentido que el peso. Se conecta una fuente de tensión continua V a los rieles, cerrando el circuito formado por los dos rieles y la barra, según se muestra en la figura. Determine el valor de equilibrio para la variable x, distancia entre los extremos de los rieles y la barra conductora.



En primer lugar, observamos que la fuente de corriente, los segmentos de los rieles que van desde la base de la rampa hasta la posición x, y la parte de la barra que está entre los rieles, forman un circuito cerrado. Este circuito consta de V y dos resistencias en serie, que son los dos tramos de riel. Recordamos que la resistencia de un cilindro de resistividad ρ, área transversal A, y longitud ℓ, es

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

entonces la resistencia de cada uno de los tramos de riel es

$$R = \rho \frac{x}{A}$$

La intensidad en el circuito es igual al voltaje V dividido entre la resistencia equivalente, que al tratarse de una conexión en serie, es la suma de las dos resistencias. Entonces tenemos que

$$i = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{V}{2R} = \frac{VA}{2\rho x}$$

Para plantear la condición de equilibrio en la barra, tenemos que calcular ahora las fuerzas que actúan sobre ella. Como hay una intensidad de corriente en la barra, y la barra está en un campo magnético, va a haber una fuerza magnética. Recordamos que la fuerza magnética sobre un segmento de conductor por el que circula una intensidad i es

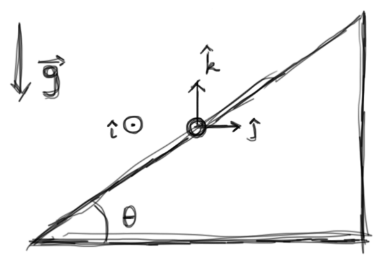
$$d\vec{F}_B = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

Para obtener la fuerza total sobre la barra, tenemos que integrar sobre el tramo de longitud L que está entre los rieles, que es la parte por la que circula corriente. Como i y $\vec{B}$ son constantes en ese tramo obtenemos

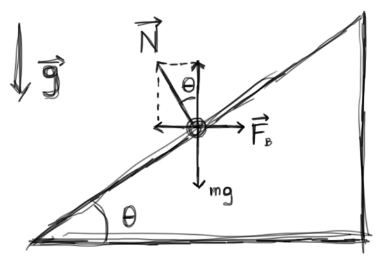
$$\vec{F}_B = i \left(\int d\vec{s} \right) \times \vec{B} = i \left(\int_0^L \hat{\imath} ds \right) \times (-B\hat{k}) = iLB\hat{\jmath}$$

ya que cada $d\vec{s}$ es un diferencial de longitud ds por un versor $\hat{\imath}$ en la dirección de la barra y hacia la derecha (en la figura anterior), porque debido a la orientación de la fuente la corriente circula en ese sentido.

El versor $\hat{\jmath}$ es perpendicular a la barra y a $\vec{B}$: corresponde al producto vectorial $\hat{\imath} \times (-\hat{k})$ como se indica en la siguiente figura. El módulo del producto vectorial de $\vec{B}$ y $\int d\vec{s} = L\hat{\jmath}$ es el producto de los módulos, ya que los vectores son perpendiculares.



Además de la fuerza magnética, sobre la barra actúan el peso y la normal. Descomponemos la normal en las direcciones $\hat{k}$ y $\hat{\jmath}$, para luego plantear la condición de equilibrio en cada una de estas direcciones.



En la dirección $\hat{\jmath}$ tenemos

$$F_B - N\sin\theta = 0 \Rightarrow iLB - N\sin\theta = 0$$

En la dirección $\hat{k}$

$$N\cos\theta - mg = 0$$

De aquí podemos despejar el módulo de la normal y sustituirlo en la ecuación para la dirección $\hat{\jmath}$. Tenemos entonces

$$iLB = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\tan\theta$$

Recordando la expresión que obtuvimos para i, tenemos

$$\frac{VA}{2\rho x}LB = mg\tan\theta$$

Despejando obtenemos el valor de x para el cual se verifica la condición de equilibrio

$$\boxed{x = \frac{VLBA}{2\rho mg\tan\theta}}$$